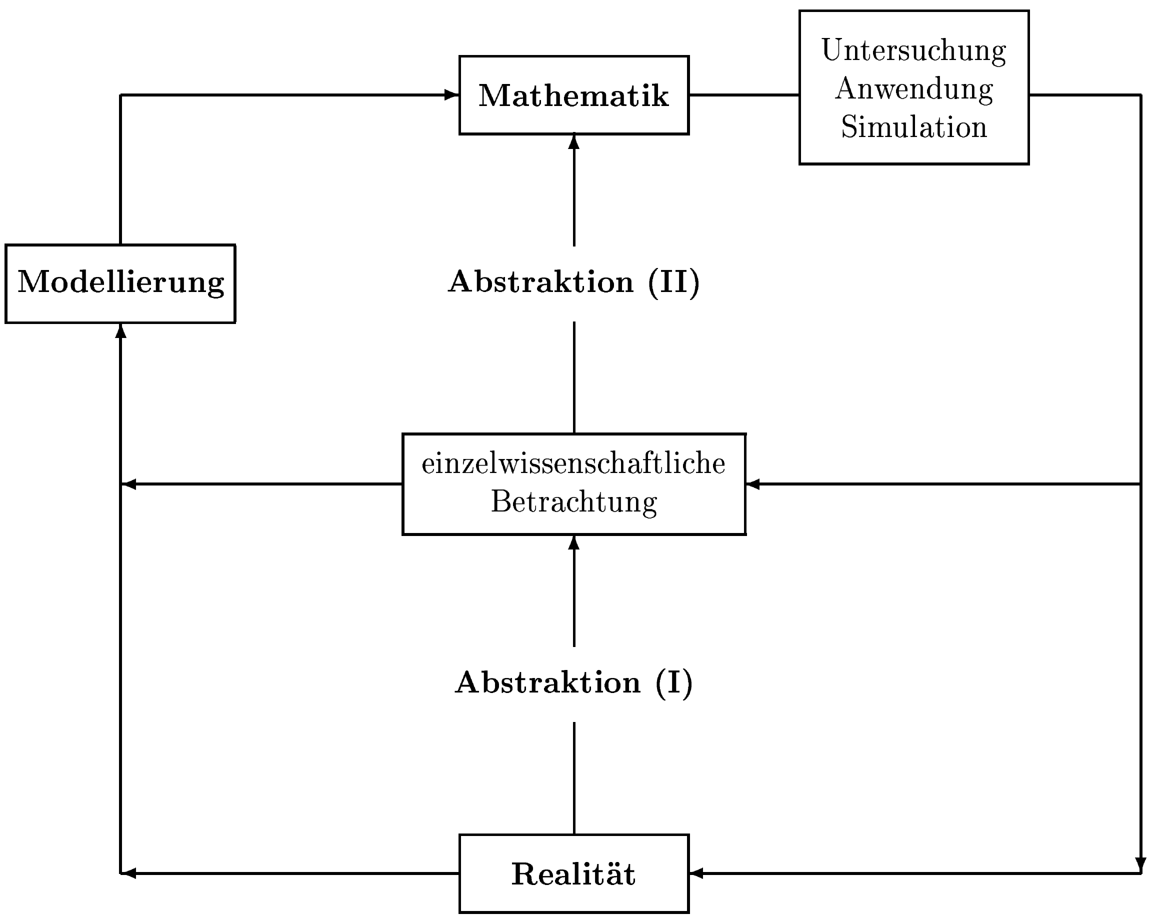
Infoblatt # 1

Mathematisierung

Mathematik entstand als Wissenschaft ungefähr 600 v. u. Z. Zuvor bestand sie im wesentlichen aus Rechnen und geometrischen Grundkenntnissen. Sie ist weder Natur- noch Geisteswissenschaft, sondern vielmehr – vom Gegenstand der Untersuchung her – *Strukturwissenschaft*, wie C. F. von Weizsäcker schreibt.

B. W. Gnedenko: ,,Mathematik hat sich im Laufe der Zeit von einer Berechnungs- zur Untersuchungsmethode gewandelt." Doch ist Mathematik heute noch immer Untersuchungsmethode oder hat sie sich nicht vielmehr zu einer *Technologie* entwickelt?



angewandte *vs.* reine Mathematik

J. Dieudonné: ,,Mathematik hat keinerlei utilitaristisches Ziel."

Aber: *Mathematik ist einheitlich!*

Gleichwohl gibt es äußere und innere Triebkräfte. Weder ist Mathematik nur Sprache oder Hilfsmittel anderer Wissenschaften noch ist sie bloßer intellektueller Luxus.

Typische Fehler bei der mathematischen Problemlösung sind: Modellfehler auf Grund der Abstraktion, Fehler auf Grund einer nur näherungsweisen Lösung, Daten- oder Meß- sowie Rechenfehler.

