Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Etienne Emmrich

Juni 2007

Übungsblatt 5 zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

Abgabe bis 20.07.07

Aufgabe 5.1

a) Beweise für ein Parallelogrammgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ die Poincarésche Ungleichung

$$\|u\|_{0,2} \le c \left(|u|_{1,2}^2 + \left(\int_\Omega u \, dx \right)^2 \right)^{1/2} \qquad \forall u \in H^1(\Omega) \, .$$

(Hinweis: Transformation auf das Einheitsquadrat.)

b) Beweise mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung aus Teil a) den folgenden Spezialfall des Lemmas von Bramble-Hilbert: Sei $F \in \big(H^2(\Omega)\big)^*$ mit $F(q) = 0$ für alle $q \in \mathcal{P}^1(\Omega)$. Dann gibt es ein $c = c(\Omega, F) > 0$, so daß für alle $v \in H^2(\Omega)$

$$|F(v)| \le c \, |v|_{2,2}$$

gilt.

Aufgabe 5.2

Vorgelegt sei das Tripel (T, P_T, Σ_T), wobei T ein Rechteck, $P_T = \mathcal{Q}^1(T)$ und $\Sigma_T = \{\Phi_{i,T} : i = 1, 2, 3, 4\}$ mit

$$\Phi_{i,T}(v) := v(\text{Mittelpunkt der } i\text{-ten Seite von } T) \, , \quad i = 1, 2, 3, 4 \, ,$$

seien. Zeige, daß Σ_T bezüglich P_T *nicht* unisolvent (und mithin (T, P_T, Σ_T) kein finites Element) ist.

Aufgabe 5.3

Es sei (T, P_T, Σ_T) das sogenannte Bogner-Fox-Schmit-Element. Dabei ist T ein Rechteck, $P_T = \mathcal{Q}^3(T)$ und Σ_T bestehe aus den Funktionalen, die die Auswertung

- der Funktion,
- der beiden ersten Ableitungen,
- der gemischten zweiten Ableitungen

jeweils in den vier Ecken von T besorgen. Bestimme die Dimension von P_T, zeige, daß Σ_T bezüglich P_T unisolvent ist, und bestimme die lokale Basis.
(Hinweis: Betrachte das Einheitsquadrat und konstruiere die Basisfunktionen als Tensorprodukt, d. h. $\phi_{ij,T}(x, y) = p_i(x) \cdot q_j(y)$.)