Tutorium 7

Wiederholung

- rot: VF $\longrightarrow$ VF (23)
- div: VF $\longrightarrow$ SF
- grad: SF $\longrightarrow$ VF

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\operatorname{grad}_{\vec{x}} f$ VF im Argument $\vec{x}$

Argument

- Δ : SF $\longrightarrow$ SF

$$\Delta(u) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

A1 a.) $\underbrace{\operatorname{rot}\Big(\underbrace{\operatorname{div}\big(\underbrace{\vec{w} - u \cdot \vec{v}}_{\text{VF}}\big)}_{\text{SF}}\Big)}$

nicht definiert, da $\operatorname{div}(\vec{w} - u \cdot \vec{v})$ ein SF und kein VF ist.

$u(x,y,z) = xyz$

$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ xz \end{pmatrix}$

$\vec{\omega}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ x-y_z \end{pmatrix}$

b.) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta(u) = \frac{\partial^2(x \cdot y \cdot z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial y^2} + \dots = 0$ skalares 0-Feld!

c.) $\underbrace{\operatorname{div}\underbrace{\operatorname{div}\big(\underbrace{u \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{VF}}\big)}_{\text{SF}}}$ ... nicht definiert, da $\operatorname{div}(u \cdot \vec{\omega} \times \vec{v})$ ein SF und kein VF ist.

d.) $\operatorname{grad}(\Delta(u)) \overset{b)}{=} \operatorname{grad}(0) = \vec{0}$ vektorielle 0-Feld, vgl. b.)

$\boxed{A2}$ $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 3x^2-3y^2+6xz \\ -6xy \\ 3x^2-3z^2 \end{pmatrix}$$

konvex?

Potential (Wiederholung)

$\vec{v}$ sei ein VF.
Ein SF u heißt Potential von $\vec{v}$, falls
$$\text{grad}(u) = -\vec{v}.$$

Satz:

- Hat $\vec{v}$ Potential $\Rightarrow \text{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$
- Gilt $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ + ist G offene und konvexe Teilmenge vom Def-Ber. von $\vec{v}$, dann hat $\vec{v}$ ein Potential.

Da der Def'bereich von $\vec{v}$ konvex ist, besitzt ein Potential gdw. $\boxed{\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}}$ zu zeigen!

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 6x-6x \\ -6y-(-6y) \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \text{ hat ein Potential!}$$

gesucht: SF $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit:

$$(*) \qquad \text{grad}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \overset{!}{=} -\vec{v} = + \begin{pmatrix} -3x^2+3y^2-6xz \\ +6xy \\ -3x^2+3z^2 \end{pmatrix}$$

Aus erster Zeile von $\boxed{(*)}$

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = -3x^2 + 3y^2 - 6xz$$

$$\overset{\text{aufleiten nach } x}{\Longrightarrow} \quad u(x,y,z) = -x^3 + 3xy^2 - 3x^2 + h(y,z)$$

Aus zweites von $\boxed{(*)}$: $\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + \boxed{\frac{h(y,z)}{\partial y}}$

OK

muss 0 rauskommen

$h(y,z) = h(z)$

Aus dritter Zeile von $(*)$: $\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} = -3x^2 + \boxed{\frac{\partial h(z)}{\partial z}} \overset{!}{=} 3z^2$

$\Rightarrow h(z) = z^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Ein Potential von $\vec{v}$ ist gegeben durch

$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto -x^3 + 3xy^2 - 3x^2z + z^3 + C,$$

$C \in \mathbb{R}$ konst.

check: $\mathrm{grad}(u) = -\vec{v}$?

