Winkelfunktionen. Arcusfunktionen.

Andreas Unterreiter

11. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 sin

Eine mahtematisch fundiertere Besprechung der Sinusfunktion erfolgt im Zusammenhang mit Grenzwerten und unendlicher Summation. Diese beiden Themen werden nicht immer im Vorkurs besprochen. Es gilt

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

<u>dom ran</u>
dom $\sin = \mathbb{R}$.
ran $\sin = [-1|1]$.

<u>(un-)gerade</u>
sin ungerade.

<u>Periodizität</u>
sin ist $2 \cdot \pi$-periodisch.

<u>Monotonie</u>
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ sin streng wachsend auf $\left[-\frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi \middle| \frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi\right]$.
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ sin streng fallend auf $\left[\frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi \middle| \frac{3 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi\right]$.

Wegen $\sin' = \cos$ ist sin genau auf jenen echten reellen Intervallen streng wachsend/streng fallend, auf denen cos grössergleich0/kleinergleich0 ist.

<u>konvex/konkav</u>
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ sin konvex auf $[\pi + 2 \cdot n \cdot \pi | 2 \cdot \pi + 2 \cdot n \cdot \pi]$.
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ sin konkav auf $[2 \cdot n \cdot \pi | \pi + 2 \cdot n \cdot \pi]$.

Wegen $\sin'' = -\sin$ ist sin genau auf jenen echten reellen Intervallen konvex/konkav, auf denen sin kleinergleich0/größergleich0 ist.

<u>Extrema</u>
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$
sin hat in $\frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi$ striktes globales Maximum $\wedge \sin(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi) = 1$.
sin hat in x globales Maximum $\quad \Rightarrow \quad \exists n : n \in \mathbb{Z} \wedge x = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi \wedge \sin x = 1$.

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$
sin hat in $-\frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi$ striktes globales Minimum $\wedge \sin(-\frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi) = -1$.
sin hat in x globales Minimum $\quad \Rightarrow \quad \exists n : n \in \mathbb{Z} \wedge x = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi \wedge \sin x = -1$.

<u>Stetigkeit</u>
sin stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
sin beliebig oft differenzierbar.

$$\sin' = \cos,$$

$$\sin'' = -\sin.$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \sin x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \sin' x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \sin'' x = \mathsf{nan}.$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \sin x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \sin' x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \sin'' x = \mathsf{nan}.$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \sin(n \cdot \pi) = 0,$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \sin(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi) = (-1)^n,$$

x	$\sin x$	$\sin x$
0	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	1

spezielle Eigenschaften

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin(x + y) = (\sin x) \cdot (\cos y) + (\cos x) \cdot (\sin y).$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin(2 \cdot x) = 2 \cdot (\sin x) \cdot (\cos x).$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\forall x : x \in [0|\pi] \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x).$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin(\pi - x) = \sin x.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \pm \ldots$$

2 cos

Eine mahtematisch fundiertere Besprechung der Cosinusfunktion erfolgt im Zusammenhang mit Grenzwerten und unendlicher Summation. Diese beiden Themen werden nicht immer im Vorkurs besprochen. Es gilt

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

dom ran
dom $\cos = \mathbb{R}$.
ran $\cos = [-1|1]$.

(un-)gerade
cos gerade.

Periodizität
cos ist $2 \cdot \pi$-periodisch.

Monotonie
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos$ streng wachsend auf $[-\pi + 2 \cdot n \cdot \pi | 2 \cdot n \cdot \pi]$.
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos$ streng fallend auf $[2 \cdot n \cdot \pi | \pi + 2 \cdot n \cdot \pi]$.

Wegen $\cos' = -\sin$ ist cos genau auf jenen echten reellen Intervallen streng wachsend/streng fallend, auf denen sin kleinergleich0/grössergleich0 ist.

konvex/konkav
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos$ konvex auf $[\frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi | \frac{3 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot \pi + 2 \cdot n \cdot \pi]$.
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos$ konkav auf $[-\frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi | \frac{\pi}{2} + 2 \cdot n \cdot \pi]$.

