6. Tutorium

A1: $\vec{u}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ (SF)

$(x,y,z) \longmapsto xyz$

$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ xz \end{pmatrix}$

$\vec{w}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ x-z \end{pmatrix}$

VF

Wiederholung

- $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 w_1 - \ldots \\ - \end{pmatrix}$
- $\operatorname{div}_{\vec{x}}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\vec{x})$
- grad = erste Ableitung
  grad $(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
- $\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \end{pmatrix}$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$

a.) $\operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{w})$ ist def

① $\vec{v} \times \vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ xz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2z - xyz - x + z \\ 2yx - 2yz \\ 2y^2 - 2xy \end{pmatrix}$

② $\operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{w}) = (2xz - yz - 1) + (2x - 2z)$

b.) $\left(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \|\vec{v}\|^2\right)(x,y,z)$

$= \left(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle\right)(x,y,z)$

$= \langle \vec{v}, \vec{w} - \vec{v} \rangle (x,y,z) = \left\langle \vec{v}(x,y,z), \vec{w}(x,y,z) - \vec{v}(x,y,z) \right\rangle$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Bilinearform

$= \left\langle \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ xz \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x-y \\ x-z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ xz \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= -4y^2 + x - y - 1 + \left(x^2 z^2 - xz^2 - xz^2\right)$$

$$\operatorname{grad}_{(x,y,z)}\left(\langle v,w\rangle - \|u\|^2\right) = \begin{pmatrix} 1 + 2xz - z^2 - 2xz^2 \\ -8y - 1 \\ x^2 - 2xz - 2x^2 z \end{pmatrix}$$

c.) $\operatorname{grad}(\vec{v} \times \vec{w})$ nicht def., da $\vec{v} \times \vec{w}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, Kein Skalarfeld.

d.) $$\operatorname{rot}(u \cdot \vec{v}) = u(x,y,z) \cdot \operatorname{rot}_{(x,y,z)}(\vec{v}) + \left(\operatorname{grad}_{(x,y,z)}(u)\right) \times \vec{v}(x,y,z)$$

$$= xyz \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ -2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ xz \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \\ \dots \\ \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 z^2 - xy \\ 2xy^2 - xyz^2 \\ yz - 2xyz \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 z^2 - xy \\ 2xy^2 - 2xyz^2 \\ yz - 4xyz \end{pmatrix}$$

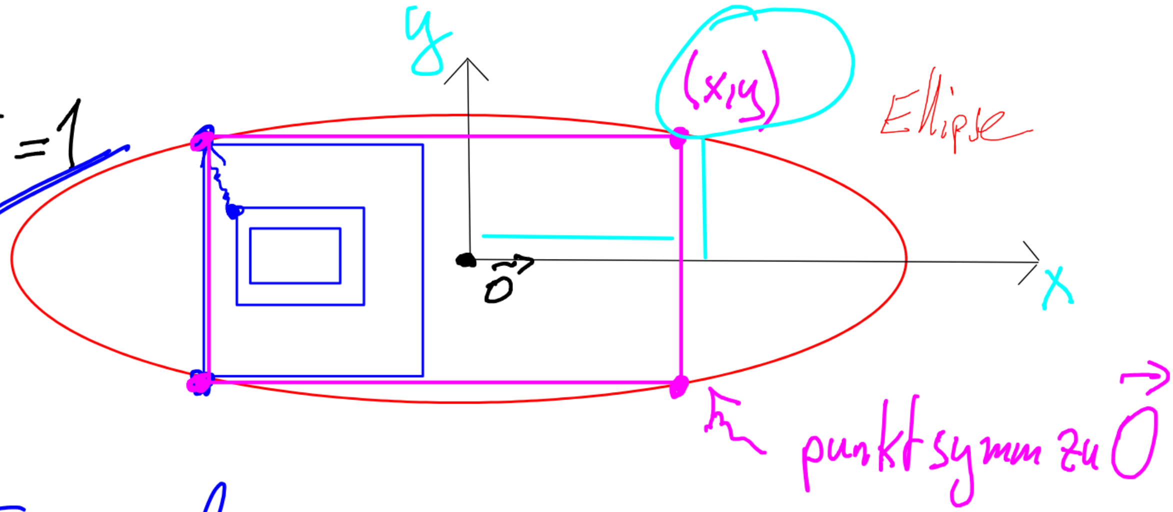
Aufgabe 2

Gegeben: • $a,b,c>0$

• $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$

Bestimme das größtmögliche Volumen eines achsenparallelen Quaders in Ellipsoid E.

$\boxed{NB:}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



Beachte: Ein Volumen maximierender Quader in E ist punktsym zu $\vec{0}$ und berührt mit allen 8 Ecken den Rand von E.

Q ⇝ gegeben durch 3 reelle Koord >0, nämlich durch die Ecke, die im pos. Oktant liegt.

① $V(Q(x,y,z))=2x\cdot 2y\cdot 2z$ zu max.

Nb: $g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\overset{!}{=}0$ Fkt

2

$$\operatorname{grad}_{(x,y,z)}(g) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$$

$= 0$ gdw. (x,y,z) $\rightsquigarrow$ nicht relevant für Max.

