Vorkurs Mathematik
Vollständige Induktion

Andreas Unterreiter

9. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Prolog

Die "vollständige Induktion" ist eine Methode, um Aussagen über natürliche Zahlen zu beweisen. Eine derartige Aussage ist etwa:

$$\text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ gilt: } 0+1+2+\ldots+n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}. \tag{1}$$

Offenbar kann man sich von der Richtigkeit der Aussage (1) für jede - hinreichend kleine - natürliche Zahl n selbst überzeugen. So gilt etwa für $n = 12$ nach kurzer Rechnung,

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = 78,$$

und es gilt auch

$$\frac{(1+12)\cdot 12}{2} = \frac{13\cdot 12}{2} = 13\cdot 6 = 78,$$

so dass in diesem konkreten Fall

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = \frac{(1+12)\cdot 12}{2},$$

gilt. Schwieriger ist es schon,

$$0+1+2+3+\ldots+10^{100} = \frac{(1+10^{100})\cdot 10^{100}}{2},$$

durch Nachrechnen zu überprüfen und völlig unmöglich ist es, (1) für *alle* natürliche Zahlen rechnerisch nachzuweisen.

Dennoch ist (1) richtig.

Denn (1) kann *bewiesen* werden.

Genauer gesagt gibt es einen *mathematischen Satz*, der, wenn richtig eingesetzt, einen Beweis von (1) liefert:

Satz - Vollständige Induktion

$\quad E \subseteq \mathbb{N}$

$\wedge \quad 0 \in E$

$\wedge \quad \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$

$\Rightarrow$

$\quad E = \mathbb{N}$

Da vor Beginn des Studiums nicht davon auszugehen ist, mit der mathematischen Denkweise oder dem Umgang mit Variablen, Parametern, Klassen-Termen oder den mathematischen Notationen vertraut zu sein, sind zu **Satz - Vollständige Induktion** einige Erläuterungen angebracht.

Über die mathematische Denkweise

1) **Satz - Vollständige Induktion** gliedert sich - wie die meisten mathematischen Sätze - in zwei Teile, die durch den Folgepfeil " $\Rightarrow$ " voneinander getrennt sind.

2) *Vor* dem Folgepfeil " $\Rightarrow$ " steht eine Liste einer oder mehrerer Aussagen - den sogenannten "Prämissen" - , die durch "$\wedge$" miteinander verbunden sind. "$\wedge$" ist das logische Kürzel für "und" .
In **Satz - Vollständige Induktion** sind die Prämissen die Aussagen "$E \subseteq \mathbb{N}$" , "$0 \in E$" , "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$" .

3) *Nach* dem Folgepfeil " $\Rightarrow$ " steht eine weitere Liste einer oder mehrerer Aussagen - den sogenannten "Konklusionen " -, die ebenfalls durch "$\wedge$" miteinander verbunden sind. In **Satz - Vollständige Induktion** gibt es nur eine Konklusion - nämlich "$E = \mathbb{N}$" -, so dass eine Verknüpfung mit "$\wedge$" entfällt.

4) **Satz - Vollständige Induktion** setzt sich nicht nur aus einzelnen Aussagen - den drei Prämissen und der einen Konklusion - zusammen,
Satz - Vollständige Induktion *ist auch selbst wieder eine Aussage* - nämlich die Aussage:

   ENTWEDER ist eine der Prämissen falsch ODER alle Prämissen sind wahr - und dann ist auch die Konklusion wahr.

5) Mit 4) ist eine Möglichkeit gegeben, die Aussage "$E = \mathbb{N}$" via **Satz - Vollständige Induktion** aus *anderslautenden Aussagen* herzuleiten. In der Tat erscheint in **Satz - Vollständige Induktion** die Aussage "$E = \mathbb{N}$" *nicht* als Prämisse, sondern die Prämissen sind die *anderslautenden* Aussagen "$E \subseteq \mathbb{N}$" , "$0 \in E$" , "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$" .

6) Pragmatisch gesagt "bedeutet" **Satz - Vollständige Induktion** also Folgendes: Wann immer ein "E" vorliegt, für das "$E \subseteq \mathbb{N}$" , "$0 \in E$" , "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$" gilt, dann gilt für dieses "E" auch "$E = \mathbb{N}$" .

7) Pointiert könnte die in 1) - 6) vorgestellte mathematische Denkweise allgemein so formuliert werden: Mathematik besteht zu einem großen Teil darin, aus einer Liste "verfügbarer" Aussagen eine Liste "erstrebter" Aussagen logisch herzuleiten und das Ergebnis erfolgreicher Bemühungen als mathematischen Satz zu formulieren.

8) Mathematische Aussagen wie **Satz - Vollständige Induktion** sind stets objektbezogen. Die Objekte der Mathematik heissen “Klassen” . Die meisten Klassen, die im Vorkurs vorkommen, sind “Mengen” . Mengen sind spezielle Klassen.

Über den Umgang mit Variablen

1) In **Satz - Vollständige Induktion** kommen die Buchstaben “E” , “λ” , sowie die Parameter “$\mathbb{N}$” , “0” , “1” , “+” , die Kürzel “$\subseteq$” , “$\in$” , “$=$” , und die logischen Symbole “$\forall$” , “:” , “$\Rightarrow$” vor.

2) “E” und “λ” sind die “Variablen” von **Satz - Vollständige Induktion**, die in einer “Variablenliste” E, λ zusammengefasst werden können. Im Rahmen des Vorkurses sind Variablen stets lateinische oder griechische oder Fraktur-Buchstaben. Jede Variable stellt ein Klasse dar.

3) In der Mathematik gilt eine “allgemeine Ersetzungsregel ” : Ein mathematischer Satz bleibt wahr, wenn eine Variable *rigoros* durch eine andere, nicht in der Variablenliste vorkommende Variable ersetzt wird. So sind mit **Satz - Vollständige Induktion** etwa nach Ersetzung $E \to \alpha$ auch

Satz - Vollständige Induktion

$\alpha \subseteq \mathbb{N}$

$\wedge$ $0 \in \alpha$

$\wedge$ $\forall \lambda : \lambda \in \alpha \Rightarrow 1 + \lambda \in \alpha$

$\Rightarrow$

$\alpha = \mathbb{N}$

mit Variablenliste α, λ, oder nach Ersetzung $\lambda \to \Omega$ auch

Satz - Vollständige Induktion

$E \subseteq \mathbb{N}$

$\wedge$ $0 \in E$

$\wedge$ $\forall \Omega : \Omega \in E \Rightarrow 1 + \Omega \in E$

$\Rightarrow$

$E = \mathbb{N}$

mit Variablenliste E, Ω, oder auch, nach dreimaligem Ersetzen $E \to \alpha$ (ergibt Variablenliste α, λ), $\lambda \to E$ (ergibt Variablenliste α, E), $\alpha \to \lambda$ ergibt Variablenliste λ, E)

Satz - Vollständige Induktion

$$\lambda \subseteq \mathbb{N}$$

$$\wedge \quad 0 \in \lambda$$

$$\wedge \quad \forall E : E \in \lambda \Rightarrow 1 + E \in \lambda$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda = \mathbb{N}$$

mathematische Sätze. Hingegen ist eine nicht rigoros vorgenommene Ersetzung etwa der Form

Achtung - Falsch

$$\alpha \subseteq \mathbb{N}$$

$$\wedge \quad 0 \in E$$

$$\wedge \quad \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in \alpha$$

$$\Rightarrow$$

$$E = \mathbb{N}$$

die auf eine Aussage mit Variablenliste α, E, λ führt *nicht zulässig*. Ebenfalls nicht zulässig wäre die Ersetzung $E \to \lambda$,

Achtung - Falsch

$$\lambda \subseteq \mathbb{N}$$

$$\wedge \quad 0 \in \lambda$$

$$\wedge \quad \forall \lambda : \lambda \in \lambda \Rightarrow 1 + \lambda \in \lambda$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda = \mathbb{N}$$

bei der “E” durch eine bereits in der Variablenliste “E, λ” vorkommende Variable - nämlich “λ” - ersetzt wird. Auch in diesem Fall resultiert eine falsche Aussage.

4) Bei den in mathematischen Sätzen vorkommenden Variablen ist strikt zwischen *gebundenen* und *ungebundenen* Variablen zu unterscheiden. Eine Variable eines mathematischen Satzes ist gebunden, wenn jeder Prämisse oder Konklusion, in der sie vorkommt, ein “Quantor ” - entweder “$\forall$” - “für alle ” - oder “$\exists$” - “es existiert ” - - vorangestellt ist und die Variable zwischen dem Quantor und “:” erscheint. In **Satz - Vollständige Induktion** trifft dies genau auf die Variable “λ” zu. Damit ist “λ” die einzige gebundene Variable von **Satz - Vollständige Induktion**. Die *Liste der gebundenen Variablen* von **Satz - Vollständige Induktion** ist λ. Weitere gebundene Variablen treten später bei Klassen-Termen sowie bei Summen- und Produktzeichen und der Integration auf. Die *freien Variablen* eines mathematischen Satzes sind genau jene Variablen dieses mathematischen Satzes, die *nicht gebunden* sind. Dies trifft in **Satz - Vollständige Induktion** genau auf “E” zu, so dass “E” die einzige freie Variable von **Satz - Vollständige Induktion** ist. Die *Liste der freien Variablen* von **Satz - Vollständige Induktion** ist E.

5) In mathematischen Sätzen ist jede Variable entweder gebunden oder frei - und niemals beides zugleich. So ist etwa die in 3) durch nicht zulässige Ersetzung erhaltene Aussage

Achtung - Falsch

$\lambda \subseteq \mathbb{N}$

$\wedge \quad 0 \in \lambda$

$\wedge \quad \forall \lambda : \lambda \in \lambda \Rightarrow 1 + \lambda \in \lambda$

$\Rightarrow$

$\lambda = \mathbb{N}$

gar kein mathematischer Satz, denn “λ” ist sowohl gebunden als auch frei.

Über mathematische Parameter

1) Mathematische Parameter sind die Grundgrößen der Mathematik. Im Rahmen des Vorkurses sind die Parameter bereits vorhandene, unveränderliche Klassen. Beispiele sind die Menge der natürlichen Zahlen "$\mathbb{N}$", die Menge der reellen Zahlen "$\mathbb{R}$", die Zahl/die leere Menge "0", die Zahl "1", aber auch die Addition "$+$" oder die Kleiner-Gleich-Relation "$\leq$". Wie aus diesen Beispielen ersichtlich, werden mathematische Parameter mit eigenen Symbolen bezeichnet.

2) Jede natürliche oder reelle Zahl ist ein mathematischer Parameter. Somit gibt es *unendlich viele* mathematische Parameter. Die Bezeichnung der natürlichen Zahlen erfolgt üblicher Weise durch die Dezimaldarstellung. Spezielle reelle Zahlen, die keine natürlichen Zahlen sind, sind etwa "π" oder "$\sqrt{2}$" oder "e". Jede Zahl ist eine Menge.

Über einige mathematische Notationen

1) In der Mathematik gibt es (mindestens) vier Grundaussagen. Jede dieser Grundaussagen wird durch eine eigene Notationen getroffen.

2) Die Grundaussage "$p \in x$" heisst umgangssprachlich "p Element von x". Die Negation "$\neg(p \in x)$" heisst umgangssprachlich "p kein Element von x" und wird mit "$p \notin x$" bezeichnet. Es gilt für alle p, x

$$p \in x \text{ oder } p \notin x,$$

mit Hilfe des Kürzels "$\vee$" für "oder",

Satz - $\in \vee$	$p \in x \vee p \notin x$

und "es gilt nie $p \in x \wedge p \notin x$", präziser gilt für alle p, x,

Satz - $\neg \in \wedge$	$\neg(p \in x \wedge p \notin x)$

Satz - $\in \vee$ und **Satz - $\neg \in \wedge$** sind Beispiele mathematischer Sätze, die nicht die übliche "Prämissen $\Rightarrow$ Konklusion" Struktur haben. **Satz - $\in \vee$** und **Satz - $\neg \in \wedge$** sind allgemein, also für alle Klassen "p, x", gültig.

3) Die Grundaussage “$x = y$” heisst umgangssprachlich “x gleich y” . Die Negation “$\neg(x = y)$” heisst umgangssprachlich “x ungleich y” und wird mit “$x \neq y$” bezeichnet.

Satz - =

a) $x = y \vee x \neq y$.

b) $\neg(x = y \wedge x \neq y)$.

c) $x = x$.

d) $x = y \quad \Rightarrow \quad y = x$.

e) $x = y \wedge y = z \quad \Rightarrow \quad x = z$.

4) Die Grundaussage “x Menge” ist mit ihrer umgangssprachlichen Formulierung identisch. Die Negation “$\neg(x$ Menge$)$” ist die Aussage “x Unmenge” , die ebenfalls mit ihrer umgangssprachlichen Formulierung identisch ist.

Satz - ∈Menge $\quad p \in x \quad \Rightarrow \quad p$ Menge $\wedge\, p \in x$

4) Auch die Grundaussage “x endlich” ist mit ihrer umgangssprachlichen Formulierung identisch. Die Negation “$\neg(x$ endlich$)$” ist die Aussage “x unendlich” , die mit ihrer umgangssprachlichen Formulierung identisch ist.

Satz - endlich

a) x endlich $\vee$ x unendlich.

b) $\neg(x$ endlich $\wedge$ x unendlich$)$.

5) Einige mathematische Aussagen kommen so häufig vor, dass sie mit eigenen Symbolen abgekürzt werden. Dies geschieht durch “definierende Äquivalenz” , bei der festgelegt wird, wie eine - umfangreiche - Aussage durch ein - suggestives - Kürzel ersetzt werden kann.

Definition - ⊆ $\quad x \subseteq y \quad \Leftrightarrow \quad \forall p : p \in x \Rightarrow p \in y$

Hier ist “ $\Leftrightarrow$ ” ein “definierender Äquivalenz-Pfeil” . Auf der linken Seite von “ $\Leftrightarrow$ ” befindet sich das neu definierte Kürzel. Im vorliegenden Fall ist es “$x \subseteq y$” mit den freien Variablen x, y. Auf der rechten Seite von " $\Leftrightarrow$ " befindet sich eine bereits bekannte mathematische Aussage. Im vorliegenden Falls ist es die Aussage "$\forall p : p \in x \Rightarrow p \in y$" . Diese Aussage enthält die freien Variablen x, y und die gebundene Variable p. Bei definierenden Äquivalenzen müssen die Liste der freien Variablen auf der linken und der rechten Seite von " $\Leftrightarrow$ " - bis auf die Reihenfolge - identisch sein, die linke Seite darf keine gebundenen Variablen enthalten und auf der linken Seite darf jede Variable höchstens einmal vorkommen. Die umgangssprachliche Formulierung von "$x \subseteq y$" ist "x TeilKlasse von y" . Die Negation "$\neg(x \subseteq y)$" wird durch das Kürzel "$x \not\subseteq y$" dargestellt und umgangssprachlich als "x keine TeilKlasse von y" formuliert.

Satz - $\subseteq$

a) $x \subseteq y \vee x \not\subseteq y$.

b) $\neg(x \subseteq y \wedge x \not\subseteq y)$.

c) $x \subseteq x$.

d) $x \subseteq y \wedge y \subseteq z \quad \Rightarrow \quad x \subseteq z$.

e) $x \subseteq y \wedge y \subseteq x \quad \Rightarrow \quad x = y$.

Mehr über den Umgang mit Variablen oder Parametern, Klassen-Terme

1) Gebundene und freie Variablen unterscheiden sich durch weitere, wichtige Ersetzungsregeln. So können in einem mathematischen Satz freie Variablen nicht nur durch andere Variablen, die nicht in der Liste Variablen vorkommen, ersetzt werden, sondern auch durch mathematische Parameter oder Klassen-Terme.