Wegen $\cos'' = -\cos$ ist cos genau auf jenen echten reellen Intervallen konvex/konkav, auf denen cos kleinergleich0/größergleich0 ist.

Extrema
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$
$$\cos \text{ hat in } 2 \cdot n \cdot \pi \text{ striktes globales Maximum} \wedge \cos(2 \cdot n \cdot \pi) = 1.$$
cos hat in x globales Maximum $\quad \Rightarrow \quad \exists n : n \in \mathbb{Z} \wedge x = 2 \cdot n \cdot \pi \wedge \cos x = 1$.

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow$
$$\cos \text{ hat in } \pi + 2 \cdot n \cdot \pi \text{ striktes globales Minimum} \wedge \cos(\pi + 2 \cdot n \cdot \pi) = -1.$$
cos hat in x globales Minimum $\quad \Rightarrow \quad \exists n : n \in \mathbb{Z} \wedge x = (1 + 2 \cdot n) \cdot \pi \wedge \cos x = -1$.

Stetigkeit
cos stetig.

Differenzierbarkeit
cos beliebig oft differenzierbar.

$$\cos' = -\sin,$$

$$\cos'' = -\cos .$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \cos x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \cos' x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \cos'' x = \mathsf{nan}.$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \cos x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \cos' x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \cos'' x = \mathsf{nan}.$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos(n \cdot \pi) = (-1)^n,$$
$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cos(\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi) = 0,$$

x	$\cos x$	$\cos x$
0	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	0

spezielle Eigenschaften

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos(x + y) = (\cos x) \cdot (\cos y) - (\sin x) \cdot (\sin y).$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos(2 \cdot x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\forall x : x \in [-\frac{\pi}{2} | \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x).$$
$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos(\pi - x) = -\cos x.$$
$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \pm \ldots$$

3 tan

Es gilt
$$\tan = \sin ./. \cos,$$
$$\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

dom ran
dom $\tan = \mathbb{R}$.
ran $\tan = \mathbb{R}$.

(un-)gerade
tan ungerade.

In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, da sin ungerade und cos gerade,

$$\begin{aligned}\tan(-x) = (\sin ./. \cos)(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} &= \frac{-\sin x}{\cos x} \\ &= -\frac{\sin x}{\cos x} = -(\sin ./. \cos)(x) = -\tan x.\end{aligned}$$

Periodizität
tan ist π-periodisch.

In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ auf Grund bereits bekannter Eigenschaften von sin und cos,

$$\begin{aligned}\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} &= \frac{(\sin x) \cdot (\cos \pi) + (\cos x) \cdot (\sin \pi)}{(\cos x) \cdot (\cos \pi) - (\sin x) \cdot (\sin \pi)} \\ &= \frac{(\sin x) \cdot (-1) + (\cos x) \cdot 0}{(\cos x) \cdot (-1) - (\sin x) \cdot 0} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.\end{aligned}$$

Monotonie
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ tan streng wachsend auf $\left] -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \middle| \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \right[$.

konvex/konkav
$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ tan konvex auf $\left[n \cdot \pi \middle| \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \right[$.

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ tan konvex auf $\left] -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \middle| n \cdot \pi \right]$.

Wegen $\tan'' = 2\cdot\tan\cdot(1+\tan^2)$ auf echten reellen Intervallen, die *keine* der Zahlen $n\cdot\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ enthalten, ist tan genau auf jenen derartigen echten reellen Intervallen konvex/konkav, auf denen tan größergleich0/kleinergleich0 ist.

Extrema

$\neg$(tan hat in x globales Maximum).

$\neg$(tan hat in x globales Minimum).

Stetigkeit

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ tan stetig auf $]-\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi|\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi[$.

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ tan unstetig in $\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$.

Differenzierbarkeit

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ tan beliebig oft differenzierbar auf $]-\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi|\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi[$.

