4. Übung zur Vorlesung: **Felsner/ Heldt**

Algorithmische Geometrie (KG II) 06. November

Abgabe: 20. November

---

(1) Zeige oder widerlege, dass jede Fläche einer Triangulierung eines (monotonen) Polygons zu maximal zwei Flächen der Triangulierung benachbart ist.

(2) Sei P ein zusammenhängender und beschränkter Polytop im $\mathbb{R}^3$ mit n Ecken. Zeige oder widerlege, dass jede Ausschöpfung von P mit Tetraedern mindestens $n-3$ Tetraeder benötigt. Was passiert, falls statt einer Ausschöpfung eine Triangulierung gefordert ist? Das heisst, dass je zwei der Tetraeder sich in einer Fläche der Tetraeder schneiden (dabei gelten auch Kanten, Punkte und $\emptyset$ als Fläche).

(3) Sei P ein Polygon in der Ebene und $p \in P$ ein Punkt im Polygon. Gib ein Verfahren an, das effizient die Menge aller Punkte $Q \in P$ bestimmt, die von p aus sichtbar sind. *Hinweis:* Nutze einen Sweep–Algorithmus, bei dem eine Halbgerade, die um p rotiert, als Sweep–Line agiert.

(4) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Menge von n Punkten in der Ebene.

(a) Zeige, dass der Algorithmus zur Berechnung eines Paares mit minimalem Abstand aus der Vorlesung für eine beliebige Metrik d, die durch eine Norm $\|\cdot\|$ induziert wird, das Paar mit minimalem Abstand in P korrekt mit einem Zeitaufwand von $O(n \log n)$ berechnet.

(b) Sei d die Metrik des Französischen Eisenbahnsystems, also

$$\begin{aligned} d: \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (a,b) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a = b \\ \|a-b\|_2 & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R} : a = \lambda \cdot b, \\ \|a\|_2 + \|b\|_2 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnet der Algorithmus auch für diese Metrik das korrekte Paar? Wie schnell ist der Algorithmus mit dieser Metrik?

(5) Sie $Q_1, \ldots, Q_n$ eine Menge von Polygonen. Gib Algorithmen an, die $Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$, $Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$ und $(Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n) \setminus (Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n)$ berechnen.

(6) Implementiere den Algorithmus zur Triangulierung von Polygonen aus der Vorlesung.