2) So entsteht aus **Satz - Vollständige Induktion** durch die Ersetzung $E \to \mathbb{N}$ der mathematische Satz

Satz - vI$\mathbb{N}$

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \\
\wedge & 0 \in \mathbb{N} \\
\wedge & \forall \lambda : \lambda \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + \lambda \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow & \\
 & \mathbb{N} = \mathbb{N}
\end{array}
$$

Die Richtigkeit von **Satz - vI$\mathbb{N}$** leuchtet unmittlebar ein, weil alle Prämissen und auch die Konklusion für sich genommen wahre Aussagen sind. Schwerer nachzuvollziehen ist die Wahrheit jenes mathematischen Satzes, der aus **Satz - Vollständige Induktion** durch die Ersetzung $E \to \mathbb{R}$ entsteht:

Satz - vI$\mathbb{R}$

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathbb{R} \subseteq \mathbb{N} \\
\wedge & 0 \in \mathbb{R} \\
\wedge & \forall \lambda : \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + \lambda \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow & \\
 & \mathbb{R} = \mathbb{N}
\end{array}
$$

Auch **Satz - vI$\mathbb{R}$** ist wahr - *obwohl die Konklusion* $\mathbb{R} = \mathbb{N}$ *offensichtlich falsch ist.* **Satz - vI$\mathbb{R}$** ist wahr, weil - mindestens - eine der Prämissen falsch ist. Hier ist es die Prämisse "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{N}$". In so einem Fall ist das logische "ex falso quodlibet" wirksam. Die Herleitung von Beliebigem aus falschen Voraussetzungen ist immer wahr. Anders formuliert: Da **Satz - vI$\mathbb{R}$** wahr und die Konklusion falsch ist *muss* die durch "$\wedge$" aus den Prämissen entstandene mathematische Aussage falsch sein. Da im vorliegenden Fall sowohl "$0 \in \mathbb{R}$" als auch "$\forall \lambda : \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 + \lambda \in \mathbb{R}$" wahr sind, muss die einzig verbleibende Prämisse "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{N}$" falsch sein.

3) Mathematische Aussagen werden aus den Grundaussagen mit Hilfe bestimmter, im Vorkurs nur angedeuteter, Regeln konstruiert. So ist etwa "$\omega \in x \wedge \omega \in y$" eine mathematische Aussage, die mit $\wedge$ aus zwei Grundaussagen entsteht. "$\omega \in x \wedge \omega \in y$ hat drei freie Variable ω, x, y und keine gebundene Variable. Aus dieser mathematischen Aussage kann durch "Bindung" einer der drei freien Variablen ein "Klassen-Term" erzeugt werden. Wird etwa "ω" "gebunden ", entsteht mit

$$\{\omega : \omega \in x \wedge \omega \in y\}$$

eine neue Klasse mit den freien Variablen x, y und der gebundenen Variablen ω. Man sagt, dass diese Klasse "von x und y" abhängt" und meint damit, dass je nach Wahl von x und y mit unterschiedlichen Klassen $\{\omega : \omega \in x \wedge \omega \in y\}$ zu rechnen ist. In der Mathematik wird diese Klasse mit einer eigenen Notation zu versehen:

$$x \cap y := \{\omega : \omega \in x \wedge \omega \in y\}.$$

Hier ist “ :=” eine “ definierende Gleichheit” , bei der der “ Term” - ein anderer Begriff für “ mathematisches Symbol, das eine Klasse darstellt” -, der auf der linken Seite beim “ :” steht, neu definiert wird und der auf der anderen Seite stehende Term bereits bekannt ist. “ $x \cap y$” heisst “ binärer Durchschnitt von x und y” . Sowohl bei dieser Wortwahl als auch bei der Notation “ $x \cap y$” kommt eine weitere Regel mathematischer Sprechweise zum Tragen. Terme enthalten bei der Definition nur freie Variable und jede freie Variable kommt genau einmal vor. Auch müssen die Listen der freien Variablen der Terme links und rechts von “ :=” bis auf die Reihenfolge gleich sein. Terme, die keine freien Variablen enthalten, sind Parameter.

4) Neben “ $x \cap y$” treten im Vorkurs noch weitere Klassen-Terme auf. Diese werden später an geeigneter Stelle präsentiert. Für den Umgang mit Klassen-Termen wie “ $x \cap y$” ist es wichtig zu wissen, wie sich “ $x \cap y$” in Bezug auf die Grundaussagen, allem voran in Bezug auf “ $p \in x \cap y$” verhält. Hierbei gibt es zwei “ Richtungen” zu betrachten, die mit “ A priori” und “ A posterori” bezeichnet werden.
“ A priori” geht davon aus, dass “ $p \in x \cap y$” wahr ist und verfolgt dann die Frage, welche anderen mathematischen Aussagen folgen. Hier kommt eine mathematische Regel zu Tragen, die Bezug auf den “ $x \cap y$” definierenden Klassen-Term “ $\{\omega : \omega \in x \wedge \omega \in y\}$” nimmt: Aus “ $p \in x \cap y$” folgt durch Ersetzen “ $p \in \{\omega : \omega \in x \wedge \omega \in y\}$” und hieraus generell via **Satz - ∈Menge**, “ p Menge” und dann jene mathematische Aussage, die dadurch entsteht, indem in “ $\{\omega : \omega \in x \wedge \omega \in y\}$” jene gebundene Variable, die zwischen “ {” und “ :” steht - im vorliegenden Fall ist “ ω” gemeint -, durch “ p” ersetzt wird. Es ergibt sich “ $p \in x \wedge p \in y$” .

Satz - $\in \cap$ - A priori

$p \in x \cap y$

$\Rightarrow$

p Menge

$\wedge$ $p \in x$

$\wedge$ $p \in y$

In Worten: Gilt “ $p \in x \cap y$” , so ist p eine Menge, die sowohl Element von x als auch von y ist.
“ A posteriori” geht von der Frage aus, welche Eigenschaften p haben muss, um $p \in x \cap y$ sicher zu stellen. Da p Element eines Klassen-Terms sein soll, ist via **Satz - ∈Menge** “ p Menge” erforderlich. Dann muss p noch

die "definierende Eigenschaft" von $x \cap y$, also von $\{\omega : \omega \in x \wedge \omega \in y\}$ haben. Hier ist gemeint, dass jene mathematische Aussage wahr sein muss, die dadurch entsteht, indem in der Aussage von "$\{\omega : \omega \in x \wedge \omega \in y\}$" jene gebundene Variable, die zwischen "$\{$" und ":" steht, durch "p" ersetzt wird. Also muss $p \in x \wedge p \in y$ gelten. Mit diesen beiden Forderungen ist den mathematischen Ansprüchen Rechnung getragen und es folgt

Satz - $\in \cap$ - A posteriori

p Menge

$\wedge \quad p \in x$

$\wedge \quad p \in y$

$\Rightarrow$

$p \in x \cap y$

Satz - $\in \cap$ - A priori und **Satz - $\in \cap$ - A posteriori** können umgangssprachlich so zusammengefasst werden: "p ist Element von $x \cap y$ genau dann, wenn p eine Menge ist, die sowohl Element von x als auch Element von y ist" . Oder auch: "$x \cap y$ besteht genau aus jenen Mengen, die sowohl Element von x als auch Element von y sind" .

5) Wie in 1) angesprochen, können in mathematischen Sätzen rigors freie Variablen durch Klassen-Terme ersetzt werden. So ist in **Satz - Vollständige Induktion** die rigorose Ersetzung $E \to x \cap y$ zulässig:

Satz - vI$x \cap y$

$x \cap y \subseteq \mathbb{N}$

$\wedge \quad 0 \in x \cap y$

$\wedge \quad \forall \lambda : \lambda \in x \cap y \Rightarrow 1 + \lambda \in x \cap y$

$\Rightarrow$

$x \cap y = \mathbb{N}$

Die Liste der freien Variablen von **Satz - vI$\cap$** ist x, y, die Liste der gebundenen Variablen ist λ. Nach der soeben vorgestellten Ersetzungsregel kann eine freie Variable - etwa y - durch einen Klassen-Term - etwa $u \cap z$ - ersetzt werden:

Satz - vI$x \cap (u \cap z)$

$x \cap (u \cap z) \subseteq \mathbb{N}$

$\wedge$ $0 \in x \cap (u \cap z)$

$\wedge$ $\forall \lambda : \lambda \in x \cap (u \cap z) \Rightarrow 1 + \lambda \in x \cap (u \cap z)$

$\Rightarrow$

$x \cap (u \cap z) = \mathbb{N}$

Weiteres "Ineinanderschachteln" mit den hier vorgestellten Ersetzungsregel ist möglich.

6) In der Mathematik ist eine weitere Ersetzungsregel für freie Variable von großer Bedeutung: In mathematischen Sätzen kann eine freie Variable durch eine andere, nicht in der Liste der gebundenen Variable vorkommende Variable ersetzt werden - unabhängig davon, ob die neue Variable bereits in der Liste der freien Variablen vorkommt oder nicht. So kann etwa in **Satz -** $\in \cap$ **- A priori** die Ersetzung $y \to x$ vorgenommen werden, da "x" ist keine gebundene Variable dieses mathematischen Satzes ist. Dass "x" in der Liste der freien Variablen x, y von **Satz -** $\in \cap$ **- A priori** vorkommt, ist für diese Ersetzungsregel irrelevant. Es resultiert der mathematische Satzes

Satz - $\in \cap, =$ **- A priori**

$p \in x \cap x$

$\Rightarrow$

p Menge

$\wedge$ $p \in x$

$\wedge$ $p \in x$

7) Die hier angesprochenen Ersetzungen können nicht nur einmal, sondern beliebig oft hintereinander regelkonform durchgeführt werden. Da es unendlich viele Parameter (und Klassen-Terme) gibt, generiert ein mathematischer Satz, der mindestens eine freie Variable enthält, durch fortgesetztes Ersetzen unendlich viele weitere mathematische Sätze.

2 $0+1+2+\ldots+n=*$

Die Aussage

$$\text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ gilt:} \quad 0+1+2+\ldots+n=\frac{(1+n)\cdot n}{2}, \tag{2}$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

Satz - Vollständige Induktion

$E \subseteq \mathbb{N}$

$\wedge \quad 0 \in E$

$\wedge \quad \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$

$\Rightarrow$

$E = \mathbb{N}$

und natürlich der ohne Zitat verwendete

Satz - $\mathbb{N}$ - A priori

a) 0 Menge.

b) $\mathbb{N}$ Menge.

c) $0 \in \mathbb{N}$.

d) $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad 1+n \in \mathbb{N}$.

zur Verfügung.

Bevor mit der eigentlichen Arbeit begonnen werden kann, muß Klarheit über die zu beweisende Aussage (2) bestehen. Dass es sich bei (2) um eine Gleichung handelt, die für alle natürlichen Zahlen gelten soll, ist unmittelbar einsichtig. Ebenso besteht kein Zweifel über die rechte Seite der Gleichung, die ein Quotient natürlicher Zahlen ist. Erklärungsbedarf besteht bei der Zeichensequenz

$$\text{“}0+1+2+\ldots+n\text{”} \tag{3}$$

auf der linken Seite der Gleichung. Diese Sequenz ist kein bereits definierter mathematischer Term, soll aber suggestiv darstellen, was gemeint ist. Generell liegt dieser und ähnlichen "auf Verständnis getrimmten" Sequenzen die bedenkliche Annahme zu Grunde, dass sich Verfasser und Leser darin einig sind, zu wissen "was gemeint ist", dass insbsondere kein Zweifel über das "und so weiter", das durch die drei Punkte "..." dargestellt wird, besteht. Im vorliegenden Fall ist gemeint, dass *alle natürlichen Zahlen* von 0 bis n addiert werden sollen. Mit diesem Hintergrundwissen - das nicht aus (3) ableitbar ist, sondern erraten oder eben erlernt sein muss - sind folgende beispielhafte Umsetzungen klar:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 7 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7,$$

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 3 = 0 + 1 + 2 + 3,$$
$$0 + 1 + 2 + \ldots + 2 = 0 + 1 + 2,$$
$$0 + 1 + 2 + \ldots + 1 = 0 + 1,$$

wobei die letzten drei Gleichungen gewöhnungsbedürftig sind. Es fehlt noch der Fall $n = 0$. Hier hilft nicht einmal die Formulierung "alle natürlichen Zahlen von 0 bis 0 addieren" weiter, denn wie soll eine einzige Zahl - hier ist es die 0 - "addiert" werden? Antwort gibt die dem Lernstoff zuzuordnende mathematische Konvention: "Das Ergebnis der Addition einer einzigen Zahl ist gleich dieser Zahl". So gilt im vorliegenden Fall,

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 0 = 0.$$

Weitere Beispiele dieser mathematischen Konvention folgen.

Mit diesen Vorüberlegungen kann nun eine präzise Definition von "$0 + 1 + 2 + \ldots + n$" für alle $n \in \mathbb{N}$ nachgereicht werden:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 0 = 0, \tag{4}$$
$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 + 1 + 2 + \ldots + (1 + n) = (0 + 1 + 2 + \ldots + n) + (1 + n). \tag{5}$$

(4) ist mathematische Konvention, in (5) wird in "rekursiver Weise" festgelegt, was unter "alle Zahlen von 0 bis n zu addieren" gemeint ist. Weiss ich bereits, was es heisst, "alle Zahlen von 0 bis 0 zu addieren" - dies ist nach (4) der Fall -,

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 0 = 0,$$

dann weiss ich mit (5), was es heisst, "alle Zahlen von 0 bis $0 + 1$ zu addieren", also "alle Zahlen von 0 bis 1 zu addieren", indem ich zur Summe der Zahlen von 0 bis 0 die neue Zahl "1" hinzuaddiere:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 1 = (0 + 1 + 2 + \ldots + 0) + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Damit weiss ich, wass es heisst, "alle Zahlen von 0 bis 1 zu addieren". Nun kann ich wieder (5) anwenden, und weiss, was es heisst "alle Zahlen von 0 bis $1 + 1$ zu addieren" , also "alle Zahlen von 0 bis 2 zu addieren" , indem ich zur Summe der Zahlen von 0 bis 1 die neue Zahl "2" hinzuaddiere:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 2 = (0 + 1 + 2 + \ldots + 1) + 2 = 1 + 2 = 3,$$

Ähnlich fortfahrend ist festgelegt, was es heisst, "alle Zahlen von 0 bis 3 zu addieren" ,

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 3 = (0 + 1 + 2 + \ldots + 2) + 3 = 3 + 3 = 6,$$

"alle Zahlen von 0 bis 4 zu addieren" ,

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 4 = (0 + 1 + 2 + \ldots + 3) + 4 = 6 + 4 = 10,$$

..., "alle Zahlen von 0 bis n zu addieren" , wenn "n" eine natürliche Zahl ist.

Ausgangspunkt des Nachweises von (2) mit **Satz - Vollständige Induktion** ist eine passende Wahl von E. E wird so gewählt, dass E aus genau jenen natürlichen Zahlen ω besteht, für die die Gleichung von (2) wahr ist, also für die

$$0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1 + \omega) \cdot \omega}{2},$$

gilt. Dies führt auf die Festlegung

$$E = \left\{ \omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1 + \omega) \cdot \omega}{2} \right\}. \tag{6}$$

Die eigentliche Arbeit besteht nun darin, die Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** für dieses E nachzuweisen. Wenn dies gelingt, dann ist Konklusion "$E = \mathbb{N}$" wahr und folgende Überlegung führt zum Nachweis von (2):

Falls $n \in \mathbb{N}$, dann, weil $E = \mathbb{N}$, auch $n \in E$. Also trifft auf n die definierende Eigenschaft von E zu, es gilt also mit der Ersetzung $\omega \to n$ in (6),

$$n \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2},$$

insbesondere

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}.$$

Nun zum Nachweis der Prämissen.

1.Prämisse " $E \subseteq \mathbb{N}$" . Es ist zu zeigen, dass jedes Element von E auch Element von $\mathbb{N}$ ist. Der Nachweis geht davon aus, dass für ein p die Aussage $p \in E$ gilt. Dann wird an Hand der Eigenschaften von E die Aussage $p \in \mathbb{N}$ nachgewiesen. In übersichtlicher Form geschrieben ergibt sich dieses Bild:

`Thema1` $\qquad p \in E$

`1:` Aus `Thema1` folgt via (6):

$$p \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + p = \frac{(1+p) \cdot p}{2}$$

`2:` Aus `1` folgt: $\qquad p \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema1`: $\qquad \forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$
Konsequenz per definitionem " $\subseteq$" : $\qquad E \subseteq \mathbb{N}$

Damit ist die 1.Prämisse nachgewiesen.