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \neg$(tan in $\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$ differenzierbar).

$$\tan' : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi : n\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x.$$

$$\tan'' : \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi : n\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \tan''(x) = \frac{2\cdot\sin x}{\cos^3 x} = 2\cdot\tan x\cdot(1+\tan^2 x).$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x\uparrow+\infty}\tan x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\uparrow+\infty}\tan' x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\uparrow+\infty}\tan'' x = \mathsf{nan}.$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty}\tan x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\downarrow-\infty}\tan' x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x\downarrow-\infty}\tan'' x = \mathsf{nan}.$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$\tan 0 = 0, \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1, \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

$$n\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \tan(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi) = 0.$$

$$n\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}\tan x = +\infty \wedge \lim_{x\downarrow\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}\tan x = -\infty,$$

$$n\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}\frac{\tan x-\tan(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi)}{x-(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi)} = \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}\frac{\tan x-0}{x-(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi)} = -\infty.$$

$$n\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\downarrow\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}\frac{\tan x-\tan(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi)}{x-(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi)} = \lim_{x\downarrow\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}\frac{\tan x-0}{x-(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi)} = -\infty.$$

$$n\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}\tan' x = +\infty \wedge \lim_{x\downarrow\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}\tan' x = +\infty,$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi} \tan'' x = +\infty \wedge \lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi} \tan'' x = -\infty.$$

<u>spezielle Eigenschaften</u>

$$x \in \left] -\frac{\pi}{2} | \frac{\pi}{2} \right[\quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}},$$

$$x \in \left] -\frac{\pi}{2} | \frac{\pi}{2} \right[\quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}},$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{1}{\cot x},$$

$$n \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left] \frac{n \cdot \pi}{2} | \frac{\pi}{2} + \frac{n \cdot \pi}{2} \right[\quad \Rightarrow \quad (\tan x) \cdot (\cot x) = 1,$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \tan(\frac{n \cdot \pi}{2}) = \cot(\frac{n \cdot \pi}{2}) = 0.$$

4 cot

Es gilt

$$\cot = \cos ./. \sin,$$
$$\cot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

<u>dom ran</u>
dom $\cot = \mathbb{R}$.
ran $\cot = \mathbb{R}$.

<u>(un-)gerade</u>
cot ungerade.

In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, da sin ungerade und cos gerade,

$$\cot(-x) = (\cos ./. \sin)(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x}$$
$$= -\frac{\cos x}{\sin x} = -(\cos ./. \sin)(x) = -\cot x.$$

<u>Periodizität</u>
cot ist π-periodisch.

In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ auf Grund bereits bekannter Eigenschaften von sin und cos,

$$\cot(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{(\cos x) \cdot (\cos \pi) - (\sin x) \cdot (\sin \pi)}{(\sin x) \cdot (\cos \pi) + (\cos x) \cdot (\sin \pi)}$$
$$= \frac{(\cos x) \cdot (-1) - (\sin x) \cdot 0}{(\sin x) \cdot (-1) + (\cos x) \cdot 0} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

<u>Monotonie</u>

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ cot streng fallend auf $]n \cdot \pi | (1+n) \cdot \pi[$.

<u>konvex/konkav</u>

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ cot konvex auf $[n \cdot \pi | \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi[$.

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ cot konvex auf $]-\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi | n \cdot \pi]$.

Wegen $\cot'' = 2 \cdot \cot \cdot (1 + \cot^2)$ auf echten reellen Intervallen, die *keine* der Zahlen $n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$ enthalten, ist cot genau auf jenen derartigen echten reellen Intervallen konvex/konkav, auf denen cot größergleich0/kleinergleich0 ist.

<u>Extrema</u>

$\neg$(cot hat in x globales Maximum).
$\neg$(cot hat in x globales Minimum).

<u>Stetigkeit</u>

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ cot stetig auf $]n \cdot \pi | (1+n) \cdot \pi[$.

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ cot unstetig in $n \cdot \pi$.

<u>Differenzierbarkeit</u>

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad$ cot beliebig oft differenzierbar auf $]n \cdot \pi | (1+n) \cdot \pi[$.

