WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Klausur Analysis II

16.02.2008

Name:
Vorname:

Matr.-Nr.:
Studiengang:

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (nur Matrikelnummer und Punktzahl) im Internet sowie am schwarzen Brett neben dem Raum MA 320 bin ich einverstanden:
Unterschrift (optional): ____________________

Geben Sie bei allen Antworten einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und beschriften Sie dieses mit Ihrem Namen sowie Ihrer Matrikelnummer.
Die Klausur ist mit 18 Punkten bestanden. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Schreiben Sie nicht mit Bleistift.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								
Korrektor								

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Sei $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik versehen. Geben Sie eine Menge in $\mathbb{R}^2$ an, die genau zwei Randpunkte besitzt.

(b) Sei I eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Man betrachte den Vektorraum aller Abbildungen $f : I \to \mathbb{R}$ (punktweise Operationen) und darauf die Abbildung

$$\|f\| := |f(x_0)| \in \mathbb{R}.$$

Unter welchen Bedingungen an I ist das eine Norm?

(c) Man finde alle komplexen Zahlen z mit $z^7 = 5$.

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert mit $f(x) = \exp(ix)$. (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f.

(b) Zeigen Sie, dass für f die Aussage des Mittelwertsatzes auf $[0, 2\pi]$ nicht gilt.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der uneigentlichen Integrale: (5 Punkte)

(a) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^3+x+1} dx$,

(b) $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+2}} dx$.

Aufgabe 4 Berechnen Sie folgende Integrale: (5 Punkte)

(a) $\int_0^1 3\exp(x)\sqrt{\exp(x)+1}dx$,

(b) $\int \ln(1+x^2)dx$.

Aufgabe 5 Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei äquivalente Normen auf einem Vektorraum E. Zeigen Sie: (4 Punkte)

(a) (x_n) ist eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_1 \iff (x_n)$ ist eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_2$,

(b) E ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_1 \iff E$ ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|_2$.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{3^k k^2} x^{2k+1}$ mittels der Definition. (3 Punkte)

Aufgabe 7 Es sei $\mathbb{R}^2$ mit der ℓ^2-Norm versehen und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) := (x(1-y), xy)$. Die Abbildung f ist stetig differenzierbar (dies muss nicht gezeigt werden.) (7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen mittels der Definition und die Jacobi-Matrix von f.

(b) Zeigen Sie: die Abbildung f bildet den Streifen $S = (0, \infty) \times (0, 1)$ diffeomorph auf den ersten Quadranten $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ ab.

WS 2008/09 | Technische Universität Berlin
Prof. Dr. John M. Sullivan | Fakultät II
Kerstin Günther | Institut für Mathematik

Lösungsskizze zur Klausur Analysis II

vom 16.02.2009

Aufgabe 1

(a) Menge, die aus 2 Punkten besteht, z.B. $\{(1,0),(0,0)\}$. (1 P.)

(b) Es gilt: $\|f\| = 0 \iff f(x_0) = 0$. Damit die Abbildung eine Norm ist, muss gelten $f(x) = 0$ für alle $x \in I$. Angenommen, es existiert ein $x_1 \in I$ mit $x_0 \neq x_1$. Dann betrachten wir die Funktion $f(x_j) = j$ mit $j \in \{0,1\}$. Es gilt dann $\|f\| = 0$ aber $f \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch. Deshalb $I = \{x_0\}$. (2 P.)
Für $f, g : I \to \mathbb{R}$ gilt: (1 P.)

$$\begin{aligned}
&f = 0 \implies \|f\| = 0,\\
&\|\lambda f\| = |\lambda f(x_0)| = |\lambda|\,|f(x_0)| = |\lambda|\,\|f\|\,,\\
&\|f+g\| = |(f+g)(x_0)| \le |f(x_0)| + |g(x_0)| = \|f\| + \|g\|\,.
\end{aligned}$$

(c) Sei $w := \exp(\frac{\log 5}{7}) = \sqrt[7]{5}$ und $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{7})$. Dann gilt $\omega^k = \exp(\frac{2\pi i k}{7})$, wobei $k = 0, 1, \ldots, 6$ (Notation: s. VL). (1 P.)
Insgesamt sind die Lösungen von $z^7 = 5$ also $z_k = w\omega^k = \sqrt[7]{5}\exp(\frac{2\pi i k}{7})$, wobei $k = 0, 1, \ldots, 6$. (1 P.)

Aufgabe 2

(a) Es gilt (2 P.)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(ix)^k}{k!}\right)'\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} i^k k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} i^k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = i \exp ix.
\end{aligned}$$

(Andere Lösungen sind auch möglich.)

(b) Nach der Aussage des Mittelwertsatzes müßte es ein $x \in (0, 2\pi)$ geben mit

$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = f'(x).$$

Wegen $|f'(x)| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 1 = \exp(2\pi i) = f(2\pi)$ kann es jedoch kein solches x geben. (4 P.)

Aufgabe 3

(a) Da $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2}{x^3+x+1}$ eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist, existiert $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+x+1} dx$. (1 P.)
Es gilt (1 P.)

$$\frac{x^2}{x^3+x+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{1}{3x}, \quad x \geq 1.$$

Da $\int_1^\infty \frac{1}{3x} dx = \infty$, existiert auch $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^3+x+1} dx$ nicht. (1 P.)

