5. Übung zur Vorlesung: **Felsner/ Heldt**
Algorithmische Geometrie (KG II) 20. November
Abgabe: 27. November

---

(1) Seien n disjunkte Segmente s_i in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben. Gesucht ist nun eine Partitionierung des $\mathbb{R}^2$ in möglichst wenige Teilmengen $R_1, \ldots, R_k$, so dass für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ maximal ein Segment s_j mit R_i einen nicht–leeren Schnitt erzeugt. Also liegt in jeder Region höchstens ein Teil eines Segmentes (respektive ein ganzes Segment).
Um k klein zu halten, muss also vermieden werden Segmente zu zerschneiden.

(a) Zeige, dass es für manche Segmentmengen unvermeidbar ist, Segmente zu zerschneiden.

(b) Wir berechnen eine Zerlegung iterativ, indem wir in jede Region R_i, die noch mehr als ein Element beinhaltet, in zwei Regionen aufteilen. Dazu wählen wir zufällig eines der Segmente s_j in R_i und teilen R_i anhand der durch s_j induzierten Geraden. Zeige, dass wir erwarten können, dadurch $O(n \log n)$ Regionen R_i zu erhalten, die jeweils nur ein Segment (–Stück) enthalten.

(2) Wähle $n \in \mathbb{N}$ zufällig und gleichverteilt. Zeige, dass für $a \in \{2, \ldots, n-1\}$, die zufällig und gleichverteilt gewählt werden,

$$\Pr(\gcd(a, n) = 1 \mid n \text{ ist nicht Primzahl}) \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Zeige weiterhin, dass für $n = p \cdot q$ mit $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$\Pr(\gcd(a, n) = 1 \mid n \text{ ist nicht Primzahl}) \leq \frac{1}{4}$$

gilt, das heißt, dass wenn n keine Primzahl ist, wahrscheinlich $\gcd(a, n) \neq 1$ gilt.

(3) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Unser Ereignisraum $\Omega := \mathcal{P}(\mathbb{F}_p) = \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{/(p)})$ ist die Potenzmenge von $\mathbb{F}_p$. Weiterhin ist $\Pr : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\Pr(M) := \frac{1}{p^{n^2}} \cdot |\{A \in {\mathbb{F}_p}^{n \times n} \mid \det(A) \in M\}|.$$

(a) Zeige, dass Pr ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist (also $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ für $A \cap B = \emptyset$, $\Pr(\emptyset) = 0$, und $\Pr(\{0, \ldots, p-1\} \setminus A) = 1 - \Pr(A)$).

(b) Wie verhält sich $\Pr(\{0\})$ für $p \to \infty$?

(c) Beweise für $n > 1$ und alle $a \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ die Ungleichung

$$\Pr(\{a\}) < \Pr(\{0\}).$$

(d) Bestimme mit

$$E_{n,p} := \sum_{i=0}^{p-1} i \cdot \Pr(i + p\mathbb{Z})$$

den durchschnittlichen Wert der Determinanten der Matrizen.