$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \neg$(cot in $n \cdot \pi$ differenzierbar).

$$\cot' : \mathbb{R} \setminus \{n \cdot \pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$$

$$\cot'' : \mathbb{R} \setminus \{n \cdot \pi : n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \cot''(x) = \frac{2 \cdot \cos x}{\sin^3 x} = 2 \cdot \cot x \cdot (1 + \cot^2 x).$$

<u>Verhalten bei $\pm\infty$</u>

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \cot x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \cot' x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \cot'' x = \mathsf{nan}.$$

$$\lim_{x \downarrow -\infty} \cot x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} \cot' x = \mathsf{nan}, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} \cot'' x = \mathsf{nan}.$$

<u>Verhalten am Rand</u> -

<u>Spezielle Stellen</u>

$$\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \cot \frac{\pi}{4} = 1, \quad \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cot \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cot(n \cdot \pi) = 0.$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \uparrow n \cdot \pi} \cot x = -\infty \wedge \lim_{x \downarrow n \cdot \pi} \cot x = +\infty,$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \uparrow n \cdot \pi} \frac{\cot x - \cot(n \cdot \pi)}{x - n \cdot \pi} = \lim_{x \uparrow n \cdot \pi} \frac{\cot x - 0}{x - n \cdot \pi} = +\infty.$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \downarrow n \cdot \pi} \frac{\cot x - \cot(n \cdot \pi)}{x - n \cdot \pi} = \lim_{x \downarrow n \cdot \pi} \frac{\cot x - 0}{x - n \cdot \pi} = +\infty.$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \uparrow n \cdot \pi} \cot' x = -\infty \wedge \lim_{x \downarrow n \cdot \pi} \cot' x = -\infty,$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \uparrow n \cdot \pi} \cot'' x = -\infty \wedge \lim_{x \downarrow n \cdot \pi} \cot'' x = +\infty.$$

<u>spezielle Eigenschaften</u>

$$x \in \left]0|\pi\right[\quad \Rightarrow \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}},$$

$$x \in \left]0|\pi\right[\quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}},$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \cot x = \frac{1}{\tan x},$$

$$n \in \mathbb{Z} \wedge x \in \left]\frac{n \cdot \pi}{2} | \frac{\pi}{2} + \frac{n \cdot \pi}{2}\right[\quad \Rightarrow \quad (\cot x) \cdot (\tan x) = 1,$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \cot(\frac{n \cdot \pi}{2}) = \tan(\frac{n \cdot \pi}{2}) = 0.$$

5 arcsin

arcsin wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = \sin$ und $I = [-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}]$ und $J = \sin[I] = [-1|1]$ gebildet. sin ist stetig, sin ist streng wachsend auf I. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus den Parametern sin und $[-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}]$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

arcsin,

bezeichnet wird. arcsin ist die (reelle) ArcusSinusfunktion. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\arcsin = \left(\sin \downharpoonleft [-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}]\right)^{-1}.$$

arcsin reelle Funktion,

$$\arcsin : [-1|1] \to [-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}] \quad \text{bijektiv.}$$

arcsin streng wachsend,

$$\forall x : x \in [-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}] \quad \Rightarrow \quad \arcsin(\sin x) = x,$$

$$\forall y : y \in [-1|1] \quad \Rightarrow \quad \sin(\arcsin y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von sin, aus $\forall x : x \in \,]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[\, \Rightarrow 0 \neq \cos x = \sin' x$ und aus $\sin[]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[] = \,]-1|1[$ folgt

$$\text{arcsin differenzierbar auf }]-1|1[,$$

$$\forall x : x \in \,]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[\quad \Rightarrow \quad \arcsin'(\sin x)\cdot \sin' x = \arcsin'(\sin x)\cdot \cos x = 1,$$

$$\forall y : y \in \,]-1|1[\quad \Rightarrow \quad \sin'(\arcsin y)\cdot \arcsin' y = \cos(\arcsin y)\cdot \arcsin' y = 1.$$

In dieser letzten Aussage gilt $y \in \,]-1|1[$, so dass $\arcsin y \in \,]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[$, also auch $\arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}]$. Hieraus und aus der bereits früher fest gestellten Aussage

$$\forall x : x \in [-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x},$$

folgt

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)},$$

woraus via $y \in \,]-1|1[$, also auch $y \in [-1|1]$, zunächst

$$\sin(\arcsin y) = y,$$

und hieraus die Aussage

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2},$$

folgt. Hieraus und aus obigem Resultat folgt nun

$$\forall y : y \in \,]-1|1[\, \Rightarrow \cos(\arcsin y)\cdot \arcsin' y = \sqrt{1-y^2}\cdot \arcsin' y = 1,$$

woraus sich wegen $0 \neq \sqrt{1-y^2}$ - da $y \in \,]-1|1[$ vorausgesetzt ist - die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in \,]-1|1[\quad \Rightarrow \quad \arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

ergibt.