2.Prämisse " $0 \in E$" . Hier ist nachzuweisen, dass 0 eine Menge ist und dass auf 0 die definierenden Eigenschaften von E zutreffen. Bekannter Weise gilt

$$0 \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

woraus via **Satz - $\in$Menge**,

$$0 \text{ Menge}, \tag{8}$$

folgt. Gemäß Konvention gilt auch

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 0 = 0, \tag{9}$$

und es gilt

$$\frac{(1+0) \cdot 0}{2} = \frac{0}{2} = 0, \tag{10}$$

so dass aus (9), (10),

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 0 = \frac{(1+0) \cdot 0}{2}, \tag{11}$$

folgt. (8), (7), (11) können zusammengefasst werden:

$$0 \text{ Menge} \quad \wedge \quad 0 \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + 0 = \frac{(1+0) \cdot 0}{2} \tag{12}$$

Aus (12) folgt via (6), $0 \in E$. Damit ist die 2.Prämisse nachgewiesen.

3.Prämisse “$\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$” Hier kann davon ausgegangen werden, dass ein λ vorliegt, für das “ $\lambda \in E$” gilt. Auf λ treffen also die definierenden Eigenschaften von E zu, insbesondere gilt $\lambda \in \mathbb{N}$ und

$$0+1+2+\ldots+\lambda = \frac{(1+\lambda)\cdot\lambda}{2}, \tag{13}$$

zu. Aus “ $\lambda \in \mathbb{N}$” folgt bekannter Maßen “ $1+\lambda \in \mathbb{N}$” und somit auch “ $1+\lambda$ Menge” . Am schwierigsten ist es, die “ E” mitdefinierende Gleichung von (6) “ für $1+\lambda$” nachzuweisen. Hierzu ist zunächst zu klären, wie denn die zu beweisende Gleichung “ für $1+\lambda$” lautet. Antwort liefert Festlegung (6) von E mit Hilfe der Ersetzung $\omega \to 1+\lambda$: Zu zeigen ist

$$\boxed{\textbf{to do:}} \quad 0+1+2+\ldots+(1+\lambda) = \frac{(1+(1+\lambda))\cdot(1+\lambda)}{2}, \tag{14}$$

wobei hier zur Erhöhung der Lesbarkeit “ $1+\lambda$” in Klammern gesetzt ist. Es gilt die mathematische Konvention, dass Klassen-Terme stets geklammert werden dürfen. Nun ist also (14) nachzuweisen. Ohne Weiteres ist dies kaum allgemein möglich. Jedoch ist “ λ” keine “ beliebige Klasse” , sondern wie eingangs erwähnt, ein Element von E, für das insbesondere (13) gilt. Anders formuliert, darf (13) zum Beweis von (14) verwendet werden. Die Frage “ Wie?” wird durch (5) beantwortet. Wegen $\lambda \in \mathbb{N}$ gilt mit (5),

$$0+1+2+\ldots+(1+\lambda) = (0+1+2+\ldots+\lambda)+(1+\lambda).$$

Hier kann der Term “ $0+1+2+\ldots+\lambda$” via (13) durch “ $\frac{(1+\lambda)\cdot\lambda}{2}$” ersetzt werden und es folgt mit elementarer Arithmetik,

$$\begin{aligned}
0+1+2+\ldots+(1+\lambda) &= (0+1+2+\ldots+\lambda)+(1+\lambda)\\
&= \frac{(1+\lambda)\cdot\lambda}{2} + (1+\lambda) = \frac{(1+\lambda)\cdot\lambda}{2} + \frac{2\cdot(1+\lambda)}{2}\\
&= \frac{(1+\lambda)\cdot\lambda + 2\cdot(1+\lambda)}{2} = \frac{(1+\lambda)\cdot(\lambda+2)}{2}\\
&= \frac{(2+\lambda)\cdot(1+\lambda)}{2} = \frac{(1+(1+\lambda))\cdot(1+\lambda)}{2}.
\end{aligned}$$

Die Überlegungen zusammenfassend gilt also

$$\begin{aligned}
&1+\lambda \text{ Menge} \quad \wedge \quad 1+\lambda \in \mathbb{N}\\
&\wedge 0+1+2+\ldots+(1+\lambda) = (0+1+2+\ldots+\lambda)+(1+\lambda) = \frac{(1+(1+\lambda))\cdot(1+\lambda)}{2}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt via (6):

$$1+\lambda \in E.$$

Damit ist auch die 3.Prämisse bewiesen. Zur besseren Übersichtlichkeit soll die Argumentation noch einmal als Bearbeitung eines Themas dargestellt werden.

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E$

`1.1`: Aus `Thema2` folgt per definitionem "E": $\lambda \in \mathbb{N}$.

`1.2`: Aus `Thema2` folgt per definitionem "E":

$$0 + 1 + 2 + \ldots + \lambda = \frac{(1+\lambda)\cdot\lambda}{2}.$$

`2.1`: Aus `1`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}$.

`2.2`: $0 + 1 + 2 + \ldots + (1+\lambda) \stackrel{\texttt{1.1},(5)}{=} (0 + 1 + 2 + \ldots + \lambda) + (1+\lambda)$

$$\stackrel{\texttt{1.2}}{=} \frac{(1+\lambda)\cdot\lambda}{2} + (1+\lambda) = (1+\lambda)\cdot\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right) = (1+\lambda)\cdot\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{2}{2}\right)$$

$$= (1+\lambda)\cdot\frac{\lambda+2}{2} = \frac{(2+\lambda)\cdot(1+\lambda)}{2} = \frac{(1+(1+\lambda))\cdot(1+\lambda)}{2}.$$

`3`: Aus `2.1` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`4`: Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2`"$0 + 1 + 2 + \ldots + (1+\lambda) = \ldots = \frac{(1+(1+\lambda))\cdot(1+\lambda)}{2}$" folgt per definitionem "E": $1 + \lambda \in E$.

Ergo `Thema2`: $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

<u>**Konklusion “ $E = \mathbb{N}$” .**</u> Für die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1+\omega)\cdot\omega}{2}\right\},$$

wurde gezeigt:

`1`: $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2`: $0 \in E$.

`3`: $\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{15}$$

wahr. Im Hinblick auf (2) bedeutet dies:

`Thema3`	$n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema3` und aus (15) folgt:	$n \in E$.
`2` Aus `1` und aus (6) folgt:	$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$.

Ergo `Thema3`: $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$.

$\square$

Epilog. Gemäß der Ersetzungsregeln kann die freie Variable "E" in **Satz - Vollständige Induktion** durch den Klassen-Term

$$\text{“}\left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1+\omega)\cdot\omega}{2}\right\}\text{”}$$

ersetzt werden. Es resultiert der mathematische Satzes

Satz - VI1

$$\begin{array}{ll}
 & \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1+\omega)\cdot\omega}{2}\right\} \subseteq \mathbb{N} \\
\wedge & 0 \in \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1+\omega)\cdot\omega}{2}\right\} \\
\wedge & \forall\lambda : \lambda \in \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1+\omega)\cdot\omega}{2}\right\} \\
 & \quad \Rightarrow 1 + \lambda \in \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1+\omega)\cdot\omega}{2}\right\} \\
\Rightarrow & \\
 & \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1+\omega)\cdot\omega}{2}\right\} = \mathbb{N}
\end{array}$$

Satz - VI1 ist ohne jeden weiteren Beweis wahr. Das bedeutet aber nicht, dass die Konklusion

$$\text{“}\left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 + 1 + 2 + \ldots + \omega = \frac{(1+\omega)\cdot\omega}{2}\right\} = \mathbb{N}\text{”}\,, \tag{16}$$

wahr ist - pointiert formuliert:

> Das Vorlegen einer Liste von mit "$\wedge$" verknüpften Prämissen, aus der logisch einwandfrei eine Konklusion folgt, bedeutet noch lange nicht, dass diese Konklusion wahr.

Die Wahrheit von (16) kann aber mit **Satz - VI1** nachgewiesen werden, wenn man zeigt, dass die drei Prämissen wahr sind. Genau dies wurde in diesem Kapitel getan.

3 $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = *$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (1 + 2 \cdot n), \quad (17)$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

Satz - Vollständige Induktion

$$E \subseteq \mathbb{N}$$

$$\wedge \quad 0 \in E$$

$$\wedge \quad \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$$

$$\Rightarrow$$

$$E = \mathbb{N}$$

zur Verfügung. Die Bearbeitung erfolgt ähnlich wie in Kapitel "$0+1+2+\ldots+n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$" , jedoch in gestraffter Form.

Neuer Term. Der noch unbekannte Term "$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$" ist rekursiv definiert:

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 0^2 = 0, \quad (18)$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1+n)^2 = \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) + (1+n)^2, \quad (19)$$

so dass im Speziellen,

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 0^2 = 0,$$
$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 1^2 = \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 0^2\right) + 1^2 = 0 + 1 = 1,$$
$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 2^2 = \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 1^2\right) + 2^2 = 1 + 4 = 5,$$
$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 3^2 = \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 2^2\right) + 3^2 = 5 + 9 = 14,$$
$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 4^2 = \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 3^2\right) + 4^2 = 14 + 16 = 30,$$

oder suggestiver,

$$0^2 = 0,$$
$$0^2 + 1^2 = 0 + 1 = 1,$$

$$0^2+1^2+2^2=(0^2+1^2)+2^2=1+4=5,$$
$$0^2+1^2+2^2+3^2=(0^2+1^2+2^2)+3^2=5+9=14,$$
$$0^2+1^2+2^2+3^2+4^2=(0^2+1^2+2^2+3^2)+4^2=14+16=30.$$

Festlegung E. E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen bestehen, für die die Gleichung von (17) wahr ist:

$$E=\left\{\omega:\omega\in\mathbb{N}\wedge 0^2+1^2+2^2+\ldots+\omega^2=\frac{1}{6}\cdot\omega\cdot(1+\omega)\cdot(1+2\cdot\omega)\right\}. \quad (20)$$

1.Prämisse "$E\subseteq\mathbb{N}$".

`Thema1` $p\in E$.

2: Aus `Thema1` folgt via (20):
$$p\in\mathbb{N}\wedge 0^2+1^2+2^2+\ldots+p^2=\frac{1}{6}\cdot p\cdot(1+p)\cdot(1+2\cdot p).$$

3: Aus 2 folgt: $p\in\mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall p: p\in E\Rightarrow p\in\mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": $E\subseteq\mathbb{N}$.

2.Prämisse "$0\in E$". Via (18) gilt

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+0^2=0. \quad (21)$$

Auch gilt

$$\frac{1}{6}\cdot 0\cdot(1+0)\cdot(1+2\cdot 0)=\frac{1}{6}\cdot 0\cdot 1\cdot 1=0. \quad (22)$$

Aus (21), (22) folgt

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+0^2=\frac{1}{6}\cdot 0\cdot(1+0)\cdot(1+2\cdot 0). \quad (23)$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge}\wedge 0\in\mathbb{N}. \quad (24)$$

Aus (24) und (23) folgt via (20),

$$0\in E.$$

3.Prämisse "$\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$".

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E.$

`1.1:` Aus `Thema2` folgt via (20): $\lambda \in \mathbb{N}.$

`1.2:` Aus `Thema2` folgt via (20):

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+\lambda^2 = \frac{1}{6}\cdot\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(1+2\cdot\lambda).$$

`2.1:` Aus `1.1` folgt: $1+\lambda \in \mathbb{N}.$

`2.2:` $0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+\lambda)^2$

$$\overset{\texttt{1.1},(19)}{=} (0^2+1^2+2^2+\ldots+\lambda^2)+(1+\lambda)^2$$

$$\overset{\texttt{1.2}}{=} \frac{1}{6}\cdot\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(1+2\cdot\lambda)+(1+\lambda)^2$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(1+2\cdot\lambda)+\frac{6\cdot(1+\lambda^2)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\big(\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(1+2\cdot\lambda)+6\cdot(1+\lambda)^2\big)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot(\lambda\cdot(1+2\cdot\lambda)+6\cdot(1+\lambda))$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot\big(\lambda+2\cdot\lambda^2+6+6\cdot\lambda\big)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot\big(6+7\cdot\lambda+2\cdot\lambda^2\big) = \ldots?,$$

...und es ist an dieser Stelle nicht ohne Weiteres klar, wie hier weitergerechnet werden soll. Was ist das Ziel der Umformung? Das Ziel ist die "bestimmende Gleichung" von E in (20) für "$1+\lambda$"an Stelle von "λ" nachzuweisen:

to do: $0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+\lambda)^2$

$$= \frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot(1+\lambda)), \quad (25)$$

Nach aktueller Rechnung steht aber

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+\lambda)^2 = \frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot\big(6+7\cdot\lambda+2\cdot\lambda^2\big)\,, \quad (26)$$

zur Verfügung. Rechenfehler? Aufgabe nicht lösbar, da dahinter stehender mathematischer Satz falsch? Oder sind die rechten Seiten von (25), (26) womöglich gleich? In der Tat zeigt sich, wenn von dem angestrebten Term ausgegangen wird,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot(1+\lambda))\\
&\qquad=\frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(1+2+2\cdot\lambda)\\
&\qquad=\frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+2\cdot\lambda)=\frac{1}{6}\cdot(2+2\cdot\lambda+\lambda+\lambda^2)\cdot(3+2\cdot\lambda)\\
&\qquad=\frac{1}{6}\cdot(2+3\cdot\lambda+\lambda^2)\cdot(3+2\cdot\lambda)\\
&\qquad=\frac{1}{6}\cdot(6+9\cdot\lambda+3\cdot\lambda^2+4\cdot\lambda+6\cdot\lambda^2+2\cdot\lambda^3)\\
&\qquad=\frac{1}{6}\cdot(6+13\cdot\lambda+9\cdot\lambda^2+2\cdot\lambda^3),
\end{aligned}\tag{27}$$

und wenn vom rechten Term von (26) ausgegangen wird,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot\big(6+7\cdot\lambda+2\cdot\lambda^2\big)\\
&\qquad=\frac{1}{6}\cdot(6+7\cdot\lambda+2\cdot\lambda^2+6\cdot\lambda+7\cdot\lambda^2+2\cdot\lambda^3)\\
&\qquad=\frac{1}{6}\cdot(6+13\cdot\lambda+9\cdot\lambda^2+2\cdot\lambda^3),
\end{aligned}\tag{28}$$

so dass in der Tat,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot\big(6+7\cdot\lambda+2\cdot\lambda^2\big)&\overset{(28)}{=}\frac{1}{6}\cdot(6+13\cdot\lambda+9\cdot\lambda^2+2\cdot\lambda^3)\\
&\overset{(27)}{=}\frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot(1+\lambda)).
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot\big(6+7\cdot\lambda+2\cdot\lambda^2\big)\\
&\qquad=\frac{1}{6}\cdot(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot(1+\lambda)).
\end{aligned}\tag{29}$$

Mit dem Ergebnis dieser Nebenrechnung kann in `Thema2` zielgerichtet weiter umgeformt werden ...

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E.$

...

`2.2:` $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1+\lambda)^2$

$= \ldots = \frac{1}{6} \cdot (1+\lambda) \cdot \big(6 + 7 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda^2\big)$

$\stackrel{(29)}{=} \frac{1}{6} \cdot (1+\lambda) \cdot (1 + (1+\lambda)) \cdot (1 + 2 \cdot (1+\lambda)).$

`3:` Aus `2.1` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`4:` Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2`“$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1+\lambda)^2 = \ldots = \frac{1}{6} \cdot (1+\lambda) \cdot (1 + (1+\lambda)) \cdot (1 + 2 \cdot (1+\lambda))$”

folgt per definitionem “E” : $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema2`: $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E.$

<u>**Konklusion " $E = \mathbb{N}$" .**</u> Für die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + \omega^2 = \frac{1}{6} \cdot \omega \cdot (1 + \omega) \cdot (1 + 2 \cdot \omega)\right\},$$

wurde gezeigt:

`1:` $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` $0 \in E$.

`3:` $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{30}$$

wahr. Im Hinblick auf (17) bedeutet dies:

`Thema3`	$n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema3` und aus (30) folgt:	$n \in E$.
`2` Aus `1` und aus (20) folgt:	$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n)$.