(b) Es gilt (1 P.)

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2}} = x^{-1,5}.$$

Wegen $\int_2^\infty x^{-1,5} dx = \sqrt{2}$ existiert $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+2}} dx$. (1 P.)

Aufgabe 4

(a) Es gilt mit der Substitutionsregel ($s(x) = \exp(x) + 1$) (2 P.)

$$\int_0^1 3\exp(x)\sqrt{\exp(x)+1} dx = \int_0^1 3s'(x)\sqrt{s(x)} dx = 3\int_{s(0)}^{s(1)} \sqrt{x} dx$$

$$= 3\left[\frac{2}{3}x^{1,5}\right]_2^{\exp(1)+1} = 2(\exp(1)+1)^{1,5} - 2^{2,5}.$$

(b) Mit partieller Integration erhalten wir (1 P.)

$$\int 1 \ln(1+x^2) dx = x\ln(1+x^2) - \int x \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Es gilt $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$ und $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$. (2 P.)
Damit

$$\int 1 \ln(1+x^2) dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x.$$

Aufgabe 5

(a) Noch Voraussetzung existiert $\lambda \geq 1$ mit $\|x\|_2 \leq \lambda \|x\|_1$ für alle $x \in E$. (1 P.)
Sei (x_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_1$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit (1 P.)

$$\|x_n - x_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Somit gilt

$$\|x_n - x_m\|_2 \leq \lambda \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0,$$

d.h. (x_n) ist eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_2$.
Die Rückrichtung funktioniert analog.

(b) Sei E vollständig bezüglich $\|\cdot\|_1$. Sei (x_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_2$. Nach (a) ist (x_n) eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_1$. Sei x der Grenzwert dieser Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_1$. Dann gilt (λ wie in (a))

$$\|x_n - x\|_2 \leq \lambda \|x_n - x\|_1 \longrightarrow 0.$$

Somit ist x der Grenzwert von (x_n) bezüglich $\|\cdot\|_2$.
Die Rückrichtung funktioniert analog. (2 P.)

Aufgabe 6 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k k^2} x^{2k+1}$ ist eine Potenzreihe der Form $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ mit (1 P.)

$$a_{2k} = 0, \qquad a_{2k+1} = \frac{1}{3^k k^2} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Wegen $\frac{2}{2k+1} \ln k \to 0$ für $n \to \infty$ (mit l'Hospital) gilt (1 P.)

$$\lim k^{\frac{2}{2k+1}} = \exp(\lim \frac{2}{2k+1} \ln k) = 1.$$

Wegen $3^{\frac{k}{2k+1}} \to \sqrt{3}$ für $n \to \infty$ gilt (1 P.)

$$\limsup \sqrt[j]{|a_j|} = \limsup \sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = \lim \sqrt[2k+1]{\frac{1}{3^k k^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Damit ist $R = \sqrt{3}$.

Aufgabe 7

(a) Es gilt (2 P.)

$$\partial_1 f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(t(1-y), ty)}{t} = (1-y, y),$$

$$\partial_2 f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(-tx, tx)}{t} = (-x, x),$$

$$Jf = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x \end{pmatrix}.$$

(b) Für $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, 1)$ gilt: $x(1 - y) \in (0, \infty)$ und $xy \in (0, \infty)$, d.h. $f((0, \infty) \times (0, 1)) \subseteq (0, \infty) \times (0, \infty)$. (1 P.)
f ist surjektiv: Seien $x, y \in (0, \infty)$. Dann gilt $f(x + y, \frac{y}{x+y}) = (x, y)$. (1 P.)
f ist injektiv: Seien $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in (0, \infty) \times (0, 1)$ mit $f(x, y) = f(\tilde{x}, \tilde{y})$. Dann $x(1 - y) = \tilde{x}(1 - \tilde{y})$ und $xy = \tilde{x}\tilde{y}$. Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man $x = \tilde{x}$. Damit $y = \tilde{y}$. (1 P.)
Die Umkehrabbildung f^{-1} ist (s. Surjektivität)

$$(x, y) \mapsto (x + y, \frac{y}{x + y}).$$

Diese Abbildung ist stetig: Sei $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ in $(0, \infty) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann konvergieren die Komponenten, d.h. $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$. Wegen

$$x_n + y_n \longrightarrow x + y, \qquad \frac{y_n}{x_n + y_n} \longrightarrow \frac{y}{x + y}$$

sind die Komponentenfunktionen ${f^{-1}}_1$ und ${f^{-1}}_2$ stetig. Somit ist f^{-1} stetig. (1 P.)
$D_p f$ ist invertierbar für jedes $p \in (0, \infty) \times (0, 1)$: Wegen

$$\det Jf = \det \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ y & x \end{pmatrix} = x \neq 0$$

ist Jf invertierbar und daher ist $D_p f$ invertierbar für jedes $p \in (0, \infty) \times (0, 1)$. (1 P.)
Somit ist f ein Diffeomorphismus (nach Lemma E8.13 aus der Vorlesung).