Übungsaufgaben

Algebraische und Probabilistische Methoden in der Diskreten Mathematik

---

Blatt 4 Last change **14. Juli 2022**

(1) Wir betrachten einen Zufallsprozess auf natürlichen Zahlen. Ist r die aktuelle Zahl, dann wird die nächste Zahl gleichverteilt aus $\{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$ gewählt. Bei 0 endet der Prozess.

- Wie viele Zahlen sieht man im Erwartungswert, wenn der Prozess in n startet?
- Verwende den Zufallsprozess um die Formel $H_n = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} H_k$ ohne Rechnung zu beweisen.

(2) Sei X ein Array mit $|X| = n$ und Werten aus einer Totalordnung, d.h. für $i, j \in [n]$ gilt $x_i < x_j$ oder $x_i > x_j$. Analysiere die Anzahl der Vergleiche die der folgende Algorithmus benötigt um das k-te Element aus X zu bestimmen.

Initialisierung $A \leftarrow X$ und $p \leftarrow k$.
Solange $|A| > 1$: Wähle j gleichverteilt aus $[|A|]$ und erzeuge aus A die Arrays B_k und B_g mit den Elementen die $\leq$ beziehungsweise $>$ als A_j sind.
Wenn $|B_k| \geq p$, dann setze $A \leftarrow B_k$.
Wenn $|B_k| = i < p$, dann setze $A \leftarrow B_g$ und $p \leftarrow p - i$.
Return A_i.

(3) Der Böse hat 100 Denker gefangen. Er hat jedem Denker seinen Ausweis abgenommen. Jeden Ausweis hat er in einen von 100 Schuhkartons gelegt, in jeden Karton einen Ausweis. Die Schuhkartons stehen neheneinender auf einem Schuhschrank in einem Raum.

Der Böse bietet den Denkern folgende Chance: Jeder Denker darf den Raum mit den Kartons alleine betreten und dort genau 50 Kartons öffnen. Wenn am Ende jeder Denker weiß, in welchem Karton sein Ausweis ist, dann dürfen alle Denker ausreisen. Andernfalls geschieht ihnen Furchtbares.
Die Denker können sich absprechen, werden aber, bevor der erste den Raum betritt, isoliert. Auf welche Strategie sollten die Denker sich einigen?

(4) Der Flug von A nach B ist mit 100 Passagieren bis auf den letzten Platz ausgebucht. Der Drängler, der die Maschine als erster betritt, hat die Bordkarte

verloren und setzt sich auf Platz 13F. Die übrigen 99 Passagiere betreten die Maschine nacheinander, wobei jeder bei der Platzwahl seinen Platz bevorzugt, ist selbiger schon besetzt, wählt der Passagier zufällig einen Platz aus den noch freien Plätzen und setzt sich dort hin. **Frage:** Wie wahrscheinlich ist es, dass der letzte Passagier auf dem Platz sitzt, der auf seiner Bordkarte steht?

(5) Ein Turnier ist eine Orientierung des vollständigen Graphen. Zeige:

(a) Jedes Turnier besitzt einen gerichteten Hamiltonpfad.

(b) Es gibt ein Turnier auf n Knoten, das zumindest $(n!) \cdot 2^{-(n-1)}$ gerichtete Hamiltonpfade besitzt.

(6) Verwende LLL um zu zeigen, dass es für n, k mit

$$e2^{1-\binom{k}{2}}\binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2} \leq 1$$

eine Färbung der Kanten des K_n mit rot und blau gibt, die keinen monochromatischen K_k enthält. (Dies liefert eine um einen Faktor 2 verbesserte untere Schranke an die Ramsey-Zahl $R(2,k)$ – verglichen mit Erdős 1947).

(7) A particle moves on a cycle graph. At each step the particle goes from the current vertex to one of the two adjacent vertices chosen with equal probability. Clearly, the first time when the particle has visited all the vertices, it has gone over all the edges in the cycle, except one. The question is, how is the "left-out" edge distributed, relative to the starting point?

(8) Seien q und π Verteilungen auf S die Totale-Variations-Distanz der beiden ist definiert als

$$||q-\pi||_{TV} := \max_{A \subset S} |q(A) - \pi(A)|.$$

Beweise: $||q-\pi||_{TV} = \frac{1}{2}\sum_{s\in S} |q(s) - \pi(s)|$.

(9) Eine Katze und eine Maus begeben sich unabhängig auf einen Random Walk auf einem gemeinsamen ungerichteten Graphen, beide im gleichen Rhythmus. Wenn die Katze und die Maus auf einem Knoten zusammentreffen ist es um die Maus geschehen. Was kannst du über die Lebenserwartung der Maus sagen?