Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Etienne Emmrich

Juni 2007

Übungsblatt 4 zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

Abgabe bis 06.07.07

Aufgabe 4.1

Stelle für das homogene Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung auf einem selbst gewählten, konvexen, polygonal berandeten Gebiet (ungleich einem Rechteck) die Finite-Elemente-Approximation (mit mindestens 4 inneren Knoten) unter Verwendung von Courant-Elementen auf und verwende dabei, daß die Courant-Elemente eine affin-äquivalente Familie bilden. Welche Fehleraussagen gelten unter welchen Voraussetzungen? Berechne für eine selbst gewählte rechte Seite die Näherungslösung und vergleiche diese mit der exakten Lösung (in einer dem Problem angepaßten Norm). (Hinweis: Exakte Lösung vorgeben und daraus die rechte Seite berechnen.)

Aufgabe 4.2

Sei $\mathfrak{T}_h$ eine zulässige Dreieckszerlegung aus einer quasiuniformen Familie von Zerlegungen eines polygonal berandeten Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und sei S_h der zugehörige Raum der Courant-Elemente. Beweise die inverse Ungleichung

$$\|v_h\|_{0,\infty} \leq ch^{-1} \|v_h\|_{0,2} \qquad \forall v_h \in S_h \, ,$$

wobei $c > 0$ eine nur von der Familie und nicht von $\mathfrak{T}_h$ abhängige Konstante ist. (Hinweis: Verwende im Beweis eine geeignete Kubaturformel.)

Aufgabe 4.3

Konstruiere eine biquadratische Abbildung des Einheitsquadrats $(0,1)^2$ in die Einheitskreisscheibe, so daß die Ecken und Seitenmittelpunkte des Quadrats in äquidistant auf der Peripherie des Kreises verteilte Punkte übergehen, wobei die Forderung $(1, \frac{1}{2}) \mapsto (1,0)$ bestehe und ferner der Mittelpunkt des Quadrats in den Mittelpunkt des Kreises abgebildet werde.