Infoblatt # 2

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten Funktionen, deren unabhängige Variable t ist.
In vielen Anwendungen ist t eine Zeitvariable.

Beispiele:

- $S(t) = \sin t$.
- $E(t) = e^{-3t}$.
- $F(t) = \tanh(\alpha t)$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben ist und $\tanh t := \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

$\dot{F}$ bezeichnet die Ableitung einer Funktion F, die von t abhängt.

Beispiele:

- $S(t) = \sin t, \quad \dot{S}(t) = \cos t$.
- $E(t) = e^{-3t}, \ \dot{E}(t) = -3e^{-3t}$.
- $F(t) = \tanh(\alpha t), \quad \dot{F}(t) = \dfrac{\alpha}{\cosh^2(\alpha t)}$ wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben ist und $\cosh t := \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gleichung, in der neben einer Funktion F auch deren Ableitung $\dot{F}$ auftritt.

Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung besteht aus mehreren gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Beispiele:

- Die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{E} + 3E = 0$ hat die Lösungen $E(t) = ce^{-3t}$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.
- Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = C \\ \dot{C} = -S \end{array} \right\}$ hat die Lösungen $\left\{ \begin{array}{l} S(t) = a \sin t + b \cos t \\ C(t) = -b \sin t + a \cos t \end{array} \right\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

Infoblatt # 3

Autonome Differentialgleichungen

Dabei handelt es sich um gewöhnliche Differentialgleichungen von der Art

$$\dot{F} = \varphi(F),$$

wobei φ eine gegebene Funktion ist.

Beispiele:

- $\dot{F} = F, \ \varphi(F) = F.$
- $\dot{F} = e^F, \ \varphi(F) = e^F.$
- $\dot{F} = 1 - F + \alpha F^2, \ \varphi(F) = 1 - F + \alpha F^2.$

Lösungsverfahren, an Hand der Beispiele $\dot{F} = e^{-F}$ und $\dot{F} = F^2$.

1. $\dfrac{d\,F}{d\,t} = e^{-F}.$
2. $d\,F = e^{-F}\,d\,t$, also $e^F\,dF = d\,t.$
3. $\displaystyle\int e^F\,dF = \int d\,t.$
4. $e^F = t + c$, also $F(t) = \ln(t + c)$ für $t > -c$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

1. $\dfrac{d\,F}{d\,t} = F^2.$
2. $\dfrac{d\,F}{F^2} = d\,t.$
3. $\displaystyle\int \frac{d\,F}{F^2} = \int d\,t.$
4. $-\dfrac{1}{F} = t + c$, also $F(t) = -\dfrac{1}{t + c}$ für $t \neq -c$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.
   Weitere Lösung: die konstante Funktion 0, da 0 eine Nullstelle von $\varphi(F) = F^2$ ist.

Infoblatt # 4

Programmieren mit MATLAB

MATLAB (Matrix Laboratory) ist ein Programmpaket von The Math Works, Inc., welches die numerische Lösung nicht nur mathematischer Testaufgaben sondern großer Anwendungsprobleme erlaubt. Neuerdings ist auch das symbolische Rechnen möglich.

In MATLAB kann interaktiv gearbeitet werden oder aber alle Befehle werden in einem File, welches auf `.m` endet, abgespeichert und dann übersetzt.

Beispiele:

`<...>% matlab-13`	Programmstart für Release 13 (evtl. nur `matlab`)
`>>more on`	Text wird nur seitenweise ausgegeben
`>>help`	Online-Hilfe
`>>2*6`	gibt das Ergebnis 12
`>>a=3;`	weist a den Wert 3 zu
`>>b=a+2;`	weist b den Wert $a + 3$, also 5 zu
`>>b`	gibt den Wert von b aus
`>>A=[1 0;0 1];`	weist A die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^2$ zu
`>>y=[2;3];`	weist y den entsprechenden Spaltenvektor zu
`>>x=A\b`	weist x die Lösung von $Ax = y$ zu und gibt diese aus
`>>fplot('sin(x)',[0 2*pi])`	zeichnet die Sinus-Funktion im Intervall $[0, 2\pi]$
`>>u=[1:0.5:10];`	weist u den Zeilenvektor $(1, 1.5, \ldots, 10)$ zu
`>>u(5)`	gibt die 5. Komponente von u aus
	Achtung: In MATLAB *beginnen Indizes bei 1!*
`>>v=u.*u;`	weist v den Vektor $(1, 2.25, 4, \ldots, 100)$ zu
`>>plot(u,v)`	zeichnet den Polygonzug durch die Punkte (u_i, v_i)
`>>hold on`	hält das aktuelle Bild an
`>>plot(u,v,'or')`	zeichnet kleine rote Kreise um die Punkte (u_i, v_i)
`>>f=inline('2*z1^2+z2^2','z1','z2')`	definiert die Funktion $f(z_1, z_2) = 2z_1^2 + z_2^2$
`>>f(1,1)`	gibt den Wert $f(1, 1) = 3$ aus
`>>ezsurf(f)`	zeichnet die Funktion $f = f(z_1, z_2)$
`>>help ode45`	ruft die Hilfe-Seiten für den Befehl `ode45` auf
`>>clear all`	löscht alle Variablen
`>>close all`	schließt alle Bilder