Ergo `Thema3`:

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n).$$

□

4 $0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = *$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 3^2 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (1+n)^2, \quad (31)$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

<u>Satz - Vollständige Induktion</u>

$$\begin{array}{ll} & E \subseteq \mathbb{N} \\ \wedge & 0 \in E \\ \wedge & \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E \\ \Rightarrow & \\ & E = \mathbb{N} \end{array}$$

zur Verfügung. Die Bearbeitung erfolgt ähnlich wie in Kapitel "$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (1 + 2 \cdot n)$".

<u>Neuer Term.</u> Der noch unbekannte Term "$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$" ist rekursiv definiert:

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 0^3 = 0, \quad (32)$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (1+n)^3 = \left(0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right) + (1+n)^3, \quad (33)$$

so dass im Speziellen,

$$\begin{aligned} 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 0^3 &= 0, \\ 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 1^3 &= \left(0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 0^3\right) + 1^3 = 0 + 1 = 1, \\ 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 2^3 &= \left(0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 1^3\right) + 2^3 = 1 + 8 = 9, \\ 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 3^3 &= \left(0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 2^3\right) + 3^3 = 9 + 27 = 36, \\ 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 4^3 &= \left(0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 3^3\right) + 4^3 = 36 + 64 = 100, \end{aligned}$$

oder suggestiver,

$$\begin{aligned} 0^3 &= 0, \\ 0^3 + 1^3 &= 0 + 1 = 1, \end{aligned}$$

$$0^3 + 1^3 + 2^3 = (0^3 + 1^3) + 2^3 = 1 + 8 = 9,$$
$$0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = (0^3 + 1^3 + 2^3) + 3^3 = 9 + 27 = 36,$$
$$0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3) + 4^3 = 36 + 64 = 100.$$

Festlegung E. E soll aus genau jenen natürlichen Zahle bestehen, für die die Gleichung von (31) wahr ist:

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + \omega^3 = \frac{1}{4} \cdot \omega^2 \cdot (1 + \omega)^2\right\}. \tag{34}$$

1.Prämisse "$E \subseteq \mathbb{N}$".

`Thema1`	$p \in E$.
2: Aus `Thema1` folgt via (34):	$p \in \mathbb{N} \wedge 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + p^3 = \frac{1}{4} \cdot p^2 \cdot (1 + p)^2$.
3: Aus 2 folgt:	$p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": $E \subseteq \mathbb{N}$.

2.Prämisse "$0 \in E$". Via (32) gilt

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 0^3 = 0. \tag{35}$$

Auch gilt

$$\frac{1}{4} \cdot 0^2 \cdot (1 + 0)^2 = \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot 1 = 0. \tag{36}$$

Aus (35), (36) folgt

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + 0^3 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 \cdot (1 + 0)^2. \tag{37}$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge} \wedge 0 \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Aus (38) und (37) folgt via (34),

$$0 \in E.$$

3.Prämisse "$\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$" .

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E$.

`1.1`: Aus `Thema2` folgt via (34): $\lambda \in \mathbb{N}$.

`1.2`: Aus `Thema2` folgt via (34):

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + \lambda^2 = \frac{1}{4} \cdot \lambda^2 \cdot (1+\lambda)^2.$$

`2.1`: Aus `1.1` folgt: $1+\lambda \in \mathbb{N}$.

`2.2`: $0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (1+\lambda)^3$

$$\stackrel{1.1,(33)}{=} (0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + \lambda^3) + (1+\lambda)^3$$

$$\stackrel{1.2}{=} \frac{1}{4} \cdot \lambda^2 \cdot (1+\lambda)^2 + (1+\lambda)^3$$

$$= \left(\frac{1}{4} \cdot \lambda^2 + (1+\lambda)\right) \cdot (1+\lambda)^2 = \frac{1}{4} \cdot \big(\lambda^2 + 4 \cdot (1+\lambda)\big) \cdot (1+\lambda)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \big(\lambda^2 + 4 + 4 \cdot \lambda\big) \cdot (1+\lambda)^2 = \frac{1}{4} \cdot \big(\lambda^2 + 4 \cdot \lambda + 4\big) \cdot (1+\lambda)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\lambda+2)^2 \cdot (1+\lambda)^2 = \frac{1}{4} \cdot (1+\lambda)^2 \cdot (\lambda+2)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (1+\lambda)^2 \cdot (2+\lambda)^2 = \frac{1}{4} \cdot (1+\lambda)^2 \cdot (1+1+\lambda)^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (1+\lambda)^2 \cdot (1+(1+\lambda))^2.$$

`3`: Aus `2.1` folgt via **Satz -** $\in$**Menge**: $1+\lambda$ Menge.

`4`: Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2`"$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (1+\lambda)^3 = \ldots = \frac{1}{4} \cdot (1+\lambda)^2 \cdot (1+(1+\lambda))^2$"

folgt per definitionem "E" : $1+\lambda \in E$.

Ergo `Thema2`: $\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$.

<u>Konklusion “ $E = \mathbb{N}$” .</u> Für die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + \omega^3 = \frac{1}{4} \cdot \omega^2 \cdot (1+\omega)^2\right\},$$

wurde gezeigt:

`1:` $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` $0 \in E$.

`3:` $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{39}$$

wahr. Im Hinblick auf (31) bedeutet dies:

`Thema3`	$n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema3` und aus (39) folgt:	$n \in E$.
`2` Aus `1` und aus (34) folgt:	$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (1+n)^2$.

Ergo `Thema3`: $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (1+n)^2$.

□

5 $0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (1+n) = *$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (1+n) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (2+n), \quad (40)$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

Satz - Vollständige Induktion

$$E \subseteq \mathbb{N}$$

$$\wedge \quad 0 \in E$$

$$\wedge \quad \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$$

$$\Rightarrow$$

$$E = \mathbb{N}$$

zur Verfügung. Die Bearbeitung erfolgt ähnlich wie in Kapitel "$0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (1+n)^2$".

Neuer Term. Der noch unbekannte Term "$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (1+n)$" ist rekursiv definiert:

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 0 \cdot (1+0) = 0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} &\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + (1+n) \cdot (1+(1+n)) \\ &\qquad = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (1+n)) + (1+n) \cdot (1+(1+n)), \quad (42) \end{aligned}$$

so dass im Speziellen,

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 0 \cdot (1+0) = 0,$$

$$\begin{aligned} &0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot (1+1) \\ &\qquad = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 0 \cdot (1+0)) + 1 \cdot (1+1) = 0 + 1 \cdot 2 = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (1+2) \\ &\qquad = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 1 \cdot (1+1)) + 2 \cdot (1+2) = 2 + 2 \cdot 3 = 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 3 \cdot (1+3) \\ &= (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot (1+2)) + 3 \cdot (1+3) = 8 + 3 \cdot 4 = 20,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 4 \cdot (1+4) \\ &= (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 3 \cdot (1+3)) + 4 \cdot (1+4) = 20 + 4 \cdot 5 = 40,\end{aligned}$$

oder suggestiver,

$$0 \cdot 1 = 0,$$
$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 + 2 = 2,$$
$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2) + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8,$$
$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3) + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = 20,$$
$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4) + 4 \cdot 5 = 20 + 20 = 40.$$

Festlegung E**.** E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen bestehen, für die die Gleichung von (40) wahr ist:

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + \omega \cdot (1 + \omega) = \frac{1}{3} \cdot \omega \cdot (1 + \omega) \cdot (2 + \omega)\right\}. \tag{43}$$

1.Prämisse " $E \subseteq \mathbb{N}$ **" .**

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad p \in E.$

`2:` Aus `Thema1` folgt via (43):

$$p \in \mathbb{N} \wedge 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + p \cdot (1 + p) = \frac{1}{3} \cdot p \cdot (1 + p) \cdot (2 + p).$$

`3:` Aus `2` folgt: $\qquad p \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema1`: $\qquad \forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}.$

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$" : $\qquad E \subseteq \mathbb{N}.$

2.Prämisse " $0 \in E$ **" .** Via (41) gilt

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 0 \cdot (1 + 0) = 0. \tag{44}$$

Auch gilt

$$\frac{1}{3} \cdot 0 \cdot (1 + 0) \cdot (2 + 0) = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0. \tag{45}$$

Aus (44), (45) folgt

$$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + 0 \cdot (1 + 0) = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot (1 + 0) \cdot (2 + 0). \tag{46}$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge} \wedge 0 \in \mathbb{N}. \tag{47}$$

Aus (47) und (46) folgt via (43),

$$0 \in E.$$

3.Prämisse "$\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$" .

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E$.

`1.1:` Aus `Thema2` folgt via (43): $\lambda \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `Thema2` folgt via (43):

$$0\cdot 1 + 1\cdot 2 + \ldots + \lambda\cdot(1+\lambda) = \frac{1}{3}\cdot\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda).$$

`2.1:` Aus `1` folgt: $1+\lambda \in \mathbb{N}$.

`2.2:`
$$\begin{aligned}
&0\cdot 1 + 1\cdot 2 + \ldots + (1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\\
&\overset{\texttt{1.1},(42)}{=} (0\cdot 1 + 1\cdot 2 + \ldots + \lambda\cdot(1+\lambda)) + (1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\\
&\overset{\texttt{1.2}}{=} \frac{1}{3}\cdot\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda) + (1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\\
&= \frac{1}{3}\cdot\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda) + (1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\\
&= \left(\frac{1}{3}\cdot\lambda + 1\right)\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda) = \frac{1}{3}\cdot(\lambda+3)\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\\
&= \frac{1}{3}\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(\lambda+3) = \frac{1}{3}\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+\lambda)\\
&= \frac{1}{3}\cdot(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(3+\lambda)\\
&= \frac{1}{3}\cdot(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(2+(1+\lambda)).
\end{aligned}$$

`3:` Aus `2.1` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1+\lambda$ Menge.

`4:` Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2`"$0\cdot 1 + 1\cdot 2 + \ldots + (1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda)) = \ldots = \frac{1}{3}\cdot(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(2+(1+\lambda))$"

folgt per definitionem "E" : $1+\lambda \in E$.

Ergo `Thema2`: $\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$.

<u>Konklusion “$E = \mathbb{N}$” .</u> Für die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + \omega \cdot (1 + \omega) = \frac{1}{3} \cdot \omega \cdot (1 + \omega) \cdot (2 + \omega)\right\},$$

wurde gezeigt:

`1:` $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` $0 \in E$.

`3:` $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{48}$$

wahr. Im Hinblick auf (40) bedeutet dies:

$\boxed{\texttt{Thema3}}$	$n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema3` und aus (48) folgt:	$n \in E$.
`2` Aus `1` und aus (43) folgt:	$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (1 + n) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (2 + n)$.

Ergo `Thema3`:

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (1 + n) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (2 + n).$$

$\square$

6 $0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (1+n) \cdot (2+n) = *$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (1+n) \cdot (2+n) = \frac{1}{4} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (2+n) \cdot (3+n), \tag{49}$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

Satz - Vollständige Induktion

$$\begin{array}{ll} & E \subseteq \mathbb{N} \\ \wedge & 0 \in E \\ \wedge & \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E \\ \Rightarrow & \\ & E = \mathbb{N} \end{array}$$

zur Verfügung. Die Bearbeitung erfolgt ähnlich wie in Kapitel "$0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (1+n) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (2+n)$".

Neuer Term. Der noch unbekannte Term "$0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (1+n) \cdot (2+n)$" ist rekursiv definiert:

$$0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 0 \cdot (1+0) \cdot (2+0) = 0, \tag{50}$$

$$\begin{aligned} &\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\qquad 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + (1+n) \cdot (1+(1+n)) \cdot (2+(1+n)) \\ &\qquad\quad = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (1+n) \cdot (2+n)) \\ &\qquad\qquad + (1+n) \cdot (1+(1+n)) \cdot (2+(1+n)), \end{aligned} \tag{51}$$

so dass im Speziellen,

$$0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 0 \cdot (1+0) \cdot (2+0) = 0,$$

$$\begin{aligned} &0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1) \\ &\quad = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 0 \cdot (1+0) \cdot (2+0)) + 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1) \\ &\qquad = 0 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0 + 6 = 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot (1+2) \cdot (2+2) \\
&\quad = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)) + +2 \cdot (1+2) \cdot (2+2) \\
&\qquad = 6 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 + 24 = 30,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 3 \cdot (1+3) \cdot (2+3) \\
&\quad = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot (1+2) \cdot (2+2)) + 3 \cdot (1+3) \cdot (2+3) \\
&\qquad = 30 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 30 + 60 = 90,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 4 \cdot (1+4) \cdot (2+4) \\
&\quad = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 3 \cdot (1+3) \cdot (2+3)) + 4 \cdot (1+4) \cdot (2+4) \\
&\qquad = 90 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 90 + 120 = 210,
\end{aligned}$$

oder suggestiver,

$$0 \cdot 1 \cdot 2 = 0,$$

$$0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0 + 6 = 6,$$

$$0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3) + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 + 24 = 30,$$

$$\begin{aligned}
&0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \\
&\qquad = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4) + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 30 + 60 = 90,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \\
&\qquad = (0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5) + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 90 + 120 = 210.
\end{aligned}$$

Festlegung E. E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen bestehen, für die die Gleichung von (49) wahr ist:

$$\begin{aligned}
E = \Big\{ &\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + \omega \cdot (1+\omega) \cdot (2+\omega) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \omega \cdot (1+\omega) \cdot (2+\omega) \cdot (3+\omega) \Big\}. \qquad (52)
\end{aligned}$$

1.Prämisse "$E \subseteq \mathbb{N}$".

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $p \in E$.

2: Aus `Thema1` folgt via (52):

$$p \in \mathbb{N} \wedge 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + p \cdot (1+p) \cdot (2+p) = \frac{1}{4} \cdot p \cdot (1+p) \cdot (2+p) \cdot (3+p).$$

3: Aus 2 folgt: $p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": $E \subseteq \mathbb{N}$.

2.Prämisse "$0 \in E$". Via (50) gilt

$$0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 0 \cdot (1+0) \cdot (2+0) = 0. \tag{53}$$

Auch gilt

$$\frac{1}{4} \cdot 0 \cdot (1+0) \cdot (2+0) \cdot (3+0) = \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0. \tag{54}$$

Aus (53), (54) folgt

$$0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + 0 \cdot (1+0) \cdot (2+0) = \frac{1}{4} \cdot 0 \cdot (1+0) \cdot (2+0) \cdot (3+0). \tag{55}$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge} \wedge 0 \in \mathbb{N}. \tag{56}$$

Aus (56) und (55) folgt via (52),

$$0 \in E.$$

3.Prämisse "$\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$".

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E$.

`1.1`: Aus `Thema2` folgt via (52): $\lambda \in \mathbb{N}$.

`1.2`: Aus `Thema2` folgt via (52):

$$0\cdot 1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots+\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda) = \frac{1}{4}\cdot\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+\lambda).$$

`2.1`: Aus `1.1` folgt: $1+\lambda \in \mathbb{N}$.

`2.2`:
$$\begin{aligned}
&0\cdot 1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots+(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(2+(1+\lambda))\\
&\overset{1.1,(51)}{=}(0\cdot 1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots+\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda))\\
&\qquad+(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(2+(1+\lambda))\\
&\overset{1.2}{=}\frac{1}{4}\cdot\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+\lambda)\\
&\qquad+(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(2+(1+\lambda))\\
&=\frac{1}{4}\cdot\lambda\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+\lambda)+(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+\lambda)\\
&=\left(\frac{1}{4}\cdot\lambda+1\right)\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+\lambda)\\
&=\frac{1}{4}\cdot(\lambda+4)\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+\lambda)\\
&=\frac{1}{4}\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+\lambda)\cdot(\lambda+4)\\
&=\frac{1}{4}\cdot(1+\lambda)\cdot(2+\lambda)\cdot(3+\lambda)\cdot(4+\lambda)\\
&=\frac{1}{4}\cdot(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(2+(1+\lambda))\cdot(3+(1+\lambda)).
\end{aligned}$$

`3`: Aus `2.1` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1+\lambda$ Menge.

