Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. Etienne Emmrich

27. Mai 2007

Übungsblatt 2 zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

Abgabe bis 08.06.07

Aufgabe 2.1

Vorgelegt sei das Randwertproblem

$$-u''(x) + u(x) = f(x)\,, \quad x \in (0, \ln 2)\,,\ u(0) = u(\ln 2) = 0\,.$$

Untersuche auf schwache Lösbarkeit und bestimme, wenn möglich, die Lösungen für $f(x) \equiv 1$ und $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Stelle das Galerkin-Verfahren mit den Räumen

$$V_m := \operatorname{span}\left\{x(\ln 2 - x), x^2(\ln 2 - x), \ldots, x^m(\ln 2 - x)\right\}\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,,$$

auf, bestimme für verschiedene m Näherungslösungen und vergleiche mit der exakten Lösung. Verwende sodann die Räume

$$V_m := \operatorname{span}\left\{\sin\frac{\pi x}{\ln 2}, \sin\frac{2\pi x}{\ln 2}, \ldots, \sin\frac{m\pi x}{\ln 2}\right\}\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,,$$

für das Galerkin-Verfahren.

Aufgabe 2.2

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$-u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) = f(x)\,, \quad x \in (a, b)\,, \quad u(a) = \alpha\,,\ u(b) = \beta\,.$$

Seien $c, d \in L^\infty(a, b)$ und $f \in L^2(a, b)$. Stelle die schwache Formulierung auf und gib Bedingungen für c, d an, so daß die eindeutige Lösbarkeit gesichert ist. Stelle unter Verwendung linearer finiter Elemente bei einer äquidistanten Zerlegung und unter Verwendung der Trapez-Regel die Gleichungen für die näherungsweise Berechnung der Lösung auf. Schreibe und teste (mit selbst gewählten Problemdaten) ein Computerprogramm (z. B. in Matlab) zur numerischen Lösung, welches neben der Trapez- auch die Simpson-Regel zuläßt.

Aufgabe 2.3

Wird in einen stark und gleichmäßig strömenden Fluß eine flüssige Verschmutzung eingeleitet, so treten zwei physikalische Effekte nebeneinander auf: Diffusion und Konvektion. Das einfachste mathematische Modell zur Beschreibung solcher Konvektions-Diffusions-Probleme ist das Randwertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + u'(x) &= 1\,, \quad x \in (0, 1)\,, \\ u(0) = u(1) &= 0\,, \end{aligned}$$

wobei ε ein sehr kleiner Parameter ($0 < \varepsilon \ll 1$) ist, wenn die Diffusion $-\varepsilon u''$ klein gegenüber der Konvektion u' ist.

Die numerische Lösung derartiger Probleme bereitet Schwierigkeiten, da sich in der exakten Lösung sogenannte Grenzschichten herausbilden (die Ableitungen werden sehr groß), die für $\varepsilon \to 0$ stark zunehmen.

a) Bestimme die exakte Lösung des Problems und veranschauliche diese für $\varepsilon = 0.1$ und $\varepsilon = 0.01$. Untersuche das Verhalten der Lösung für $\varepsilon \to 0$.

b) Für die numerische Lösung sei das Intervall $[0,1]$ durch ein *Shishkin-Gitter* zerlegt. Das ist eine stückweise äquidistante Zerlegung: Gegeben sei eine gerade Zahl $N \geq 4$. Das Intervall $[0,1]$ wird zunächst in die Intervalle $[0,\sigma]$ und $[\sigma,1]$ zerlegt, wobei

$$\sigma = \max\left\{\frac{1}{2},\, 1 - 2\varepsilon \ln N\right\} .$$

Anschließend werden die beiden Intervalle $[0,\sigma]$ und $[\sigma,1]$ in jeweils $N/2$ gleichgroße Teilintervalle zerlegt.

Skizziere für $N = 20$ und $\varepsilon = 0.1$ bzw. $\varepsilon = 0.01$ das Shishkin-Gitter und bestimme explizite die Stützstellen x_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, der Zerlegung.

Löse das Problem für $\varepsilon = 0.1$ bzw. $\varepsilon = 0.01$ numerisch mit linearen finiten Elementen auf dem Shishkin-Gitter und (bei gleichem N) auf einem äquidistanten Gitter und vergleiche die Lösungen.

c) Die exakte Lösung soll stückweise linear interpoliert werden. Welchen Vorteil hat das Shishkin-Gitter gegenüber einer einfachen äquidistanten Zerlegung?

d) Es bezeichne Iu die stückweise lineare Interpolation der exakten Lösung u zu den Stützstellen des Shishkin-Gitters. Man beweise die folgenden Abschätzungen:

Für $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, gilt

$$|u(x) - (Iu)(x)| \leq \mathit{const}\, \left(N^{-1} \ln N\right)^2 .$$

Ist $x \in [0,\sigma]$, dann gilt sogar

$$|u(x) - (Iu)(x)| \leq \mathit{const}\, N^{-2} .$$

Warum handelt es sich bei der zweiten um eine bessere Abschätzung?

Hinweise: Es ist eine Fallunterscheidung erforderlich für die Fälle $\sigma = 1/2$ und $\sigma > 1/2$ (der praktisch relevante Fall) sowie $x \in [0,\sigma]$ und $x \in [\sigma,1]$.

Für den Beweis der verbesserten Abschätzung in $[0,\sigma]$ ist von der expliziten Darstellung von Iu auszugehen und der Fehler $u(x) - (Iu)(x)$ direkt zu berechnen und geeignet abzuschätzen, ohne auf Ableitungen zurückzugreifen.

Es sei bemerkt, daß für die FEM-Lösung u_N auf dem Shishkin-Gitter die in ε gleichmäßige Fehlerabschätzung

$$\|u - u_N\|_\varepsilon \leq \mathit{const}\, N^{-1} \ln N$$

gezeigt werden kann, wobei $\|\cdot\|_\varepsilon$ die durch $\|v\|_\varepsilon^2 := \varepsilon\, |v|_{1,2}^2 + \|v\|_{0,2}^2$ definierte gewichtete Norm ist.