Infoblatt # 5

Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen

Sind nicht alle möglichen Lösungen einer Differentialgleichung (DGL) gesucht, sondern nur solche, die für $t = 0$ einer gewissen Bedingung genügen, so spricht man von einem **Anfangswertproblem (AWP)**.

Beispiel: Gesucht sind alle Funktionen $\left\{ \begin{array}{l} S = S(t) \\ C = C(t) \end{array} \right\}$, die dem System gewöhnlicher DGL $\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = C \\ \dot{C} = -S \end{array} \right\}$ und den Anfangsbedingungen $\left\{ \begin{array}{l} S(0) = 1 \\ C(0) = 2 \end{array} \right\}$ genügen. Da mit $\left\{ \begin{array}{l} S(t) = a \sin t + b \cos t \\ C(t) = -b \sin t + a \cos t \end{array} \right\}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ alle Lösungen des DGL-Systems gegeben sind, folgt wegen der Anfangsbedingungen $\left\{ \begin{array}{l} S(0) = b \stackrel{!}{=} 1 \\ C(0) = a \stackrel{!}{=} 2 \end{array} \right\}$, und die Lösung des AWP lautet $\left\{ \begin{array}{l} S(t) = 2 \sin t + \cos t \\ C(t) = -\sin t + 2 \cos t \end{array} \right\}$.

In MATLAB sind verschiedene Verfahren zur numerischen Lösung implementiert.

Das DGL-System muß in einem extra `m`-File definiert werden:

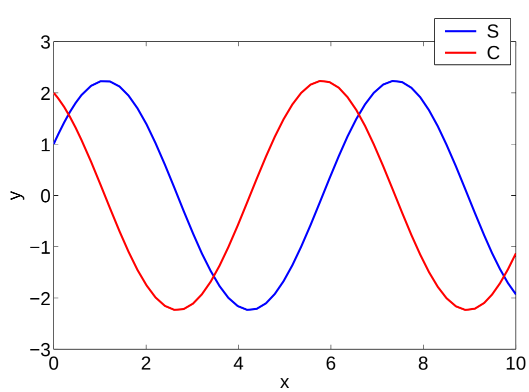
Beispiel: File `syst.m`

```
function upunkt = syst(t,u)
%%
a = u(2) ; b = - u(1) ;
upunkt=[a b]';
```

Eine Näherungslösung bekommen wir z. B. mit dem Befehl `ode45`:

Beispiel: File `awp.m`

```
clear all; close all
TT = [0 10] ;                         %% Zeitintervall
u0 = [1 2] ;                          %% Anfangsbedingungen
[T,U] = ode45('syst',TT,u0) ;         %% numerische L"osung
S = U(:,1) ; C = U(:,2) ;
plot(T,S,'b',T,C,'r')                 %% Ausgabe (blau und rot)
```



Infoblatt # 6

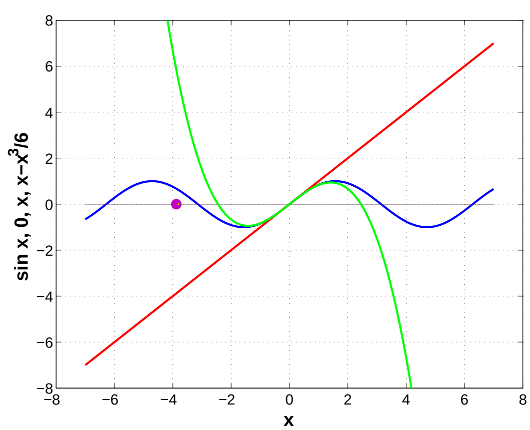
Taylorpolynome

Bei der Untersuchung von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist es oft hilfreich, den ungefähren Funktionsverlauf durch einfachere Funktionen – z. B. durch Polynome – zu beschreiben. Der Funktionsverlauf einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f = f(x)$ wird z. B. in der Nähe von $x = 0$ durch Taylorpolynome angenähert.
Die Zuverlässigkeit dieser ungefähren Beschreibung ist üblicherweise auf kleine Bereiche beschränkt.