`4`: Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2` "$0\cdot1\cdot2+1\cdot2\cdot3+\ldots+(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(2+(1+\lambda)) = \ldots = \frac{1}{4}\cdot(1+\lambda)\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(2+(1+\lambda))\cdot(3+(1+\lambda))$"
folgt per definitionem "E" : $1+\lambda \in E$.

Ergo `Thema2`: $\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$.

Konklusion "$E = \mathbb{N}$". Für die spezielle Klasse

$$E = \Big\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + \omega \cdot (1+\omega) \cdot (2+\omega) = \frac{1}{4} \cdot \omega \cdot (1+\omega) \cdot (2+\omega) \cdot (3+\omega)\Big\},$$

wurde gezeigt:

`1:` $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` $0 \in E$.

`3:` $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{57}$$

wahr. Im Hinblick auf (40) bedeutet dies:

`Thema3`	$n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema3` und aus (57) folgt:	$n \in E$.
`2` Aus `1` und aus (52) folgt: $0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (1+n) \cdot (2+n) = \frac{1}{4} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (2+n) \cdot (3+n)$.	

Ergo `Thema3`:

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (1+n) \cdot (2+n) = \frac{1}{4} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (2+n) \cdot (3+n).$$

□

7 $0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = *$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n), \quad (58)$$

soll bewiesen werden.

Hier sollen *zwei* Möglichkeiten der Bearbeitung vorgestellt werden. In jedem Fall bedarf es der Festlegung des noch unbekannten Terms “ $0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot n)^2$” .

<u>**Neuer Term.**</u> Der noch unbekannte Term “ $0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot n)^2$” ist rekursiv definiert:

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (1 + n)^2 \\ &= \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2\right) + (2 \cdot (1 + n))^2,\end{aligned}$$

so dass im Speziellen,

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2 = 0,$$

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 1)^2 = \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2\right) + (2 \cdot 1)^2 = 0 + 4 = 4.$$

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 2)^2 = \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 1)^2\right) + (2 \cdot 2)^2 = 4 + 16 = 20,$$

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 3)^2 = \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 2)^2\right) + (2 \cdot 3)^2 = 20 + 36 = 56,$$

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 4)^2 = \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 3)^2\right) + (2 \cdot 4)^2 = 56 + 64 = 120,$$

oder suggestiver,

$$0^2 = 0,$$

$$0^2 + 2^2 = 0 + 4 = 4,$$

$$0^2 + 2^2 + 4^2 = \left(0^2 + 2^2\right) + 4^2 = 4 + 16 = 20,$$

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 = \left(0^2 + 2^2 + 4^2\right) + 6^2 = 20 + 36 = 56,$$

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 = 8^2 = \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2\right) + 8^2 = 56 + 64 = 120.$$

<u>**Bearbeitung 1**</u> Vollständige Induktion.

Vorgehensweise wie in Kapitel “ $0^2 + 1^1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (1+2 \cdot n)$” . Ausarbeitung als UE.

Bearbeitung 2 Rechnen und Verwenden bereits bekannter Ergebnisse.
Umgangssprachlich formuliert werden bei "$0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot n)^2$" "die Quadrate aller geraden, natürlichen Zahlen von 0 bis $2 \cdot n$ addiert". Diese Beobachtung legt die Richtigkeit folgender Umformumg für alle $n \in \mathbb{N}$ nahe:

$$\begin{aligned} 0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot n)^2 &= (2\cdot 0)^2+(2\cdot 1)^2+(2\cdot 2)^2+\ldots+(2\cdot n)^2 \\ &= 4\cdot 0^2+4\cdot 1^2+4\cdot 2^2+\ldots+4\cdot n^2 \\ &= 4\cdot\left(0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2\right). \end{aligned}$$

Doch ist diese Argumentation zulässig ? Noch steht keine allgemeine Regel für diese Umformung, etwa mit Hilfe des Summensymbols "$\sum$", zur Verfügung. Also muss die Richtigkeit dieser Gleichung erst noch bewiesen werden. Dies gelingt mit vollständiger Induktion.

Satz - vI - 1

$n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$

$$0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot n)^2 = 4\cdot(0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2).$$

Beweis als UE.

Mit Hilfe von **Satz - vI - 1** und der bereits bekannten Aussage (17) ergibt nun eine einfache Rechnung,

$$\begin{aligned} \forall n : n\in\mathbb{N} \Rightarrow 0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot n)^2 &\overset{\textbf{Satz-vI-1}}{=} 4\cdot\left(0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2\right) \\ &\overset{(17)}{=} 4\cdot\frac{1}{6}\cdot n\cdot(1+n)\cdot(1+2\cdot n) = \frac{4}{6}\cdot n\cdot(1+n)\cdot(1+2\cdot n) \\ &= \frac{2}{3}\cdot n\cdot(1+n)\cdot(1+2\cdot n). \end{aligned}$$

$\square$

8 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2 = *$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 2 \cdot n),$$

soll bewiesen werden.

Wie im vorhergehenden Kapitel sollen auch hier zwei Möglichkeiten der Bearbeitung vorgestellt werden. In jedem Fall bedarf es der Festlegung des noch unbekannten Terms “$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2$” .

Neuer Term. Der noch unbekannte Term “$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2$” ist rekursiv definiert:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} \forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow {} & 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot (1 + n))^2 \\ & = \big(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2\big) + (1 + 2 \cdot (1 + n))^2, \end{aligned}$$

so dass erstmalig im Vorkurs eine Summe nicht mit “0” beginnt und

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 1)^2 &= \big(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2\big) + (1 + 2 \cdot 1)^2 \\ &= 1 + 3^2 = 1 + 9 = 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 2)^2 &= \big(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 1)^2\big) + (1 + 2 \cdot 2)^2 \\ &= 10 + 5^2 = 10 + 25 = 35, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 3)^2 &= \big(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 2)^2\big) + (1 + 2 \cdot 3)^2 \\ &= 35 + 7^2 = 35 + 49 = 84, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 4)^2 &= \big(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 3)^2\big) + (1 + 2 \cdot 4)^2 \\ &= 84 + 9^2 = 84 + 81 = 165, \end{aligned}$$

oder suggestiver,

$$\begin{gathered} 1^2 = 1, \\ 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10, \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 = \big(1^2 + 3^2\big) + 5^2 = 10 + 25 = 35, \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = \big(1^2 + 3^2 + 5^2\big) + 7^2 = 35 + 49 = 84, \\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = \big(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2\big) + 9^2 = 84 + 81 = 165. \end{gathered}$$

Bearbeitung 1 Vollständige Induktion.

Vorgehensweise wie in Kapitel " $0^2+1^1+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}\cdot n\cdot(1+n)\cdot(1+2\cdot n)$" . Ausarbeitung als UE.

Bearbeitung 2 Rechnen un Verwenden bereits bekannter Ergebnisse. Umgangssprachlich formuliert werden bei " $1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot n)^2$" " die Quadrate aller ungeraden, natürlichen Zahlen von 1 bis $1+2\cdot n$ addiert" . Diese Beobachtung legt es nahe, zu dieser Summe noch die Summe " der Quadrate aller geraden natürlichen Zahlen von 0 bis $2\cdot n$" hinzuzuaddieren, um als Ergebnis " die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen von 0 bis $1+2\cdot n$" zu erhalten:

$$\begin{aligned}&\left(1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot n)^2\right)+\left(0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot n)^2\right)\\&\qquad=0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+(2\cdot n)^2+(1+2\cdot n)^2\\&\qquad\qquad=0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+2\cdot n)^2.\end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung muss erst noch bewiesen werden. Dies gelingt mit vollständiger Induktion.

Satz - vI - 2

$$n\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\left(1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot n)^2\right)\\&\qquad+\left(0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot n)^2\right)\\&\qquad\qquad=0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+2\cdot n)^2\end{aligned}$$

Beweis als UE.

In der Gleichung von **Satz - vI - 2** können zwei der drei Terme auf Grund bereits verfügbarer Ergebnisse durch Produkte rationaler Zahlen ersetzt werden. So gilt via (58) die unmittelbar einsetzbare Gleichung

$$\forall n:n\in\mathbb{N}\Rightarrow 0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot n)^2=\frac{2}{3}\cdot n\cdot(1+n)\cdot(1+2\cdot n),\qquad(59)$$

während via (17) die " Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen von 0 bis n" anderwertig berechnet werden kann:

$$\forall n:n\in\mathbb{N}\Rightarrow 0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}\cdot n\cdot(1+n)\cdot(1+2\cdot n).\qquad(60)$$

Die Aussage (60) ist für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig. Also im Speziellen auch für alle natürlichen Zahlen, welche die Form "$1 + 2 \cdot n$" mit $n \in \mathbb{N}$ haben. Mit Ersetzen ergibt sich also aus (60),

$$\begin{aligned}\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow\ & 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (1 + (1 + 2 \cdot n)) \cdot (1 + 2 \cdot (1 + 2 \cdot n)) \\ &= \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (2 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 4 \cdot n). \end{aligned} \tag{61}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow\ & \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (2 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 4 \cdot n) \\ &\overset{(61)}{=} 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2 \\ &\overset{\textbf{Satz-vI-2}}{=} \left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots (1 + 2 \cdot n)^2\right) + \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2\right) \\ &\overset{(59)}{=} \left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots (1 + 2 \cdot n)^2\right) + \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow\ & 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (2 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 4 \cdot n) - \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n), \end{aligned} \tag{62}$$

so dass

$$\begin{aligned}
&\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2 \\
&\quad \overset{(62)}{=} \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (2 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 4 \cdot n) - \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \\
&\quad = \frac{2}{6} \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (1 + n) \cdot (3 + 4 \cdot n) - \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \\
&\quad = \frac{1}{3} \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (1 + n) \cdot (3 + 4 \cdot n) - \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \\
&\quad = \frac{1}{3} \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 4 \cdot n) - \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \\
&\quad = \frac{1}{3} \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot ((3 + 4 \cdot n) - 2 \cdot n) \\
&\quad = \frac{1}{3} \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 4 \cdot n - 2 \cdot n) \\
&\quad = \frac{1}{3} \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 2 \cdot n)
\end{aligned}$$

folgt. $\square$

9 $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = *$

Die Aussage

Für jede reelle Zahl x und jede natürliche Zahl n gilt:

$$x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{-1 + x^{1+n}}{-1 + x}, \tag{63}$$

soll bewiesen werden. Anders als in den bisherigen Betrachtungen treten in der Gleichung von (63) *zwei* Variablen - nämlich "x" und "n" - auf. Die Variable x ist eine reelle Zahl$\neq$ 1, die Variable n ist eine natürliche Zahl. Die vollständige Induktion erfolgt bei "vorgegebenem x" bezüglich n, so dass möglicherweise unendlich viele Induktions-Beweise - nämlich für jedes reelle $x \neq 1$ einer - durchgeführt werden müssen. Dies ist glücklicher Weise nicht der Fall, da die Klasse "E" in

Satz - Vollständige Induktion

$E \subseteq \mathbb{N}$

$\wedge$ $0 \in E$

$\wedge$ $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$

$\Rightarrow$

$E = \mathbb{N}$

"von x abhängen" darf. Präzise formuliert wird in diesem Abschnitt

Satz - geoRei

$x \neq 1$

$\wedge$ $x \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $E = \left\{ \omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1 + x + x^2 + \ldots + x^\omega = \frac{-1 + x^{1+\omega}}{-1 + x} \right\}$

$\Rightarrow$

$E = \mathbb{N}$

bewiesen.

Neuer Term. Der noch unbekannte Term "$1+x+x^2+\ldots+x^n$" ist *für jedes* x rekursiv definiert:

$$1+x+x^2+\ldots+x^0=1, \tag{64}$$

$$\forall n: n\in\mathbb{N}\Rightarrow 1+x+x^2+\ldots+x^{1+n}=\big(1+x+x^2+\ldots+x^n\big)+x^{1+n}, \tag{65}$$

so dass

$$\begin{aligned}1+x+x^2+\ldots+x^0&=1,\\ 1+x+x^2+\ldots+x^1&=\big(1+x+x^2+\ldots+x^0\big)+x^1=1+x^1,\\ 1+x+x^2+\ldots+x^2&=\big(1+x+x^2+\ldots+x^1\big)+x^2=1+x^1+x^2,\\ 1+x+x^2+\ldots+x^3&=\big(1+x+x^2+\ldots+x^2\big)+x^3=1+x^1+x^2+x^3,\\ 1+x+x^2+\ldots+x^4&=\big(1+x+x^2+\ldots+x^3\big)+x^4=1+x^1+x^2+x^3+x^4,\end{aligned}$$

wobei links "x" und rechts "x^1" auftritt. Dass diese beiden Terme - zumindest im Vorkurs - gleich sind beruht auf der Konvention

$$\boxed{x^1=x}$$

Auch gilt konventioneller Weise

$$\boxed{x^0=1}$$

so dass sich der hier vorgestellte Term auch via

$$x^0=1,$$

$$\begin{aligned}x^0+x^1&=1+x^1=1+x,\\ x^0+x^1+x^2&=(x^0+x^1)+x^2=1+x+x^2,\\ x^0+x^1+x^2+x^3&=(x^0+x^1+x^2)+x^3=1+x+x^2+x^3,\\ x^0+x^1+x^2+x^3+x^4&=(x^0+x^1+x^2+x^3)+x^4=1+x+x^2+x^3+x^4,\end{aligned}$$

schreiben lässt.

Der hier nicht weiter betrachtete Fall $x=1$ ist in

Satz - geoRei 1

$$n\in\mathbb{N}\Rightarrow 1+1+1^2+\ldots+1^n=1+n.$$

festgehalten. Beweis als UE.

Festlegung E. E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen bestehen, für die die Gleichung von (63) wahr ist:

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{-1 + x^n}{-1 + x}\right\}. \tag{66}$$

Wie eingangs erwähnt tritt hier neben "E" eine weitere freie Variable - nämlich "x" - auf. x ist keiner weiteren Einschränkung unterworfen. Die Bedingungen "$x \neq 1$" und "$x \in \mathbb{R}$" treten erst beim Beweis der - modifizierten - 2. und 3.Prämisse in Erscheinung.

1.Prämisse "$E \subseteq \mathbb{N}$" .

E ist für jedes x eine Teilmenge von $\mathbb{N}$.

`Thema1` $p \in E$.

`2`: Aus `Thema1` folgt via (66):
$$p \in \mathbb{N} \wedge 1 + x + x^2 + \ldots + x^p = \frac{-1 + x^{1+p}}{-1 + x}.$$

`3`: Aus `2` folgt: $p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$" : $E \subseteq \mathbb{N}$.

2.Prämisse "$\forall x : (x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R}) \Rightarrow 0 \in E$" .

`Thema2` $x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R}$.

`3.1`: Via (64) gilt: $1 + x + x^2 + \ldots + x^0 = 1$.

`3.2`: Aus `Thema2` folgt: $\frac{-1 + x}{-1 + x} = 1$.

`4`: $$\frac{-1 + x^{1+0}}{-1 + x} = \frac{-1 + x^1}{-1 + x} = \frac{-1 + x}{-1 + x} \stackrel{3.2}{=} 1.$$

`5`: Aus `3.1` und aus `4` folgt: $1 + x + x^2 + \ldots + x^0 = \frac{-1 + x^{1+0}}{-1 + x}$.

`6`: Wie bereits früher festgestellt gilt: 0 Menge $\wedge\ 0 \in \mathbb{N}$.

`7`: Aus `6` und `5` folgt via (66): $0 \in E$.

Ergo `Thema2`: $\forall x : (x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R}) \Rightarrow 0 \in E$.

3.Prämisse "$\forall x, \lambda : (x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge \lambda \in E) \Rightarrow 1+\lambda \in E$" .

