1. Übung zur Vorlesung: **Felsner/ Heldt**
Algorithmische Geometrie (KG II) 15. Oktober
Abgabe: 23. Oktober

---

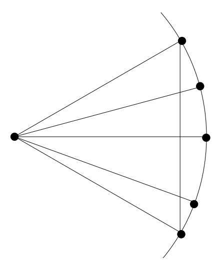
(1) Gegeben ist eine Menge von n positiven, natürlichen Zahlen $x_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Weiterhin gilt $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2^n - 1$. Gib ein Verfahren an, das in linearer Zeit entscheidet, ob es zwei verschiedene Teilmengen A und B gibt, deren Zahlensummen den gleichen Wert besitzen.

(2) Seien P und Q zwei konvexe Polygone mit m bzw. n Kanten. Weiterhin sei $P \cap Q \neq \emptyset$. Bestimme eine scharfe, obere Schranke für die Anzahl der Kanten von $P \cup Q$.

(3) Gegen sei eine n–elementige Punktmenge P in der Ebene. Ihr Durchmesser wird definiert durch

$$\operatorname{diam}(P) := \max_{p,q \in P} \|p - q\|.$$

Zeige, dass es maximal n Punktepaare gibt, die den Abstand $\operatorname{diam}(P)$ annehmen. Das dies möglich ist, zeigt die folgende Abbildung.



(4) Das Prädikat $cco(p, q, r)$ sei genau dann wahr, wenn die Punkte p, q, r im Gegenuhrzeigersinn angeordnet sind.

(a) Schlage eine Implementierung für diese Funktion vor und versuche dabei ohne Divisionen auszukommen.

(b) Seien die Koordinaten aller Punkte als Integerwerte gegeben und man nutzt die Implementierung aus (a) mit einer Integerarithmetik, die mit Zahlen im Bereich $[-2^{31}, 2^{31}]$ arbeitet. Wie groß können die Koordinaten der Punkte maximal sein, damit das Prädikat ausgewertet werden kann?

(c) Wende das *cco* Prädikat an, um zu bestimmen, ob sich zwei gegebene Strecken schneiden.

(d) Gegeben ist ein einfacher Polygonzug als aufeinanderfolgende Menge von Strecken. Wende das *cco* Prädikat an, um zu entscheiden ob ein Punkt p im Inneren des durch den Polygonzug gegebenen Polygons liegt.

(e) Beweise die folgenden Aussagen über *cco* für Punkte p, q, r, s, t in allgemeiner Lage, also wenn keine drei der Punkte auf einer Geraden liegen.

$$cco(p, q, r) \Rightarrow cco(q, r, p)$$
$$cco(p, q, r) \Rightarrow \neg\, cco(p, r, q)$$
$$cco(p, q, r) \vee cco(p, r, q)$$
$$cco(t, q, r) \wedge cco(p, t, r) \wedge cco(p, q, t) \Rightarrow cco(p, q, r)$$
$$cco(t, s, p) \wedge cco(t, s, q) \wedge cco(t, s, r) \wedge cco(t, p, q) \wedge cco(t, q, r) \Rightarrow cco(t, p, r)$$