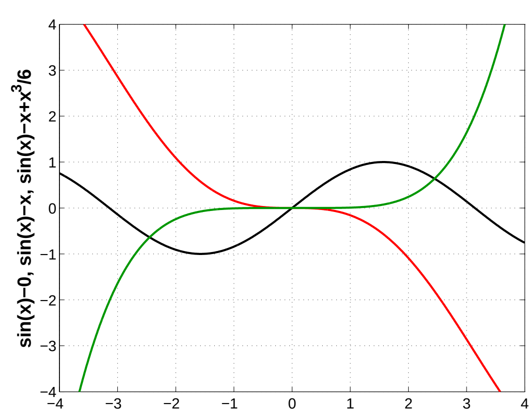
$$\begin{array}{lll}
f(x) \approx f(0) & .. \text{ Taylorpolynom 0. Grades,} & x \approx 0 \\
f(x) \approx f(0) + f'(0)x & .. \text{ Taylorpolynom 1. Grades,} & x \approx 0 \\
f(x) \approx f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 & .. \text{ Taylorpolynom 2. Grades,} & x \approx 0 \\
f(x) \approx f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + f'''(0)x^3/6 & .. \text{ Taylorpolynom 3. Grades,} & x \approx 0 \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Beispiel: $f(x) = \sin x$.

$$\begin{array}{lll}
\sin x \approx 0 & .. \text{ Taylorpolynom 0. Grades,} & x \approx 0 \\
\sin x \approx x & .. \text{ Taylorpolynom 1. Grades,} & x \approx 0 \\
\sin x \approx x & .. \text{ Taylorpolynom 2. Grades,} & x \approx 0 \\
\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6} & .. \text{ Taylorpolynom 3. Grades,} & x \approx 0 \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$



Funktion und Taylorpolynome



Fehler = Funktion − Taylorpolynom

Infoblatt # 7

Parameteridentifikation und Fehlerquadratmethode

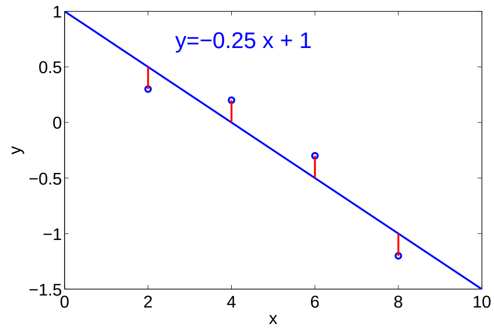
Oft soll aus gegebenen Meßwerten ein *funktionaler Zusammenhang* bestimmt werden.

Beispiel:

An Stellen x_i werden Meßwerte y_i bestimmt:

x_i	y_i
2	0.3
4	0.2
6	-0.3
8	-1.2

Gesucht ist ein linearer Zusammenhang $y = ax + b$, so daß die Fehler $y(x_i) - y_i$ möglichst klein sind.



Lösungsverfahren nach C. F. Gauß: Die Parameter a, b werden so bestimmt, als daß die Summe der Fehlerquadrate

$$\mathcal{F}(a,b) := \sum_{i=1}^{4} (y(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} (ax_i + b - y_i)^2$$

minimal wird. Dabei ist $\mathcal{F}$ eine in a, b quadratische Funktion. Für

$$\mathcal{F}(a,b) \to \min !$$

ist deshalb notwendig und hinreichend, daß a, b Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{4} (ax_i + b - y_i)\, x_i = 0\,, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{4} (ax_i + b - y_i) = 0$$

ist. Für unser Beispiel folgt $a = -0.25$ und $b = 1$.

Selbstverständlich können zu einer Meßstelle x_i auch verschiedene Meßwerte aufgenommen werden. Soll ein polynomialer Zusammenhang $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ bestimmt werden und gibt es m Meßstellen x_i, so muß $p + 1 \leq m$ gelten. Die Aufgabe führt dann zu einem linearen Gleichungssystem für $a_0, \ldots, a_p$, welches eindeutig lösbar ist.

Soll dagegen ein Zusammenhang $y = f(x)$ bestimmt werden, in dem die Parameter $a_0, a_1, \ldots$ nichtlinear auftreten, so sind eine nichquadratische Optimierungsaufgabe und folglich ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen.

Dafür steht in MATLAB der Befehl `lsqcurvefit` bereit.

Quellen im Internet

- Weltgesundheitsorganisation WHO
  `http://www.who.int`
- Informationen der WHO zu SARS
  `http://www.who.int/csr/sars/en/`
- WHO: Cumulative Number of Reported Probable Cases of SARS
  `http://www.who.int/csr/sars/country/en/`
- freie Dokumentation zu SARS (medizinisches Lehrbuch)
  `http://sarsreference.com/`
- New England Journal of Medicine (Volltext z. T. frei zugänglich)
  `http://contents.nejm.org`
- The Lancet (medizinisches Journal mit vielen frei zugänglichen Artikeln)
  `http://www.thelancet.com`