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge \lambda \in E.$

`1.1`: Aus `Thema3`"$\lambda \in E$" folgt via (66): $\lambda \in \mathbb{N}.$

`1.2`: Aus `Thema3`"$\lambda \in E$" folgt via (66):

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^\lambda = \frac{-1 + x^{1+\lambda}}{-1 + x}.$$

`1.3`: Aus `Thema3`"$x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R}$" folgt: $\frac{-1+x}{-1+x} = 1.$

`2.1`: Aus `1.1` folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}.$

`2.2`: $1 + x + x^2 + \ldots + x^{1+\lambda}$

$$\overset{\texttt{1.1},(65)}{=} \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^\lambda\right) + x^{1+\lambda}$$

$$\overset{\texttt{1.2}}{=} \frac{-1 + x^{1+\lambda}}{-1 + x} + x^{1+\lambda} = \frac{-1 + x^{1+\lambda}}{-1 + x} + 1 \cdot x^{1+\lambda}$$

$$\overset{\texttt{1.3}}{=} \frac{-1 + x^{1+\lambda}}{-1 + x} + \frac{-1 + x}{-1 + x} \cdot x^{1+\lambda}$$

$$= \frac{-1 + x^{1+\lambda}}{-1 + x} + \frac{-x^{1+\lambda} + x^{1+(1+\lambda)}}{-1 + x} = \frac{-1 + x^{1+\lambda} - x^{1+\lambda} + x^{1+(1+\lambda)}}{-1 + x}$$

$$= \frac{-1 + x^{1+(1+\lambda)}}{-1 + x}.$$

`3`: Aus `2.1` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`4`: Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2`"$1 + x + x^2 + \ldots + x^{1+\lambda} = \ldots = \frac{-1 + x^{1+(1+\lambda)}}{-1 + x}$" folgt per definitionem "E" : $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema3`: $\forall x, \lambda : (x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge \lambda \in E) \Rightarrow 1 + \lambda \in E.$

Konklusion "$\forall x : (x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R}) \Rightarrow E = \mathbb{N}$" .

$\boxed{\texttt{Thema4}}$		$x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R}$.
`1.1:`	Wie in "**1.Prämisse**" gezeigt, gilt:	$E \subseteq \mathbb{N}$.
`1.2:`	Aus `Thema3` folgt via "**2.Prämisse**" :	$0 \in \mathbb{N}$.
`1.3:`	Aus `Thema3` folgt via "**3.Prämisse**" :	$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.
`2:`	Aus `1.1`, `1.2`, `1.3` folgt via **Satz - Vollständige Induktion**:	$E = \mathbb{N}$.

Ergo `Thema4`:

$$\forall x : (x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R}) \Rightarrow E = \mathbb{N}. \tag{67}$$

Im Hinblick auf (63) bedeutet dies:

$\boxed{\texttt{Thema5}}$		$x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$.
`1:`	Aus `Thema5`"$x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R}$" folgt via (67):	$E = \mathbb{N}$.
`2:`	Aus `Thema5`"$n \in \mathbb{N}$" und `1` folgt:	$n \in E$.
`3:`	Aus `2` und aus (66) folgt:	$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{-1 + x^{1+n}}{-1 + x}$.

Ergo `Thema5`:

$$\forall x, n : (x \neq 1 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}) \Rightarrow 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{-1 + x^{1+n}}{-1 + x}.$$

□

10 $a^{1+n} - b^{1+n} = (a-b) \cdot *$

Die Aussage

Für alle reellen Zahl a, b und jede natürliche Zahl n gilt:

$$a^{1+n} - b^{1+n} = (a-b) \cdot \left(a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n\right), \quad (68)$$

soll bewiesen werden. Ähnlich wie in Kapitel "$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = *$" wird zum Nachweis von (68)

> **Satz - Vollständige Induktion**
>
> $\quad E \subseteq \mathbb{N}$
>
> $\wedge \quad 0 \in E$
>
> $\wedge \quad \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$
>
> $\Rightarrow$
>
> $\quad E = \mathbb{N}$

mit einer Klasse "E", die von freien Variablen - hier sind es die Variablen "a" und "b" - abhängt, eingesetzt. Die besondere Herausforderung beim Nachweis von (68) liegt weniger im arithmetischen als im definierenden Bereich. Denn anders als bislang ist die rekursive Definition von "$a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n$" nicht durch blosse Addition eines weiteren Terms möglich.

Neuer Term. Wie zu Beginn der "**Vollständigen Induktion**" angedeutet, suggerieren drei Punkte wie in "$a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n$" Klarheit der Interpretation. Dies ist hier kaum der Fall. Es liegt ein ernstes Problem vor. Niemand kann Mathematik mit Termen ungenauer Vorstellung betreiben. Doch wie kann man sich Klarheit verschaffen? Ein Ausweg bietet im vorliegenden Fall die Betrachtung der zu beweisenden Aussage und der Einsatz von arithmetischen Grundwissen. Worum geht es in (68)? Es handelt sich um eine Aussage für alle natürlichen Zahlen n. Also müsste die Aussage im speziellen Fall "$n = 0$" richtig sein. Einsetzen liefert

$$a^{1+0} - b^{1+0} = (a-b) \cdot \left(a^0 + a^{-1+0} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+0} + b^0\right),$$

also auch

$$a - b = (a-b) \cdot \left(a^0 + a^{-1+0} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+0} + b^0\right),$$

so dass wegen der für reelle Zahlen a, b richtigen Gleichung

$$a - b = (a-b) \cdot 1,$$

die Gleichung
$$a^0 + a^{-1+0} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+0} + b^0 = 1,$$
nahe liegt. Im Fall $n = 1$ ergibt sich via $1 + 1 = 2$,
$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot \left(a^1 + a^{-1+1} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+1} + b^1\right),$$
und mit Schulwissen
$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b),$$
so dass die Gleichung
$$a^1 + a^{-1+1} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+1} + b^1 = a + b,$$
nahe liegt. Im Fall $n = 2$ ergibt sich via $1 + 2 = 3$,
$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \left(a^2 + a^{-1+2} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+2} + b^2\right),$$
und mit Schul- oder Formelsammlungwissen,
$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2),$$
so dass die Gleichung
$$a^2 + a^{-1+2} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+2} + b^2 = a^2 + a \cdot b + b^2,$$
nahe liegt. Hier kann der Term auf der rechten Seite auch als
$$a^2 + a^1 \cdot b^1 + b^2 = a^2 \cdot 1 + a^1 \cdot b^1 + b^2 \cdot 1 = a^2 \cdot b^0 + a^1 \cdot b^1 + b^2 \cdot a^0,$$
geschrieben werden und so kommt der Verdacht auf, dass
$$a^2 + a^{-1+2} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+2} + b^2,$$
die Summe aller Terme der Form “ $a^j \cdot b^k$ mit $j + k = 2$ und $j, k \in \mathbb{N}$” ist und allgemeiner
$$a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n,$$
die Summe aller der Form “ $a^j \cdot b^k$ mit $j + k = n$ und $j, k \in \mathbb{N}$” ist. Eine Überprüfung der bisherigen Interpretationen mit
$$a + b = a^1 + b^1 = a^1 \cdot 1 + 1 \cdot b^1 = a^1 \cdot b^0 + a^0 \cdot b^1,$$
und
$$1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0,$$

bestätigt dies. Doch ist (68) mit dieser Interpretation auch im Fall $n = 3$ richtig? In der Tat zeigt eine kurze Rechnung mit bekannten Resultaten,

$$
\begin{aligned}
a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2) \\
&= (a - b) \cdot (a^3 + a \cdot b^2 + b \cdot a^2 + b^3) = (a - b) \cdot (a^3 + b \cdot a^2 + a \cdot b^2 + b^3) \\
&= (a - b) \cdot (a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + b^3) = (a - b) \cdot (a^3 \cdot 1 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3) \\
&= (a - b) \cdot (a^3 \cdot b^0 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + a^0 \cdot b^3)
\end{aligned}
$$

die Konsistenz von (68) mit der der vorliegenden Interpretation,

$$a^3 + a^{-1+3} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+3} + b^3 = a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + b^3.$$

Damit ist gekärt, was mit $a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n$ "gemeint" ist und die erste Hürde der Bearbeitung von (68) ist genommen.

Als nächstes ist eine rekursive Definition von "$a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n$" erforderlich. Anders gesagt stellt sich die Frage, wie rechentechnisch der Übergang von "$a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n$" zu "$a^{1+n} + a^{-1+(1+n)} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+(1+n)} + b^{1+n}$" zu bewerkstelligen ist. Neuerlich ist es hilfreich, sich Bekanntes in den Spezialfällen $n = 0, 1, 2, 3$ anzusehen. Der Übergang vom Term "1" für $n = 0$ zum Term "$a + b$" für $n = 1$, erscheint wenig transparent. Etwas ansprechender ist der Übergang vom Term "$a+b$" für $n = 1$ zum Term "$a^2+a \cdot b+b^2$" für $n = 2$. Im Term "$a^2 + a \cdot b + b^2$" für $n = 2$ kann man versuchen, den Term "$a + b$" für $n = 1$ auszuklammern. Eine Möglichkeit, dies zu tun ist

$$a^2 + a \cdot b + b^2 = a \cdot (a + b) + b^2,$$

eine andere Möglichkeit wäre

$$a^2 + a \cdot b + b^2 = a^2 + (a + b) \cdot b,$$

eine "symmetrische" Möglichkeit wäre

$$a^2 + a \cdot b + b^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + a \cdot (a + b) + (a + b) \cdot b + b^2\right).$$

Im Reellen ist es tatsc̈hlich egal, welche der drei Möglichkeiten für die Rekursion verwendet werden. Die erste Möglichkeit wählend stellt sich die Frage, ob durch die gleiche Vorschrift auch der Übergang vom Term "$a^2 + a \cdot b + b^2$" für $n = 2$ zum Term "$a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + b^3$" für $n = 3$ zu bewerkstelligen ist. Durch die Rechnung

$$a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + b^3 = a \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) + b^3,$$

ist diese Frage bejaht.

Die Vorbetrachtungen führen zur Formulierung der Rekursion

$$a^0 + a^{-1+0} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+0} + b^0 = 1, \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^{1+n} &+ a^{-1+(1+n)} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+(1+n)} + b^{1+n} \\ &= a \cdot \left(a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n\right) + b^{1+n}.\end{aligned} \tag{70}$$

Gelingt der Beweis, wurde mit der Rekursion das Richtige getroffen.

Festlegung E**.** E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen bestehen, für die die Gleichung von (68) wahr ist. E ist eine von a, b abhängige Klasse:

$$\begin{aligned}E = \big\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge a^{1+\omega} &- b^{1+\omega} \\ &= (a-b) \cdot \left(a^\omega + a^{-1+\omega} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\omega} + b^\omega\right)\big\}.\end{aligned} \tag{71}$$

1.Prämisse " $E \subseteq \mathbb{N}$**" .**

`Thema1`	$p \in E$.
`2`: Aus `Thema1` folgt via (71):	$p \in \mathbb{N}$ $\wedge\ a^{1+p} - b^{1+p} = (a-b) \cdot (a^p + a^{-1+p} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+p} + b^p)$.
`3`: Aus `2` folgt:	$p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$" : $E \subseteq \mathbb{N}$.

2.Prämisse " $\forall a, b : a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \in E$**" .**

`Thema2`	$a, b \in \mathbb{R}$.
`3.1`: Via (69) gilt:	$a^0 + a^{-1+0} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+0} + b^0 = 1$.
`3.2`: Aus `Thema2` folgt:	$a - b = (a-b) \cdot 1$.
`4`: $a^{1+0} - b^{1+0} = a^1 - b^1 = a - b \stackrel{3.2}{=} (a-b) \cdot 1$ $\stackrel{3.1}{=} (a-b) \cdot (a^0 + a^{-1+0} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+0} + b^0)$.	
`5`: Wie bereits früher festgestellt gilt:	0 Menge $\wedge\ 0 \in \mathbb{N}$.
`6`: Aus `5` und aus `4` "$a^{1+0} - b^{1+0} = \ldots = (a-b) \cdot (a^0 + a^{-1+0} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+0} + b^0)$" folgt via (71):	$0 \in E$.

Ergo `Thema2`: $\forall a, b : a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \in E$.

3.Prämisse "$\forall a, b, \lambda : (a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge \lambda \in E) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$" .

`Thema3`	$a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge \lambda \in E.$
`1.1:` Aus `Thema3`"$\lambda \in E$" folgt via (71):	$\lambda \in \mathbb{N}.$
`1.2:` Aus `Thema3`"$\lambda \in E$" folgt via (71): $a^{1+\lambda} - b^{1+\lambda} = (a-b) \cdot \big(a^\lambda + a^{-1+\lambda} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\lambda} \cdot b^\lambda\big).$	
`2:` Aus `1.1` folgt:	$1 + \lambda \in \mathbb{N}.$
`3.1:` Aus `Thema3`"$a \in \mathbb{R}$" und aus `2`"$1 + \lambda \in \mathbb{N}$" folgt:	$a^{1+\lambda} + 0 = a^{1+\lambda}.$
`3.2:` Aus `Thema3`"$b \in \mathbb{R}$" und aus `2`"$1 + \lambda \in \mathbb{N}$" folgt:	$b^{1+\lambda} - b^{1+\lambda} = 0.$
`3.3:` Aus `Thema3`"$a \in \mathbb{R}$" folgt:	$a + 0 = a.$
`3.4:` Aus `Thema3`"$b \in \mathbb{R}$" folgt:	$b - b = 0.$
`3.5:` Aus `2` folgt:	$1 + (1 + \lambda) \in \mathbb{N}.$
`3.6:` Aus `Thema3`"$a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$" und aus `2` folgt: $(a-b) \cdot \big(a^{1+\lambda} + a^{-1+(1+\lambda)} \cdot b + \ldots a \cdot b^{-1+(1+\lambda)} + b^{1+\lambda}\big) + 0 = (a-b) \cdot \big(a^{1+\lambda} + a^{-1+(1+\lambda)} \cdot b + \ldots a \cdot b^{-1+(1+\lambda)} + b^{1+\lambda}\big).$	
`4:` Aus `Thema3`"$b \in \mathbb{R}$" und aus `3.5` folgt:	$b^{1+(1+\lambda)} - b^{1+(1+\lambda)} = 0.$
`5:` $a^{1+(1+\lambda)} - b^{1+(1+\lambda)} = \ldots ?,$	

...und anders als bisher ist es hier nicht ohne Weiteres klar, auf welche Weise `1.2`, insbesondere der Term "$a^\lambda - b^\lambda$" ins Spiel gebracht werden könnte.

Es hilft die "Addition einer ergiebigen Null" .

Zunächst gilt

$$a^{1+(1+\lambda)} = a \cdot a^{1+\lambda}, \tag{72}$$

und "$a^{1+\lambda}$" kommt in der linken Seite von `1.2` vor. Jedoch steht dort nicht nur "$a^{1+\lambda}$" , sondern

$$a^{1+\lambda} - b^{1+\lambda}.$$

Die "Addition einer ergiebigen Null" besteht nun darin, von $a^{1+\lambda}$ in (72) den Term "$b^{1+\lambda}$" abzuziehen und gleich wieder zu addieren, so dass insgesamt eine Null addiert wurde. Präziser aufgeschrieben gilt inn der Tat gilt für reelle a, b und natürliche λ,

$$\begin{aligned} a \cdot a^{1+\lambda} = a \cdot \big(a^{1+\lambda} + 0\big) = a \cdot \big(a^{1+\lambda} + \big(b^{1+\lambda} - b^{1+\lambda}\big)\big) \\ = a \cdot \big(\big(a^{1+\lambda} - b^{1+\lambda}\big) + b^{1+\lambda}\big) \,, \end{aligned}$$

und nun kann mit der Gleichung von `1` weiter gerechnet werden …

`Thema3` $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge \lambda \in E.$

…

`5:` $a^{1+(1+\lambda)} - b^{1+(1+\lambda)} = a \cdot a^{1+\lambda} - b^{1+(1+\lambda)}$

$$\overset{2.1}{=} a \cdot \big(a^{1+\lambda} + 0\big) - b^{1+(1+\lambda)} \overset{2.2}{=} a \cdot \big(a^{1+\lambda} + \big(b^{1+\lambda} - b^{1+\lambda}\big)\big) - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$= a \cdot \big(\big(a^{1+\lambda} - b^{1+\lambda}\big) + b^{1+\lambda}\big) - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$\overset{1}{=} a \cdot \big((a-b) \cdot \big(a^{\lambda} + a^{-1+\lambda} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\lambda} + b^{\lambda}\big) + b^{1+\lambda}\big) - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$= (a-b) \cdot a \cdot \big(a^{\lambda} + a^{-1+\lambda} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\lambda} + b^{\lambda}\big) + a \cdot b^{1+\lambda} - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$= \ldots ?,$$

… und neuerlich hilft die “Addition einer ergiebigen Null”, diesmal in für reelle Zahlen a, b und natürliche Zahlen λ gültiger Form

$$a \cdot b^{1+\lambda} = (a+0) \cdot b^{1+\lambda} = (a + (b-b)) \cdot b^{1+\lambda} = ((a-b)+b) \cdot b^{1+\lambda},$$

weiter …

$\boxed{\texttt{Thema3}}$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge \lambda \in E.$

...

