Übungsaufgaben

ALGEBRAISCHE UND PROBABILISTISCHE METHODEN IN DER DISKRETEN MATHEMATIK

Blatt 3 Last change **28. Juni 2022**

(1) Sei $\mathcal{H}$ ein aus n Hyperebenen im $\mathbb{R}^d$ bestehendes einfaches Hyperebenenarrangement, d.h. es gibt keinen Punkt der in mehr als d Hyperebenen enthalten ist. Sei Z die Anzahl der Volldimensionalen Zellen von $\mathcal{H}$. Zeige:

$$Z = \binom{n}{d} + \binom{n}{d-1} + \binom{n}{d-2} + \cdots + \binom{n}{0}$$

(2) Sei $\mathcal{A}$ ein Pseudogeradenarrangement mit n Pseudogeraden, wir setzen voraus, dass kein Punkt in allen Pseudogeraden enthalten ist. Wenn jede Pseudogerade an 2 Dreiecken des Arrangements beteiligt ist dann enthält $\mathcal{A}$ mindestens $\frac{2n}{3}$ Dreiecke enthält. Zeige mit einer Fallunterscheidung, dass $\mathcal{A}$ tatsächlich mindestens $\frac{2n}{3}$ Dreiecke enthält.

(3) Wie viele Dreiecke kann ein Pseudogeradenarrangement mit n Pseudogeraden maximal besitzen? Bestimme die richtige Größenordnung.

(4) Ein Pseudoparabelarrangement ist ein Arrangement das aus x-monotonen Kurven, die sich paarweise genau zwei mal schneiden, besteht. Wie viele einfache Pseudoparabelarrangements mit n Pseudoparabeln gibt es (asymptotisch)?

(5) Beweise die Eulerformel für projektive Geradenarrangements ($f_0 - f_1 + f_2 = 1$).

(6) Seien A und B die Ebenen $z = 1$ und $z = -1$ in $\mathbb{R}^3$. Interpretiere A als primale und B als duale Ebene. Die Dualität wird durch die kanonische Dualität zwischen Ursprungsgeraden und Ursprungsebenen im $\mathbb{R}^3$ vermittelt.

(a) Berechne die Abbildungen $p \to p^*$ und $\ell \to \ell^*$ von A nach B explizit.

(b) Identifiziere A und B auf natürliche Weise, d.h. $(p_x, p_y, 1) \longleftrightarrow (p_x, p_y, -1)$ und bestimme so die Menge $C = \{p : p \in p^*\}$.

(c) Interpretiere die Dualität aus diesem Beispiel geometrisch.

(7) Sei P eine Punktmenge in konvexer Lage. Wie sieht P^* aus?