Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Etienne Emmrich

27. Mai 2007

Übungsblatt 3 zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

Abgabe bis 22.06.07

Aufgabe 3.1

Vorgelegt sei die (nicht notwendig äquidistante) Zerlegung

$$\mathfrak{Z} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\,.$$

Es sei V_h die lineare Hülle der auf $\mathfrak{Z}$ definierten linearen Hutfunktionen. Beweise die folgenden *inversen Ungleichungen*: Es gibt eine von $\mathfrak{Z}$ unabhängige Konstante $c > 0$, so daß für alle $v_h \in V_h$

$$\begin{array}{lll} (i) & \|v_h\|_{0,\infty} & \le c\, h_{\min}^{-1/2}\ \|v_h\|_{0,2}\,, \\ (ii) & \|v_h'\|_{0,\infty} & \le c\, h_{\min}^{-3/2}\ \|v_h\|_{0,2}\,, \\ (iii) & |v_h|_{1,2} & \le c\, h_{\min}^{-1}\ \|v_h\|_{0,2} \end{array}$$

gilt, wobei $h_{\min} := \min_{i=1,\dots,N}(x_i - x_{i-1})$. Warum heißen diese Abschätzungen *inverse* Ungleichungen?

Aufgabe 3.2

Vorgelegt sei das Randwertproblem

$$-(au')' = 0 \quad \text{in } (0,1)\,, \quad u(0) = 1\,,\ u(1) = 0\,,$$

mit einem stückweise konstanten Koeffizienten

$$a(x) := \begin{cases} \kappa\alpha\,, & \text{für } x \in (0,\xi)\,, \\ \alpha\,, & \text{für } x \in (\xi,1)\,, \end{cases}$$

wobei $\alpha, \kappa \in \mathbb{R}^+$ und $\xi \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$.

a) Untersuche auf schwache Lösbarkeit und gib, falls möglich, alle schwachen Lösungen an.

b) Für glatte Koeffizienten a ist die Differentialgleichung offenbar äquivalent zu

$$-au'' - a'u' = 0\,,$$

so daß die Diskretisierung

$$-a_i\,\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2h}\,\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0$$

als möglich erscheint, wobei ein äquidistantes Gitter mit den Knoten $x_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, m+1$, $h = 1/(m+1)$) und $a_i := a(x_i)$, $u_i \approx u(x_i)$ verwendet werde. Diese Diskretisierung ist aber auch für den gegebenen Koeffizienten formal korrekt.

Begründe, warum die Diskretisierung als möglich erscheint und berechne die diskrete Lösung (u_i). Untersuche, unter welchen Bedingungen die Werte u_i für $h \to \infty$ gegen $u(x_i)$ konvergieren.

Aufgabe 3.3

Sei Ω die Einheitskreisscheibe und $\partial\Omega$ deren Rand. Dann ist für jede Funktion $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ die Restriktion $u_{|\partial\Omega}$ wohldefiniert. Zeige, daß

$$\|u\|_{0,2,\partial\Omega} \leq \sqrt[4]{8}\,\|u\|_{1,2,\Omega}$$

gilt. Zeige ferner mit Hilfe eines Dichteschlusses, daß es einen linearen, beschränkten Operator $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ gibt mit der Eigenschaft, daß für alle $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\gamma_0 u := u_{|\partial\Omega}$$

gilt. Begründe die stetige Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$. Ist die Einbettung sogar kompakt?

Aufgabe 3.4

Sei T ein Dreieck und seien a_1, a_2, a_3 die Eckpunkte von T, a_{12}, a_{13}, a_{23} die Seitenmittelpunkte von T sowie a_{123} der Schwerpunkt von T.

a) Zeige, daß die Kubaturformel

$$\int_T v(x)\,dx \approx \frac{|T|}{3}\left(v(a_{12}) + v(a_{13}) + v(a_{23})\right)$$

Polynome zweiten Grades, nicht aber Polynome höheren Grades exakt integriert.

b) Zeige, daß $a_{123} = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$. Bestimme die Gewichte einer Kubaturformel mit den Aufpunkten $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{123}$ so, daß diese zumindest exakt ist für Polynome dritten Grades.

c) Von welcher Konsistenzordnung ist die Trapezregel

$$\int_T v(x)\,dx \approx \frac{|T|}{3}\left(v(a_1) + v(a_2) + v(a_3)\right)?$$

Konstruiere durch Extrapolation nach einmaliger Seitenhalbierung eine genauere Kubaturformel.