A3 ~~geg~~:

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 2x stetig diffbar

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \ln\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

a.) zz: $\Delta f = 0$

$$\mathrm{grad}_{(x,y)} f = -\frac{1}{2\pi \cdot (x^2+y^2)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

NR

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot 2x$$
$$= \frac{x}{(x^2+y^2)}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} - \left(+ x \cdot \frac{1}{2\pi(x^2+y^2)} \right)$$

$$\overset{PR}{=} - \left(1 \cdot \frac{1 \cdot (x^2+y^2)}{2\pi(x^2+y^2)^2} - x \cdot \frac{2x}{2\pi(x^2+y^2)^2} \right)$$

analog: $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - \left(1 \cdot \frac{1 \, (x^2+y^2)}{2\pi(x^2+y^2)^2} - y \cdot \frac{2y}{2\pi(x^2+y^2)^2} \right)$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - \frac{(x^2+y^2-2x^2+x^2+y^2-2y^2)}{2\pi(x^2+y^2)^2} = 0$$

b.) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \Delta \vec{F}$

linke Seite: $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F}$:

$\boxed{F^i_x := \frac{\partial F_i}{\partial x}}$ Notation

$F^i_{xy} = \frac{\partial F_i}{\partial x \partial y}$

$$\operatorname{rot} \vec{F} \overset{Def.}{=} \begin{pmatrix} F^3_y - F^2_z \\ F^1_z - F^3_x \\ F^2_x - F^1_y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} (F^2_{yx} - F^1_{yy}) - (F^1_{zz} - F^3_{zx}) \\ F^3_{zy} - F^2_{zz} - F^2_{xx} + F^1_{xy} \\ F^1_{xz} - F^3_{xx} - F^3_{yy} + F^2_{yz} \end{pmatrix}$$

rechte Seite:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} = \begin{pmatrix} F^1_{xx} + F^2_{xy} + F^3_{xz} \\ F^1_{yx} + F^2_{yy} + F^3_{yz} \\ F^1_{zx} + F^2_{zy} + F^3_{zz} \end{pmatrix}$$

komponentenweise $\Delta \vec{F} = \begin{pmatrix} F^1_{xx} + F^1_{yy} + F^1_{zz} \\ F^2_{xx} + F^2_{yy} + F^2_{zz} \\ F^3_{xx} + F^3_{yy} + F^3_{zz} \end{pmatrix}$

insgesamt:

$$\text{rot}\ \text{rot}\ \vec{F} = \text{grad}\ \text{div}\ \vec{F} - \Delta \vec{F}$$

Satz von Schwarz

erste Zeile

$$F^2_{yx} - F^1_{yy} - F^1_{zz} + F^3_{zx} = \left(\cancel{F^1_{xx}} + F^2_{xy} + F^3_{xz}\right) - \cancel{F^1_{xx}} - F^1_{yy} - F^1_{zz}$$

grad div

Satz von Schwarz

$\boxed{A4}$ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x>0,\ y>0,\ z>0\}$

konvex und offen

$$\vec{v} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} z^2 + \sin(x) \\ (x+y)^{\frac{2}{3}} \\ \boxed{g(x,y,z)} \end{pmatrix}$$

Wiederholung: Vektorpotential

VF $\vec{v}$ hat VP $\vec{w}$, falls $\text{rot}(\vec{w}) = \vec{v}$.

Satz: $\vec{v}$ hat VP $\Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$

$\text{div}(\vec{v}) = 0$ + Def-Ber von $\vec{v}$ konvex

$\Rightarrow \vec{v}$ hat VP.

a.) Wie muss $g(x,y,z)$ gewählt werden, damit $\vec{v}$ ein VP hat?

nach Satz: $\vec{r}$ hat VP $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div}(\vec{r}) = 0$

$$0 \stackrel{!}{=} \operatorname{div}(\vec{v}) = \cos(x) + \frac{2}{3} \cdot (x+y)^{-\frac{1}{3}} + \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} = -\cos(x) - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{g(x,y,z) = -\cos(x) \cdot z - \frac{2}{3}(x+y)^{-\frac{1}{3}} \cdot z + C(x,y)}$$

4b

~~geg~~: $\operatorname{rot}(\vec{u}) = \vec{v}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 2x stet. diffbar

Zu zeigen: $\operatorname{rot}(\vec{u} + \nabla f) = \vec{v}$

Beweis: $\operatorname{rot}(\vec{u} + \nabla f) = \underbrace{\cancel{\operatorname{rot}(\vec{u})}}_{= \vec{v} \text{ n.V.}} + \underbrace{\cancel{\operatorname{rot}(\nabla f)}}_{= \vec{0}\text{, Satz von Schwarz}} = \vec{v}$ $\square$