Übungsaufgaben

Algebraische und Probabilistische Methoden in der Diskreten Mathematik

---

Blatt 2 Last change **31. Mai 2022**

(1) Show that 2-connectedness is in fact not necessary for a planar bipartite graph to admit a Kasteleyn signature.

(2) How many trees on n vertices admit a perfect matching? (You may think about different models of trees.)

(3) Show that the 4-dimensional cube has 272 perfect matchings and discuss methods to obtain this result.

(4) Sei A eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen $\in \{0, 1\}$ und alle Zeilen- und Spaltensummen $= 2$. Zeige, dass

$$2 \leq \operatorname{per}(A) \leq 2^{\frac{n}{2}} \qquad (\approx 1.41^n)$$

gilt. Bemerkung: Die van der Waerden Vermutung kann hier angewendet werden, da $\frac{1}{2}A$ doppelt stochastisch ist. Sie liefert hier aber lediglich die untere Schranke: $\operatorname{per}(A) = 2^n \cdot \operatorname{per}(\frac{1}{2}A) \geq 2^n \cdot \frac{n!}{n^n} \approx \left(\frac{2}{e}\right)^n \approx 0.735^n < 1$.

(5) Eine Infektion breitet sich auf den Feldern eines $n \times n$ Schachbretts aus, indem ein Feld infiziert wird, falls es mindestens zwei (von maximal vier) infizierte Nachbarn hat. Zeige: Nur Anfangsinfektionen mit $\geq n$ infizierten Feldern können zu einer Infektion aller Felders des Brettes führen.

(6) Wir untersuchen Tilings im Dreiecksgitter mit Romben, also zwei Dreiecken, die eine Gemeinsame Kante besitzen. Das Gebiet ist dabei ein Dreieck mit Seitenlänge n, das n Löcher aufweist. Die Löcher sind dabei stets Dreiecke, deren Grundseite mit der Grundseite des grossen Dreiecks übereinstimmt!

(a) Zeige, dass ein solches Tiling nur existieren kann, wenn in jedem Teildreieck der Seitenlänge k höchstens k Löcher vorhanden sind.

(b) Zeige, dass die in (a) genannte Notwendige Bedingung für die Existenz eines Tilings auch hinreichend ist.

(7) Die MacMahon Formel $M(r,s,t) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=1}^{t} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$ zählt die Tilings eines Sechsecks mit Seitenlänge r, s und t mit Romben.

(a) Sei $\Omega_{r,s,t}$ die Menge aller Tilings des Sechsecks mit Seitenlängen r, s und t. Seien $T, T' \in \Omega_{r,s,t}$ Tilings. Zeige, dass die Anzahl der Rhomben jeder der 3 Ausrichtungen in T und T' gleich ist.

(b) Die gewichtete MacMahon Formel ist $\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s} \frac{1-q^{i+j+t-1}}{1-q^{i+j-1}}$ Zeige, dass diese Formel für $q \to 1$ der MacMahon Formel entspricht.

(8) Sei A eine reelle schiefsymmetrische $n \times n$ Matrix, es gilt also $A^T = -A$.

(a) Zeige $\det(A) = 0$ wenn n ungerade ist.

Sei nun $n = 2k$. Das Signum $\mathrm{sgn}(m)$ eines Matching m der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist definiert, als (-1) hoch die Anzahl von Kreuzungen der Kanten, wenn das Matching als Menge von Bögen über dem horizontalen Pfad $1, 2, \ldots, n$ gezeichnet ist. Sei M die Menge der Matchings und

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{m \in M} \mathrm{sgn}(m) \cdot a_{m_{1,1}m_{1,2}} \cdot a_{m_{2,1}m_{2,2}} \cdots a_{m_{k,1}m_{k,2}}$$

die Pfaffsche Determinante (dabei ist $m_{i,1}m_{i,2}$ die i-te Matching-Kante von m). Für $k = 2$ und eine 4×4 Matrix $B = (b_{ij})$ gilt

$$\mathrm{Pf}(B) = 1 \cdot b_{1,2}b_{3,4} + (-1) \cdot b_{1,3}b_{2,4} + 1 \cdot b_{1,4}b_{2,3}$$

(b) Zeige $(\mathrm{Pf}(A))^2 = \det(A)$. *Hinweis:* Nutze die Überlagerung zweier Matchings und zeige, dass die Summer aller Permutationen die einen ungeraden Kreis enthalten, nichts zur Determinante beiträgt.

(9) Sei G ein planarer Graph mit $n = 2k$ Knoten. Zeige, dass es eine Orientierung G' von G gibt, so dass für die orientierte Adjazenzmatrix $A(G')$ mit Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E(G') \\ -1 & \text{falls } (j,i) \in E(G') \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt $|\mathrm{Pf}(A(G'))| = $ #Matchings von G (dabei ist $E(G')$ die Kantenmenge von G'). Zeige dazu -–analog zum Beweis der Existenz von Kasteleyn-Signaturen— dass das Vorzeichen des Beitrages von zwei beliebigen Matchings gleich sein muss und überlege dir, was dies für einen einzelnen Kreis bedeutet.

(10) Lies den kurzen Artikel von Doron Zeilberger und fülle die Lücken die mit den Übergängen *I leave it as a pleasant exercise to verify that ...* sowie *there is a natural bijection, easily constructed by the readers* gekennzeichnet sind.

- Doron Zeilberger, *Dodgson's determinant evaluation rule proved by two-timing men and women*, Electronic Journal of Combinatorics, 4 (1997) paper 22.

(11) Die Artikel J.H. Conway and S.M. Coxeter *Triangulated Polygons and Frieze patterns* 1973 enthalten viele interessante Beobachtungen und Aufgaben.

- Denke über einige der Aufgaben nach.
- Wie kann gezeigt werden, dass die erzeugenden Vektoren von Zahlenfriesen immer von Triangulierungen kommen?
- Bei C&C heißen die periodischen Fortsetzungen der erzeugenden Vektoren von Zahlenfriesen *quiddity cycles*. Was ist der Hintergrund dieser Namensgebung?