Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 07
PD Dr. Jörg Liesen - Dr. Michel Sortais 23. Juli 2007

Juli – Klausur
Lineare Algebra II

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich bin mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (Matrikel-Nr. und Punktzahl) im Internet einverstanden (wenn ja bitte unterschreiben, sonst nicht):

Unterschrift:....................................

Zur Klausur sind keine Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind keine Taschenrechner und Formelsammlungen erlaubt.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Benutzen Sie ein neues A4 Blatt für jede neue Aufgabe.

Die Bearbeitungszeit beträgt **zwei Stunden**.

Wer 23 der 45 möglichen Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 6 Punkte

Berechnen Sie die Jordan Normalform J von

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie dabei explizit eine invertierbare $P \in \mathbb{C}^{3,3}$ an, so dass $A = PJP^{-1}$.

2. Aufgabe 8 Punkte

Sei $n \geq 1$ und $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Haben A und B dasselbe charakteristische Polynom, so sind A und B ähnlich.

b) A und A^T besitzen dasselbe Minimalpolynom.

3. Aufgabe 7 Punkte

Geben Sie die allgemeine Lösung in $\mathbb{R}^4$ zum linearen System $\boldsymbol{y}'(t) = A \cdot \boldsymbol{y}(t)$ anhand von folgender Information: die Jordan Normalform von A ist

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

und für die Basisübergangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt $PJP^{-1} = A$.
Geben Sie auch die einzige Lösung $\boldsymbol{y}$ an, für die $\boldsymbol{y}(0) = [0, 1, 0, 0]^T$ gilt.

4. Aufgabe 8 Punkte

a) Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, so dass

$$A = \begin{bmatrix} 3 & (1+3i) & 0 \\ \alpha & 2 & (1-2i) \\ \beta & \gamma & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$$

eine normale Matrix ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: sei A eine quadratische reelle Matrix, dann gibt es normale Matrizen B und C, so dass $A = B + C$.

5. Aufgabe

8 Punkte

Wir erinnern daran, dass jede reelle quadratische Matrix A in folgender Form geschrieben werden kann:

$$A = QP, \qquad (1)$$

wobei Q orthogonal und P symmetrisch mit nichtnegativen Eigenwerten ist.

a) Sei P symmetrisch mit nichtnegativen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass das Approximationsproblem $\min\limits_{U \text{ orthogonal}} \|P - U\|_F$ durch $U = I$ gelöst wird.

b) Sei A reell und quadratisch. Zeigen Sie dass das Approximationsproblem $\min\limits_{U \text{ orthogonal}} \|A - U\|_F$ durch $U = Q$ mit Q wie in (1) gelöst wird.

6. Aufgabe

8 Punkte

Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

a) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für zwei Untervektorräume $U, W \subseteq V$ gilt $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

(Erinnerung: für U Untervektorraum von V definiert man $U^\perp = \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U, \quad \varphi(u) = 0\}$).

b) Ist V ein euklidischer Raum von endlicher Dimension und $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, so gilt:

(β ist symmetrisch) $\Longleftrightarrow$
(In jeder Basis von V ist die Darstellungsmatrix von β symmetrisch).

c) Ist V ein euklidischer Raum von endlicher Dimension und $F : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung, so gilt:

(F ist selbstadjungiert) $\Longleftrightarrow$
(Es gibt eine Basis von V, in der die Darstellungsmatrix von F symmetrisch ist).