<u>dom ran</u>
dom $\arcsin = [-1|1]$.
ran $\arcsin = [-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}]$.

<u>(un-)gerade</u>
arcsin gerade.

<u>Periodizität</u>
$\neg$(arcsin ist T-periodisch).

<u>Monotonie</u>
arcsin streng wachsend.

konvex/konvex
arcsin konvex auf $[0|1]$.
arcsin konkav auf $[-1|0]$.

Wegen $\arcsin'' y = \frac{y}{(1-y^2)\cdot\sqrt{1-y^2}}$ für alle $y \in \,]-1|1[$ und der Stetigkeit von arcsin ist arcsin genau auf jenen echten reellen Teilintervallen von $[-1|1]$ konvex/konkav, auf denen y größergleich0/kleinergleich0 ist.

Extrema
arcsin hat in 1 striktes globales Maximum $\wedge \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.
arcsin hat in x globales Maximum $\quad\Rightarrow\quad x = 1 \wedge \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

arcsin hat in -1 striktes globales Minimum $\wedge \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
arcsin hat in x globales Minimum $\quad\Rightarrow\quad x = -1 \wedge \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$.

Stetigkeit
arcsin stetig.

Differenzierbarkeit
arcsin beliebig oft differenzierbar auf $]-1|1[$.
$\neg$(arcsin differenzierbar in 1).
$\neg$(arcsin differenzierbar in -1).

$$\arcsin' : \,]-1|1[\, \to \mathbb{R}, \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\arcsin'' : \,]-1|1[\, \to \mathbb{R} \quad \arcsin'' x = \frac{x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

Verhalten bei $\pm\infty$ -

Verhalten am Rand

$$\lim_{x\downarrow -1} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\arcsin x - \arcsin(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\downarrow -1} \frac{\arcsin x + \frac{\pi}{2}}{x+1} = +\infty.$$

$$\lim_{x\downarrow -1} \arcsin' x = +\infty, \quad \lim_{x\downarrow -1} \arcsin'' x = -\infty.$$

$$\lim_{x\uparrow 1} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\arcsin x - \arcsin 1}{x-1} = \lim_{x\uparrow 1} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{x-1} = +\infty.$$

$$\lim_{x\uparrow 1} \arcsin' x = +\infty, \quad \lim_{x\uparrow 1} \arcsin'' x = +\infty.$$

Spezielle Stellen

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin 0 = 0,$$

$$\arcsin(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6} \quad \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x : x \in [\,-1|1] \Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall y : y \in [\,-1|1] \Rightarrow \cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}.$$

$$\forall x : x \in]\,-1|1[\, \Rightarrow$$
$$\arcsin x = x - \frac{1}{3}\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{1}\cdot x^3 + \frac{1}{5}\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{2}\cdot x^5 - \frac{1}{7}\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{3}\cdot x^7 + \frac{1}{9}\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{4}\cdot x^9 \mp \ldots$$

$$\forall x : x \in]\,-1|1[\, \Rightarrow$$
$$\arcsin x = x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot x^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot x^5 + \frac{1}{7}\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot x^7 + \frac{1}{9}\cdot\frac{7!!}{8!!}\cdot x^9 + \ldots$$