Lagrange-Verf.

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{grad}_{\vec{x}} f = \lambda \cdot \operatorname{grad}_{\vec{x}} g \\ g = 0 \end{array}}$$

oder

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{grad}_{\vec{x}} g = 0 \\ \text{und } g(\vec{x}) = 0 \end{array}}$$

singuläre Fall

Kandidaten

$$\operatorname{grad}_{(x,y,z)}(V) = \begin{pmatrix} 8yz \\ 8xz \\ 8xy \end{pmatrix}$$

3

LGS:

4 Gl., 4 Unbek.

$$\boxed{\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} 8yz = 2 \cdot \lambda \cdot \frac{x}{a^2} \\ 8xz = 2\lambda \cdot \frac{y}{b^2} \\ 8xy = 2\lambda \cdot \frac{z}{c^2} \end{array}} \quad (*) \\ 0 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \quad (**) \end{array}}$$

1\. Fall: $\lambda = 0 \implies x = 0$ oder $y = 0$ oder $z = 0$

$V(Q(x,y,z)) = 0$ $\rightsquigarrow$ irrelevant

2\. Fall: $\lambda \neq 0 \implies x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$

(*) äquivalent zu

$$\boxed{\begin{aligned} 8yzx &= 2\cdot\lambda\cdot\frac{x^2}{a^2} \\ 8xzy &= 2\lambda\frac{y^2}{b^2} \\ 8xzy &= 2\lambda\cdot\frac{z^2}{b^2} \end{aligned}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{8xyz}{2\lambda}, \quad \frac{y^2}{b^2} \parallel \frac{z^2}{c^2} \parallel$$

$$\Downarrow (**)$$

$$\boxed{3\cdot\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0}$$

in NB einsetzen liefert:

$$x^2 = \frac{a^2}{3} \qquad y = \frac{b^2}{3} \qquad z = \frac{c^2}{3}$$

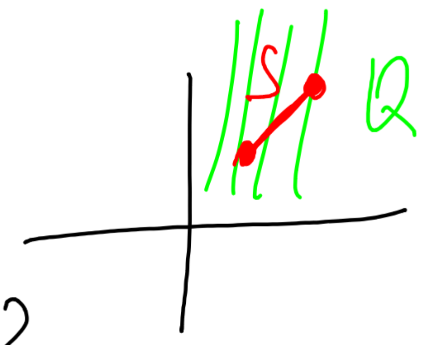
$$\underline{x_0 = \sqrt{\frac{a^2}{3}}} \qquad \underline{y_0 = \sqrt{\frac{b^2}{3}}} \qquad \underline{z_0 = \sqrt{\frac{c^2}{3}}}$$

Antwort: Das größtmögliche Volumen ist

$$V(Q(x_0, y_0, z_0)) = 2\cdot\sqrt{\frac{a^2}{3}}\cdot 2\sqrt{\frac{b^2}{3}}\cdot 2\sqrt{\frac{c^2}{3}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{8abc}{3\cdot\sqrt{3}}}}. \quad \text{(Würfel!)}$$

Aufgabe 3



$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$$

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y,\ 1 \le x \le 2\}$$

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto xy\cdot\frac{1}{1+4y}$$

a.) lok/glob. ⇝ Kritische Punkte?

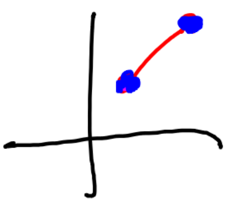
$$\operatorname{grad}_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{y}{(1+4xy)^2} \\ \frac{x}{(1+4xy)^2} \end{pmatrix} = 0 \text{ gdw. } (x,y) = (0,0) \notin Q$$

$\Rightarrow$ f hat keine krit. Punkte!

b.) S ist kompakt, d.h. $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt Max/Min. an.

auf S gilt $x = y$

$$h(x) = f(x,x) = \frac{x^2}{1+4x^2}$$



$$h'(x) = \frac{2x}{(1+4x^2)^2} = 0 \text{ gdw. } x = 0$$

aber $(0,0) \notin S$

$\boxed{\Rightarrow \text{keine Extrema im Inneren von } S}$

$(1,1)$, $(2,2)$ müssen Extrema sein!

$$h(1) = \frac{1}{5} < h(2) = \frac{4}{17} \approx 0{,}235$$

A: $(2,2)$ Max von f auf S, $(1,1)$ Min von f auf S.

Aufgabe 4

a.) $\underline{\operatorname{grad} f(\vec{x}) = 0 \quad ; \quad f''(\vec{x}) \text{ positiv definit}}$, $g(\vec{x})=0$

f hat lokales Min. in $\vec{x}$,
welcher die NB erfüllt.

Wahr.

b.) $G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0 \}$

$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt Max/Min
da G kompakt.

Wahr

c.) $g(x) = x^2 + 1 \overset{!}{=} 0$ <u>nie</u> erfüllt.

falsch.

d.) Wahr, das ist der Sinn der ganzen Sache.

$\rightsquigarrow \quad \boxed{g(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0)}$

f konstant auf NB $g(x,y) = 0$