5: $a^{1+(1+\lambda)} - b^{1+(1+\lambda)}$

$$= \ldots = (a-b) \cdot a \cdot \left(a^\lambda + a^{-1+\lambda} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\lambda} + b^\lambda\right) + a \cdot b^{1+\lambda} - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$\stackrel{3.3}{=} (a-b) \cdot a \cdot \left(a^\lambda + a^{-1+\lambda} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\lambda} + b^\lambda\right) + (a+0) \cdot b^{1+\lambda} - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$\stackrel{3.4}{=} (a-b) \cdot a \cdot \left(a^\lambda + a^{-1+\lambda} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\lambda} + b^\lambda\right) + (a+(b-b)) \cdot b^{1+\lambda} - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$= (a-b) \cdot a \cdot \left(a^\lambda + a^{-1+\lambda} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\lambda} + b^\lambda\right) + ((a-b)+b) \cdot b^{1+\lambda} - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$= (a-b) \cdot a \cdot \left(a^\lambda + a^{-1+\lambda} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\lambda} + b^\lambda\right) + (a-b) \cdot b^{1+\lambda} + b \cdot b^{1+\lambda} - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$= (a-b) \cdot \left(a \cdot \left(a^\lambda + a^{-1+\lambda} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+\lambda} + b^\lambda\right) + b^{1+\lambda}\right) + b \cdot b^{1+\lambda} - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$\stackrel{1.2,(70)}{=} (a-b) \cdot \left(a^{1+\lambda} + a^{-1+(1+\lambda)} \cdot b + \ldots a \cdot b^{-1+(1+\lambda)} + b^{1+\lambda}\right) + b \cdot b^{1+\lambda} - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$= (a-b) \cdot \left(a^{1+\lambda} + a^{-1+(1+\lambda)} \cdot b + \ldots a \cdot b^{-1+(1+\lambda)} + b^{1+\lambda}\right) + b^{1+(1+\lambda)} - b^{1+(1+\lambda)}$$

$$\stackrel{4}{=} (a-b) \cdot \left(a^{1+\lambda} + a^{-1+(1+\lambda)} \cdot b + \ldots a \cdot b^{-1+(1+\lambda)} + b^{1+\lambda}\right) + 0$$

$$\stackrel{3.6}{=} (a-b) \cdot \left(a^{1+\lambda} + a^{-1+(1+\lambda)} \cdot b + \ldots a \cdot b^{-1+(1+\lambda)} + b^{1+\lambda}\right).$$

6: Aus 2 folgt via **Satz - $\in$ - Menge**: $1+\lambda$ Menge.

7: Aus 6, aus 2 und aus 5 “$a^{1+(1+\lambda)} - b^{1+(1+\lambda)}$
$= \ldots = (a-b) \cdot \left(a^{1+\lambda} + a^{-1+(1+\lambda)} \cdot b + \ldots a \cdot b^{-1+(1+\lambda)} + b^{1+\lambda}\right)$”
folgt via (68): $1+\lambda \in E.$

Ergo Thema3: $\forall a, b, \lambda : (a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge \lambda \in E) \Rightarrow 1+\lambda \in E.$

Konklusion “$\forall a, b : (a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}) \Rightarrow E = \mathbb{N}$” .

$\boxed{\texttt{Thema4}}$		$a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$.
`1.1:`	Wie in “**1.Prämisse**” gezeigt, gilt:	$E \subseteq \mathbb{N}$.
`1.2:`	Aus `Thema3` folgt via “**2.Prämisse**” :	$0 \in \mathbb{N}$.
`1.3:`	Aus `Thema3` folgt via “**3.Prämisse**” :	$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.
`2:`	Aus `1.1`, `1.2`, `1.3` folgt via **Satz - Vollständige Induktion**:	$E = \mathbb{N}$.

Ergo `Thema4`:

$$\forall a, b : (a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}) \Rightarrow E = \mathbb{N}. \tag{73}$$

Im Hinblick auf (68) bedeutet dies:

$\boxed{\texttt{Thema5}}$		$a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$.
`1:`	Aus `Thema5`“$a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$” folgt via (73):	$E = \mathbb{N}$.
`2:`	Aus `Thema5`“$n \in \mathbb{N}$” und `1` folgt:	$n \in E$.
`3:`	Aus `2` und aus (71) folgt:	$a^{1+n} - b^{1+n} = (a - b) \cdot (a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n)$.

Ergo `Thema5`:

$$\forall a, b, n : (a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}) \Rightarrow$$

$$a^{1+n} - b^{1+n} = (a - b) \cdot \left(a^n + a^{-1+n} \cdot b + \ldots + a \cdot b^{-1+n} + b^n\right).$$

$\square$

11 Epilog

Im ersten Teil des Vorkurses wurde die Vollständige Induktion zum Nachweis von Gleichungen, die für alle natürlichen Zahlen gelten, eingesetzt. Dabei konnten Resultate wie

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (1+n)}{2}, \tag{74}$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (1+n)^2, \tag{75}$$

bewiesen werden. Jedoch ist die Vollständige Induktion nur *eine* Möglichkeit, Aussagen über natürliche Zahlen zu beweisen. Eine weitere, nicht nur in diesem Kontext, sondern generell verfügbare Methode besteht darin, eine bis dato nicht untersuchte Aussage durch Einsatz bereits verfügbarer Sätze zu beweisen. Diese Methode beruht auf Intuition und Wissen und ist nicht so einfach formalisierbar wie die Vollständige Induktion in **Satz - Vollständige Induktion**. Ein Erlernen erfolgt durch fortwährendes Üben und eigenes Nachdenken.

Beispielsweise soll hier

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$(0 + 1 + 2 + \ldots + n)^2 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3, \tag{76}$$

nicht durch vollständige Induktion, sondern durch Einsatz bereits bekannter Resultate bewiesen werden.

Der Beweis ist verblüffend einfach.

$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$(0 + 1 + 2 + \ldots + n)^2 \overset{(74)}{=} \left(\frac{n \cdot (1+n)}{2}\right)^2 = \frac{n^2 \cdot (1+n)^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (1+n)^2$$

$$\overset{(75)}{=} 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Interessierte Lesern mögen den Aufwand dieser Beweisführung mit dem eines Beweises mit vollständiger Induktion vergleichen.

12 UE - Vollständige Induktion

12.1 $0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = \frac{2}{3} \cdot *$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (1 + 2 \cdot n), \quad (77)$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

<u>Satz - Vollständige Induktion</u>

$$\begin{array}{ll} & E \subseteq \mathbb{N} \\ \wedge & 0 \in E \\ \wedge & \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E \\ \Rightarrow & \\ & E = \mathbb{N} \end{array}$$

zur Verfügung. Die Bearbeitung erfolgt ähnlich wie in Kapitel "$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (1 + 2 \cdot n)$".

<u>Rekursion "$0^2 + 2^4 + 2^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2$".</u> Wie bereits früher festgestellt, gilt

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2 = 0, \quad (78)$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot (1+n))^2 = \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2\right) + (2 \cdot (1+n))^2. \quad (79)$$

<u>Festlegung E.</u> E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen bestehen, für die die Gleichung von (77) wahr ist:

$$E = \left\{ \omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot \omega)^2 = \frac{2}{3} \cdot \omega \cdot (1+\omega) \cdot (1 + 2 \cdot \omega) \right\}. \quad (80)$$

<u>1.Prämisse “ $E \subseteq \mathbb{N}$” .</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$p \in E.$
2: Aus `Thema1` folgt via (80): $p \in \mathbb{N} \wedge 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot p)^2 = \frac{2}{3} \cdot p \cdot (1 + p) \cdot (1 + 2 \cdot p).$	
3: Aus 2 folgt:	$p \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema1`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}.$

Konsequenz per definitionem “ $\subseteq$” : $E \subseteq \mathbb{N}.$

<u>2.Prämisse “ $0 \in E$” .</u> Via (78) gilt

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2 = 0. \tag{81}$$

Auch gilt

$$\frac{2}{3} \cdot 0 \cdot (1 + 0) \cdot (1 + 2 \cdot 0) = \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0. \tag{82}$$

Aus (81), (82) folgt

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2 = \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot (1 + 0) \cdot (1 + 2 \cdot 0). \tag{83}$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge} \wedge 0 \in \mathbb{N}. \tag{84}$$

Aus (84) und (83) folgt via (80),

$$0 \in E.$$

3.Prämisse "$\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$" .

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E.$

`1.1:` Aus `Thema2` folgt via (80): $\lambda \in \mathbb{N}.$

`1.2:` Aus `Thema2` folgt via (80):

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot \lambda)^2 = \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda).$$

`2.1:` Aus `1`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}.$

`2.2:` $0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot (1 + \lambda))^2$

$$\stackrel{\texttt{1.1},(79)}{=} (0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot \lambda)^2) + (2 \cdot (1 + \lambda))^2$$

$$\stackrel{\texttt{1.2}}{=} \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) + (2 \cdot (1 + \lambda))^2$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) + 4 \cdot (1 + \lambda)^2$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \lambda \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) + \frac{12}{3} \cdot (1 + \lambda)^2$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \big(\lambda \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) + 6 \cdot (1 + \lambda)^2\big)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot (\lambda \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) + 6 \cdot (1 + \lambda))$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot \big(\lambda + 2 \cdot \lambda^2 + 6 + 6 \cdot \lambda\big)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot \big(6 + 7 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda^2\big) = \ldots$$

$\ldots$

...hier steht ein Resultat aus Kapitel "$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n)$" zur Verfügung, wonach via "$\lambda \in \mathbb{N}$" ,

$$\frac{1}{6} \cdot (1 + \lambda) \cdot \big(6 + 7 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda^2\big) = \frac{1}{6} \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + (1 + \lambda)) \cdot (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)),$$

woraus durch Multiplikation mit "4" ,

$$\frac{2}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot \big(6 + 7 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda^2\big) = \frac{2}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + (1 + \lambda)) \cdot (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)), \tag{85}$$

folgt. Mit diesem Ergebnis dieser kann in `Thema2` zielgerichtet weiter umgeformt werden ...

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E.$

...

`2.2:` $0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot (1 + \lambda))^2$

$$= \ldots = \frac{2}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot \left(6 + 7 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda^2\right)$$

$$\stackrel{(85)}{=} \frac{2}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + (1 + \lambda)) \cdot (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)).$$

`3:` Aus `2.1` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`4:` Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2` "$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot (1 + \lambda))^2 = \ldots = \frac{2}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + (1 + \lambda)) \cdot (1 + 2 \cdot (1 + \lambda))$"

folgt per definitionem "E" : $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema2`: $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E.$

<u>Konklusion "$E = \mathbb{N}$" .</u> Für die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot \omega)^2 = \frac{2}{3} \cdot \omega \cdot (1 + \omega) \cdot (1 + 2 \cdot \omega)\right\},$$

wurde gezeigt:

`1`: $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2`: $0 \in E$.

`3`: $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{86}$$

wahr. Im Hinblick auf (77) bedeutet dies:

`Thema3`	$n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema3` und aus (86) folgt:	$n \in E$.
`2` Aus `1` und aus (80) folgt:	$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n)$.

Ergo `Thema3`:

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = \frac{2}{3} \cdot n \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n).$$

□

12.2 $0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = 4 \cdot *$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = 4 \cdot \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots n^2\right), \quad (87)$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

Satz - Vollständige Induktion

$$E \subseteq \mathbb{N}$$

$$\land \quad 0 \in E$$

$$\land \quad \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$$

$$\Rightarrow$$

$$E = \mathbb{N}$$

sowie

Rekursion "$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2$".

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2 = 0, \quad (88)$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot (1+n))^2 = \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2\right) + (2 \cdot (1+n))^2, \quad (89)$$

und

Rekursion "$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$".

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 0^2 = 0, \quad (90)$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1+n)^2 = \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) + (1+n)^2, \quad (91)$$

zur Verfügung. Die Bearbeitung erfolgt ähnlich wie in Kapitel "$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (1+n) \cdot (1 + 2 \cdot n)$".

Festlegung E**.** E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen n bestehen, für die die Gleichung von (87) wahr ist:

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2\cdot\omega)^2 = 4\cdot\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + \omega^2\right)\right\}. \quad (92)$$

1.Prämisse " $E \subseteq \mathbb{N}$ **" .**

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $p \in E$.

`2:` Aus `Thema1` folgt via (92):
$p \in \mathbb{N} \wedge 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2\cdot p)^2 = 4\cdot(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + p^2)$.

`3:` Aus `2` folgt: $p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$" : $E \subseteq \mathbb{N}$.

2.Prämisse " $0 \in E$ **" .** Via (88) gilt

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2\cdot 0)^2 = 0. \quad (93)$$

Auch gilt via (90)

$$4\cdot\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 0^2\right) = 4\cdot 0 = 0. \quad (94)$$

Aus (93), (94) folgt

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2\cdot 0)^2 = 4\cdot\left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 0^2\right). \quad (95)$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge} \wedge 0 \in \mathbb{N}. \quad (96)$$

Aus (96) und (95) folgt via (92),

$$0 \in E.$$

3.Prämisse “$\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$” .

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E$.

`1.1:` Aus `Thema2` folgt via (92): $\lambda \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `Thema2` folgt via (92):
$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot \lambda)^2 = 4 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + \lambda^2).$$

`2.1:` Aus `1.1` folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}$.

`2.2:` $0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot (1 + \lambda))^2$

$\overset{\texttt{1.1},(89)}{=} (0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot \lambda)^2) + (2 \cdot (1 + \lambda))^2$

$\overset{\texttt{1.2}}{=} 4 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + \lambda^2) + (2 \cdot (1 + \lambda))^2$

$= 4 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + \lambda^2) + 4 \cdot (1 + \lambda)^2$

$= 4 \cdot ((0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + \lambda^2) + (1 + \lambda)^2)$

$\overset{\texttt{1.1},(91)}{=} 4 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + \lambda)^2)$

`3:` Aus `2.1` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`4:` Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2`“$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot (1 + \lambda))^2 = \ldots = 4 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + \lambda)^2)$”

folgt per definitionem “E” : $1 + \lambda \in E$.

Ergo `Thema2`: $\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

<u>Konklusion “ $E = \mathbb{N}$” .</u> Für die spezielle Klasse

$$E = \big\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot \omega)^2 \\ = 4 \cdot \big(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + \omega)^2\big)\big\}\,,$$

wurde gezeigt:

1: $E \subseteq \mathbb{N}$.

2: $0 \in E$.

3: $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{97}$$

wahr. Im Hinblick auf (87) bedeutet dies:

$\boxed{\texttt{Thema3}}$	$n \in \mathbb{N}$.
1 Aus `Thema3` und aus (97) folgt:	$n \in E$.
2 Aus `1` und aus (92) folgt:	$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = 4 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$.

Ergo `Thema3`:

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 = 4 \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

$\square$

12.3 $1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot n)^2=*$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot n)^2=\frac{1}{3}\cdot(1+n)\cdot(1+2\cdot n)\cdot(3+2\cdot n), \quad (98)$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

Satz - Vollständige Induktion

$$\begin{array}{ll} & E\subseteq\mathbb{N} \\ \wedge & 0\in E \\ \wedge & \forall\lambda:\lambda\in E\Rightarrow 1+\lambda\in E \\ \Rightarrow & \\ & E=\mathbb{N} \end{array}$$

sowie

Rekursion "$1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot(1+n))^2$".