6 arccos

arccos wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = \cos$ und $I = [0|\pi]$ und $J = \cos[I] = [\,-1|1]$ gebildet. cos ist stetig, cos ist streng fallend auf I. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonright I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus den Parametern cos und $[0|\pi]$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\arccos,$$

bezeichnet wird. arccos ist die (reelle) ArcusCosinusfunktion. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\arccos = (\cos \downharpoonright [0|\pi])^{-1}.$$

$$\arccos \text{ reelle Funktion},$$

$$\arccos : [\,-1|1] \to [0|\pi] \quad \text{bijektiv}.$$

$$\arccos \text{ streng fallend},$$

$$\forall x : x \in [0|\pi] \quad \Rightarrow \quad \arccos(\cos x) = x,$$

$$\forall y : y \in [\,-1|1] \quad \Rightarrow \quad \cos(\arccos y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von cos, aus $\forall x : x \in \,]0|\pi[\, \Rightarrow 0 \neq -\sin x = \cos' x$ und aus $\cos[\,]0|\pi[\,] = \,]-1|1[$ folgt

$$\text{arccos differenzierbar auf }]-1|1[,$$

$$\forall x : x \in \,]0|\pi[\quad \Rightarrow \quad \arccos'(\cos x) \cdot \cos' x = -\arccos'(\cos x) \cdot \sin x = 1,$$

$$\forall y : y \in \,]-1|1[\quad \Rightarrow \quad \cos'(\arccos y) \cdot \arccos' y = -\sin(\arccos y) \cdot \arccos' y = 1.$$

In dieser letzten Aussage gilt $y \in \,]-1|1[$, so dass $\arccos y \in \,]0|\pi[$, also auch $\arccos y \in [0|\pi]$. Hieraus und aus der bereits früher fest gestellten Aussage

$$\forall x : x \in [0|\pi] \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x},$$

folgt

$$\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos y)},$$

woraus via $y \in \,]-1|1[$, also auch $y \in [-1|1]$, zunächst

$$\cos(\arccos y) = y,$$

und hieraus die Aussage

$$\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2},$$

folgt. Hieraus und aus obigem Resultat folgt nun

$$\forall y : y \in \,]-1|1[\Rightarrow -\sin(\arccos y) \cdot \arccos' y = -\sqrt{1 - y^2} \cdot \arccos' y = 1,$$

woraus sich wegen $0 \neq \sqrt{1 - y^2}$ - da $y \in \,]-1|1[$ vorausgesetzt ist - die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in \,]-1|1[\quad \Rightarrow \quad \arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

ergibt.

<u>dom ran</u>
dom arccos $= [-1|1]$.
ran arccos $= [0|\pi]$.

<u>(un-)gerade</u>
$\neg$(arccos ungerade).
$\neg$(arccos gerade).

<u>Periodizität</u>
$\neg$(arccos ist T-periodisch).

<u>Monotonie</u>
arccos streng fallend.

konvex/konvex
arccos konkav auf $\left[0|1\right]$.
arccos konvex auf $\left[-1|0\right]$.

Wegen $\arccos'' y = -\frac{y}{(1-y^2)\cdot\sqrt{1-y^2}}$ für alle $y \in \left]-1|1\right[$ und der Stetigkeit von arccos ist arccos genau auf jenen echten reellen Teilintervallen von $\left[-1|1\right]$ konvex/konkav, auf denen y kleinergleich0/größergleich0 ist.

Extrema
arccos hat in -1 striktes globales Maximum $\wedge$ $\arccos(-1) = \pi$.
arccos hat in x globales Maximum $\quad\Rightarrow\quad x = -1 \wedge \arccos x = \pi$.

arccos hat in 1 striktes globales Minimum $\wedge$ $\arccos 1 = 0$.
arccos hat in x globales Minimum $\quad\Rightarrow\quad x = 1 \wedge \arccos x = 0$.

Stetigkeit
arccos stetig.

Differenzierbarkeit
arccos beliebig oft differenzierbar auf $\left]-1|1\right[$.
$\neg$(arccos differenzierbar in 1).
$\neg$(arccos differenzierbar in -1).

$$\arccos' : \left]-1|1\right[\to \mathbb{R}, \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\arccos'' : \left]-1|1\right[\to \mathbb{R} \quad \arccos'' x = -\frac{x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

Verhalten bei $\pm\infty$ -

Verhalten am Rand

$$\lim_{x\downarrow -1} \arccos x = \arccos(-1) = \pi,$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\arccos x - \arccos(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\downarrow -1} \frac{\arccos x - \pi}{x+1} = -\infty.$$

$$\lim_{x\downarrow -1} \arccos' x = -\infty, \quad \lim_{x\downarrow -1} \arccos'' x = +\infty.$$

$$\lim_{x\uparrow 1} \arccos x = \arccos 1 = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\arccos x - \arccos 1}{x-1} = \lim_{x\uparrow 1} \frac{\arccos x - 0}{x-1} = -\infty.$$

$$\lim_{x\uparrow 1} \arccos' x = -\infty, \quad \lim_{x\uparrow 1} \arccos'' x = -\infty.$$

Spezielle Stellen

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{3} \quad \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}, \quad \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}, \quad \arccos 1 = 0.$$

<u>spezielle Eigenschaften</u>

$$\forall x : x \in [-1|1] \Rightarrow \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall y : y \in [-1|1] \Rightarrow \sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}.$$

$$\forall x : x \in]-1|1[\Rightarrow$$
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{1} \cdot x^3 - \frac{1}{5} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{2} \cdot x^5 + \frac{1}{7} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{3} \cdot x^7 - \frac{1}{9} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{4} \cdot x^9 \pm \ldots$$

$$\forall x : x \in]-1|1[\Rightarrow$$
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1!!}{2!!} \cdot x^3 - \frac{1}{5} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot x^5 - \frac{1}{7} \cdot \frac{5!!}{6!!} \cdot x^7 - \frac{1}{9} \cdot \frac{7!!}{8!!} \cdot x^9 - \ldots$$

7 arctan

arctan wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = \tan$ und $I =]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[$ und $J = \tan[I] = \mathbb{R}$ gebildet. tan ist stetig, tan ist streng wachsend auf I. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonright I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus den Parametern tan und $]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\arctan,$$

bezeichnet wird. arctan ist die (reelle) ArcusTangensfunktion. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\arctan = \left(\tan \downharpoonright]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[\right)^{-1}.$$

arctan reelle Funktion,

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[\quad \text{bijektiv.}$$

arctan streng wachsend,

$$\forall x : x \in]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[\quad \Rightarrow \quad \arctan(\tan x) = x,$$

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \tan(\arctan y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von tan auf $]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[$, aus $\forall x : x \in]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[\Rightarrow 0 \neq 1 + \tan^2 x = \tan' x$ und aus $\tan[]-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}[] = \mathbb{R}$ folgt

arctan differenzierbar,

$$\forall x : x \in \left]-\frac{\pi}{2}\middle|\frac{\pi}{2}\right[\quad \Rightarrow \quad \arctan'(\tan x) \cdot \tan' x = \arctan'(\tan x) \cdot (1+\tan^2 x) = 1,$$

$$\begin{aligned}\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \tan'(\arctan y) \cdot \arctan' y &= (1 + \tan^2(\arctan y)) \cdot \arctan' y \\ &= (1 + y^2) \cdot \arctan' y = 1.\end{aligned}$$

Es folgt die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \arctan' y = \frac{1}{1 + y^2}.$$

<u>dom ran</u>
dom $\arctan = \mathbb{R}$.
ran $\arctan = \left]-\frac{\pi}{2}\middle|\frac{\pi}{2}\right[$.

<u>(un-)gerade</u>
arctan ungerade.

<u>Periodizität</u>
¬(arctan ist T-periodisch).

<u>Monotonie</u>
arctan streng wachsend.

<u>konvex/konkav</u>
arctan konvex auf $]-\infty|0]$.
arctan konkav auf $[0|+\infty[$.

Wegen $\arctan'' y = -\frac{2 \cdot y}{(1+y^2)^2}$ ist arctan genau dann auf jenen echten reellen Intervall konvex/konkav, auf denen y kleinergleich0/größergleich0 ist.

<u>Extrema</u>
¬(arctan hat in x globales Maximum).
¬(arctan hat in x globales Minimum).