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot 0)^2=1, \quad (99)$$

$$\begin{aligned}\forall n:n\in\mathbb{N}\Rightarrow\ & 1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot(1+n))^2 \\ &=\left(1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot n)^2\right)+(1+2\cdot(1+n))^2, \quad (100)\end{aligned}$$

zur Verfügung.

Festlegung E. E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen bestehen, für die die Gleichung von (98) wahr ist:

$$E=\left\{\ \omega:\omega\in\mathbb{N}\wedge 1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot\omega)^2 =\frac{1}{3}\cdot(1+\omega)\cdot(1+2\cdot\omega)\cdot(3+2\cdot\omega)\right\}. \quad (101)$$

1.Prämisse “ $E \subseteq \mathbb{N}$” .

`Thema1`	$p \in E$.
2: Aus `Thema1` folgt via (101): $p \in \mathbb{N} \wedge 1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot p)^2 = \frac{1}{3}\cdot(1+p)\cdot(1+2\cdot p)\cdot(3+2\cdot p)$.	
3: Aus 2 folgt:	$p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem “ $\subseteq$” : $E \subseteq \mathbb{N}$.

2.Prämisse “ $0 \in E$” . Via (99) gilt

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2 = 1. \tag{102}$$

Auch gilt

$$\frac{1}{3} \cdot (1 + 0) \cdot (1 + 2 \cdot 0) \cdot (3 + 2 \cdot 0) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 1. \tag{103}$$

Aus (102), (103) folgt

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + 0) \cdot (1 + 2 \cdot 0) \cdot (3 + 2 \cdot 0). \tag{104}$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge} \wedge 0 \in \mathbb{N}. \tag{105}$$

Aus (105) und (104) folgt via (101),

$$0 \in E.$$

3.Prämisse "$\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$" .

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E$.

`1.1`: Aus `Thema2` folgt via (101): $\lambda \in \mathbb{N}$.

`1.2`: Aus `Thema2` folgt via (101):

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot \lambda)^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) \cdot (3 + 2 \cdot \lambda).$$

`2.1`: Aus `1.1` folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}$.

`2.2`:
$$\begin{aligned}
&1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda))^2 \\
&\overset{1.1,(100)}{=} (1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot \lambda)^2) + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda))^2 \\
&\overset{1.2}{=} \frac{1}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) \cdot (3 + 2 \cdot \lambda) + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda))^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) \cdot (3 + 2 \cdot \lambda) + (3 + 2 \cdot \lambda)^2 \\
&= (3 + 2 \cdot \lambda) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) + (3 + 2 \cdot \lambda)\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (3 + 2 \cdot \lambda) \cdot ((1 + \lambda) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda) + 3 \cdot (3 + 2 \cdot \lambda)) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (3 + 2 \cdot \lambda) \cdot \left(1 + \lambda + 2 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda^2 + 9 + 6 \cdot \lambda\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (3 + 2 \cdot \lambda) \cdot \left(10 + 9 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda^2\right) = \ldots ?
\end{aligned}$$

...und es ist an dieser Stelle nicht ohne Weiteres klar, wie hier weiter umzuformen ist. Was ist das Ziel der Umformung? Das Ziel ist die "bestimmende Gleichung" von E in (101) für "$1 + \lambda$" an Stelle von "λ" nachzuweisen:

to do:
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda))^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + (1 + \lambda)) \cdot (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)) \cdot (3 + 2 \cdot (1 + \lambda)), \quad (106)$$

Nach aktueller Rechnung steht aber

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda))^2 = \frac{1}{3} \cdot (3 + 2 \cdot \lambda) \cdot \left(10 + 9 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda^2\right),$$

zur Verfügung. Wenn von dem angestrebten, rechten Term in (106) ausgegangen wird, zeigt sich via “ $\lambda \in \mathbb{N}$” ,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(3+2\cdot(1+\lambda))\\
&\qquad=\frac{1}{3}\cdot(2+\lambda)\cdot(3+2\cdot\lambda)\cdot(5+2\cdot\lambda)\\
&\qquad=\frac{1}{3}\cdot(3+2\cdot\lambda)\cdot((2+\lambda)\cdot(5+2\cdot\lambda))\\
&\qquad=\frac{1}{3}\cdot(3+2\cdot\lambda)\cdot(10+4\cdot\lambda+5\cdot\lambda+2\cdot\lambda^2)\\
&\qquad=\frac{1}{3}\cdot(3+2\cdot\lambda)\cdot(10+9\cdot\lambda+2\cdot\lambda^2). \qquad (107)
\end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis dieser Nebenrechnung kann in `Thema2` zielgerichtet weiter umgeformt werden ...

`Thema2` $\lambda \in E.$

...

`2.2:` $1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot(1+\lambda))^2$
$= \ldots = \frac{1}{3}\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(3+2\cdot(1+\lambda))$
$\stackrel{(107)}{=} \frac{1}{3}\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(3+2\cdot(1+\lambda)).$

`3:` Aus `2.1` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1+\lambda$ Menge.

`4:` Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2`“ $1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot(1+\lambda))^2 = \ldots = \frac{1}{3}\cdot(1+(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(3+2\cdot(1+\lambda))$ ”
folgt per definitionem “ E” : $1+\lambda \in E.$

Ergo `Thema2`: $\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E.$

<u>**Konklusion "$E = \mathbb{N}$" .**</u> Für die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot \omega)^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + \omega) \cdot (1 + 2 \cdot \omega) \cdot (3 + 2 \cdot \omega)\right\},$$

wurde gezeigt:

`1`: $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2`: $0 \in E$.

`3`: $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{108}$$

wahr. Im Hinblick auf (98) bedeutet dies:

`Thema3`	$n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema3` und aus (108) folgt:	$n \in E$.
`2` Aus `1` und aus (101) folgt:	

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 2 \cdot n).$$

Ergo `Thema3`:

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2 = \frac{1}{3} \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot n) \cdot (3 + 2 \cdot n).$$

□

12.4 $(1^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2) + (0^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2) = *$

Die Aussage

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\begin{aligned}\left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2\right) + \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2\right)\\ = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2,\end{aligned} \tag{109}$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung steht

Satz - Vollständige Induktion

$$\begin{array}{ll} & E \subseteq \mathbb{N} \\ \wedge & 0 \in E \\ \wedge & \forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E \\ \Rightarrow & \\ & E = \mathbb{N} \end{array}$$

sowie

Rekursion “ $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2$” **.**

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2 = 1, \tag{110}$$

$$\begin{aligned}\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot (1 + n))^2\\ = \left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2\right) + (1 + 2 \cdot (1 + n))^2,\end{aligned} \tag{111}$$

und

Rekursion “ $0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2$” **.**

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2 = 0, \tag{112}$$

$$\begin{aligned}\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot (1 + n))^2\\ = \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2\right) + (2 \cdot (1 + n))^2,\end{aligned} \tag{113}$$

und

Rekursion “ $0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$” **.**

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 0^2 = 0, \tag{114}$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1+n)^2 \\ = \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) + (1+n)^2, \quad (115)$$

zur Verfügung. Im Beweis wird (115) nicht für eine natürliche Zahl “n” , sondern für natürliche Zahlen der Form “$1+2\cdot\lambda$” und “$2+2\cdot\lambda$” mit $\lambda \in \mathbb{N}$ zum Einsatz kommen.

<u>**Festlegung** E.</u> E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen bestehen, für die die Gleichung von (109) wahr ist:

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1+2\cdot\omega)^2\right) \\ + \left(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2\cdot\omega)^2\right) \\ = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1+2\cdot\omega)^2\right\}. \quad (116)$$

<u>**1.Prämisse “$E \subseteq \mathbb{N}$” .**</u>

`Thema1` $\qquad p \in E.$

`2`: Aus `Thema1` folgt via (116):

$$p \in \mathbb{N} \wedge (1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1+2\cdot p)^2) \\ + (0^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2\cdot p)^2) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1+2\cdot p)^2.$$

`3`: Aus `2` folgt: $\qquad p \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema1`: $\qquad \forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}.$

Konsequenz per definitionem “$\subseteq$” : $\qquad E \subseteq \mathbb{N}.$

2.Prämisse "$0 \in E$" . Via (110) gilt

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2 = 1. \tag{117}$$

Via (112) gilt

$$0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2 = 0. \tag{118}$$

Via "$1 \in \mathbb{N}$" , (115) und (114) gilt

$$\begin{aligned} 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2 &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 1^2 \\ = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 0)^2 &= \big(0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 0^2\big) + (1 + 0)^2 \\ &= 0 + 1^2 = 0 + 1 = 1. \end{aligned} \tag{119}$$

Aus (117), (118), (119) folgt

$$\begin{aligned} \big(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2\big) + \big(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot 0)^2\big) &= 1 + 0 = 1 \\ &= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot 0)^2. \end{aligned} \tag{120}$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge} \wedge 0 \in \mathbb{N}. \tag{121}$$

Aus (121) und (120) folgt via (116),

$$0 \in E.$$

3.Prämisse "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$" .

`Thema2` $\lambda \in E.$

`1.1:` Aus `Thema2` folgt via (116): $\lambda \in \mathbb{N}.$

`1.2:` Aus `Thema2` folgt via (116):

$$\begin{aligned} &(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot \lambda)^2) \\ &\quad + (0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots (2 \cdot \lambda)^2) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot \lambda)^2. \end{aligned}$$

`2.1:` Aus `1.1` folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}.$

`2.2:` Aus `1.1` folgt: $1 + 2 \cdot \lambda \in \mathbb{N}.$

`2.3:` Aus `1.1` folgt: $2 + 2 \cdot \lambda \in \mathbb{N}.$

...

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E.$

...

`3:` $$(1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot(1+\lambda))^2) + (0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot(1+\lambda))^2)$$

$$\stackrel{\text{1.1,(111)}}{=} (1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot\lambda)^2)+(1+2\cdot(1+\lambda))^2 + (0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot(1+\lambda))^2)$$

$$\stackrel{\text{1.1,(113)}}{=} (1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot\lambda)^2)+(1+2\cdot(1+\lambda))^2 + (0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot\lambda)^2)+(2\cdot(1+\lambda))^2$$

$$= ((1^2+3^2+5^2+\ldots+(1+2\cdot\lambda)^2) + (0^2+2^2+4^2+\ldots+(2\cdot\lambda)^2)) + (1+2\cdot(1+\lambda))^2+(2\cdot(1+\lambda))^2$$

$$\stackrel{\text{1.2}}{=} (0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+2\cdot\lambda)^2) + (1+2\cdot(1+\lambda))^2+(2\cdot(1+\lambda))^2$$

$$= (0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+2\cdot\lambda)^2)+(2\cdot(1+\lambda))^2 + (1+2\cdot(1+\lambda))^2$$

$$= (0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+2\cdot\lambda)^2)+(1+(1+2\cdot\lambda))^2 + (1+2\cdot(1+\lambda))^2$$

$$\stackrel{\text{2.2,(115)}}{=} (0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+(1+2\cdot\lambda))^2) + (1+2\cdot(1+\lambda))^2$$

$$= (0^2+1^2+2^2+\ldots+(2+2\cdot\lambda)^2)+(1+(2+2\cdot\lambda))^2$$

$$\stackrel{\text{2.3,(115)}}{=} 0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+(2+2\cdot\lambda))^2$$

$$= 0^2+1^2+2^2+\ldots+(1+2\cdot(1+\lambda))^2.$$

`4:` Aus `2.1` folgt via **Satz - $\in$Menge**: $1+\lambda$ Menge.

...

...

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E.$

...

`5:` Aus `4`, aus `2.1`
und aus `2.3`„$(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda))^2)$

$$+ (0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot (1 + \lambda))^2)$$

$$= \ldots = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot (1 + \lambda))^2$$“

folgt per definitionem „E“ : $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema2`: $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E.$

<u>Konklusion “ $E = \mathbb{N}$” .</u> Für die spezielle Klasse

$$E = \Big\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \big(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot \omega)^2\big) \\ + \big(0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot \omega)^2\big) \\ = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot \omega)^2\Big\}$$

wurde gezeigt:

`1:` $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` $0 \in E$.

`3:` $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{122}$$

wahr. Im Hinblick auf (109) bedeutet dies:

`Thema3`	$n \in \mathbb{N}$.
`1` Aus `Thema3` und aus (122) folgt:	$n \in E$.
`2` Aus `1` und aus (116) folgt: $(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2) + (0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2)$ $= 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2$.	

Ergo `Thema3`:

$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2) + (0^2 + 2^2 + 4^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2) \\ = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (1 + 2 \cdot n)^2.$$

$\square$

12.5 $1+1+1^2+\ldots+1^n = *$

Die Aussage

$$\text{Für jede natürliche Zahl } n \text{ gilt:} \quad 1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^n = 1 + n, \tag{123}$$

soll bewiesen werden. Zur Bearbeitung stehen

Satz - Vollständige Induktion

$E \subseteq \mathbb{N}$

$\wedge$ $0 \in E$

$\wedge$ $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$

$\Rightarrow$

$E = \mathbb{N}$

sowie

Rekursion "$1 + x + x^2 + \ldots + x^n$".

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^0 = 1, \tag{124}$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + x + x^2 + \ldots + x^{1+n} = \big(1 + x + x^2 + \ldots + x^n\big) + x^{1+n}, \tag{125}$$

zur Verfügung.

Festlegung E. E soll aus genau jenen natürlichen Zahlen bestehen, für die die Gleichung von (123) wahr ist:

$$E = \big\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^\omega = 1 + \omega\big\}. \tag{126}$$

1.Prämisse "$E \subseteq \mathbb{N}$".

`Thema1` $p \in E$.

2: Aus `Thema1` folgt via (126):

$p \in \mathbb{N} \wedge 1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^p = 1 + p.$

3: Aus 2 folgt: $p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": $E \subseteq \mathbb{N}$.

<u>**2.Prämisse "** $0 \in E$**" .**</u> Via (124) gilt:

$$1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^0 = 1. \tag{127}$$

Auch gilt

$$1 + 0 = 1. \tag{128}$$

Aus (127) und aus (128) folgt:

$$1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^0 = 1 + 0. \tag{129}$$

Wie bereits früher festgestellt gilt auch

$$0 \text{ Menge} \wedge 0 \in \mathbb{N}. \tag{130}$$

Aus (130) und (129) folgt via (126),

$$0 \in E.$$

<u>**3.Prämisse "** $\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$**" .**</u>

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $\lambda \in E.$

`1.1:` Aus `Thema2` folgt via (126): $\lambda \in \mathbb{N}.$

`1.2:` Aus `Thema2` folgt via (126): $1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^\lambda = 1 + \lambda.$

`2.1:` Aus `1.1` folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}.$

`2.2:` $1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^{1+\lambda}$
$\overset{1.1,(125)}{=} \left(1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^\lambda\right) + 1^{1+\lambda}$
$\overset{1.2}{=} 1 + \lambda + 1^{1+\lambda}$
$= 1 + \lambda + 1$
$= 1 + (1 + \lambda).$

`3:` Aus `2.1` folgt via **Satz -** $\in$**Menge**: $1 + \lambda$ Menge.

`4:` Aus `3`, aus `2.1` und aus `2.2`"$1+1+1^2+\ldots+1^{1+\lambda} = \ldots = 1+(1+\lambda)$"
folgt per definitionem "E" : $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema2`: $\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E.$

Konklusion “ $E = \mathbb{N}$” . Für die spezielle Klasse

$$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^\omega = 1 + \omega\right\}$$

wurde gezeigt:

`1:` $E \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` $0 \in E$.

`3:` $\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$.

Damit sind die drei Prämissen von **Satz - Vollständige Induktion** wahr. Somit ist auch die Konklusion von **Satz - Vollständige Induktion**,

$$E = \mathbb{N}, \tag{131}$$

wahr. Im Hinblick auf (123) bedeutet dies:

`Thema3`		$n \in \mathbb{N}$.
`1`	Aus `Thema3` und aus (131) folgt:	$n \in E$.
`2`	Aus `1` und aus (126) folgt:	$1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^n = 1 + n$.

Ergo `Thema3`: $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^n = 1 + n$.

□