<u>Stetigkeit</u>
arctan stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
arctan beliebig oft differenzierbar.

$$\arctan' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$\arctan'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \arctan'' x = -\frac{2 \cdot x}{(1 + x^2)^2}.$$

<u>Verhalten bei ±∞</u>

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \arctan' x = 0, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \arctan'' x = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\downarrow -\infty} \arctan' x = 0, \quad \lim_{x\downarrow -\infty} \arctan'' x = 0,$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$\arctan 0 = 0, \quad \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}, \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall x : x \in \,]-1|1[\, \Rightarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} \pm \ldots$$

$$\forall x : x \in \,]0|+\infty[\, \Rightarrow$$
$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{-1+x}{1+x} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1+x}{1+x}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-1+x}{1+x}\right)^5 - \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{-1+x}{1+x}\right)^7 \pm \ldots$$

8 arccot

arccot wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = \cot$ und $I = \,]0|\pi[$ und $J = \cot[I] = \mathbb{R}$ gebildet. cot ist stetig, cot ist streng fallend auf I. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus den Parametern cot und $]0|\pi[$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\operatorname{arccot},$$

bezeichnet wird. arccot ist die (reelle) ArcusCotangensfunktion. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\operatorname{arccot} = (\cot \downharpoonleft \,]0|\pi[\,)^{-1}.$$

$$\operatorname{arccot} \text{ reelle Funktion},$$

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \,]0|\pi[\quad \text{bijektiv}.$$

$$\operatorname{arccot} \text{ streng fallend},$$

$$\forall x : x \in \,]0|\pi[\quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccot}(\cot x) = x,$$

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \cot(\operatorname{arccot} y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von cot auf $]0|\pi[$, aus $\forall x : x \in\,]0|\pi[\, \Rightarrow 0 \neq -(1+\cot^2 x) = \cot' x$ und aus
$cot[]0|\pi[] = \mathbb{R}$ folgt

$$\text{arccot differenzierbar,}$$

$$\forall x : x \in\,]0|\pi[\quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccot}'(\cot x) \cdot \cot' x = -\operatorname{arccot}'(\cot x) \cdot (1+\cot^2 x) = 1,$$

$$\begin{aligned}\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \tan'(\text{arccot } y) \cdot \operatorname{arccot}' y &= -(1+\cot^2(\text{arccot } y)) \cdot \operatorname{arccot}' y \\ &= -(1+y^2) \cdot \operatorname{arccot}' y = 1.\end{aligned}$$

Es folgt die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arccot}' y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

dom ran
dom arccot $= \mathbb{R}$.
ran arccot $=]0|\pi[$.

(un-)gerade
$\neg$(arccot ungerade)
$\neg$(arccot gerade).

Periodizität
$\neg$(arccot ist T-periodisch).

Monotonie
arccot streng fallend.

konvex/konkav
arccot konkav auf $]-\infty|0]$.
arccot konvex auf $[0|+\infty[$.

Wegen $\operatorname{arccot}'' y = \frac{2\cdot y}{(1+y^2)^2}$ ist arccot genau dann auf jenen echten reellen Intervall konvex/konkav, auf denen y größergleich0/kleinergleich0 ist.

Extrema
$\neg$(arccot hat in x globales Maximum).
$\neg$(arccot hat in x globales Minimum).

Stetigkeit
arccot stetig.

Differenzierbarkeit
arccot beliebig oft differenzierbar.

$$\operatorname{arccot}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\operatorname{arccot}'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{arccot}'' x = \frac{2 \cdot x}{(1+x^2)^2}.$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \operatorname{arccot}' x = 0, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \operatorname{arccot}'' x = 0,$$

$$\lim_{x \downarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} \operatorname{arccot}' x = 0, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} \operatorname{arccot}'' x = 0,$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arccot}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{3}, \quad \operatorname{arccot} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arccot} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{arccot} x + \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall x : x \in \left]-1|1\right[\Rightarrow \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} \mp \dots$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{4} - \frac{-1+x}{1+x} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1+x}{1+x} \right)^3 - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-1+x}{1+x} \right)^5 + \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{-1+x}{1+x} \right)^7 \mp \dots$$