Vorkurs Mathematik
Endliche Summation

Andreas Unterreiter

29. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Es soll die Summe der Zahlen

$$-2, 3, -5, 7, -11, 13, -17, 19, -23, 19,$$

berechnet werden. Mit Schulmathematik bieten sich mehrere Möblichkeiten an, die alle das gleiche Ergebnis liefern.

So könnte etwa links beginnend, jede Zahl zur Summe der bisherigen Zahlen hinzuaddiert werden. Schematisch sieht dies unter Angebe der Zwischenresultate etwa so aus:

$$\begin{array}{ccccc}
-2 & + & 3 & = & 1, \\
1 & + & -5 & = & -4, \\
-4 & + & 7 & = & 3, \\
3 & + & -11 & = & -8, \\
-8 & + & 13 & = & 5, \\
5 & + & -17 & = & -12, \\
-12 & + & 19 & = & 7, \\
7 & + & -23 & = & -16, \\
-16 & + & 19 & = & \boxed{3}
\end{array}$$

Mathematisch präziser, aber weniger gut lesbar geschieht hier Folgendes:

$$((((((((-2+3)+(-5))+7)+(-11))+13)+(-17))+19)+(-23))+19 = 3.$$

Es fällt die nicht einfach zu handhabende Menge von Klammern auf. Die Klammern legen die Reihenfolge der Summation fest. Dies ist interessant, doch in Bezug auf das Ergebnis, das ja nur von den Summanden, doch nicht von der Reihenfolge der Summation abhängt, von geringer Bedeutung. Deswegen verzichtet man bei der Darstellung der Summe endlich vieler Summanden auf die Klammern und würde im vorliegenden Fall einfacher

$$-2+3+(-5)+7+(-11)+13+(-17)+19+(-23)+19,$$

schreiben.

Wichtiger als die Reihenfolge ist zu wissen, welche und wie viele Zahlen summiert werden sollen. Umgangssprachlich könnte man im vorliegenden Fall etwa sagen:

> “Es sind zehn Zahlen zu addieren, deren 1te gleich -2, deren 2te gleich 3, deren 3te gleich -5, deren 4te gleich 7, deren 5te gleich -11, deren 6te gleich 13, deren 7te gleich -17, deren 8te gleich 19, deren 9te gleich -23, deren 10te gleich 19 ist” .

Mit dieser umgangssprachlichen Aussage wird die Funktion

$$f : \{1, \ldots, 10\} \to \mathbb{R},$$

$$
\begin{aligned}
f(\,1\,) &= -2\\
f(\,2\,) &= 3\\
f(\,3\,) &= -5\\
f(\,4\,) &= 7\\
f(\,5\,) &= -11\\
f(\,6\,) &= 13\\
f(\,7\,) &= -17\\
f(\,8\,) &= 19\\
f(\,9\,) &= -23\\
f(10) &= 19
\end{aligned}
$$

beschrieben und die Summe hat nun die Form

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10),$$

die als Summe der (insgesamt zehn) Zahlen

$$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7), f(8), f(9), f(10)$$

bezeichnet wird. Hier hat jeder der Summanden die Form "$f(j)$", wobei $j \in \{1, \ldots, 10\}$. Anders formuliert durchläuft der "Zähler j" die natürlichen Zahlen von 1 bis 10. Bei jedem Schritt der Summation wird ein Funktionswert $f(j)$ hinzuaddiert und es wird mit $f(1)$ begonnen wird. Dies kann einfach als Algorithmus dargestellt werden:

$$
\begin{array}{ll}
\texttt{Initialisierung}: & \mathit{Summe}(1) = f(1) \\
\texttt{for}\ j = 1, \ldots, 9: & \mathit{Summe}(1+j) = \mathit{Summe}(j) + f(1+j) \\
\hline
\texttt{Ausgabe}: & \mathit{Summe}(10)
\end{array}
$$

so dass gemäß Konstruktion

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Summe}(10)\\
&\quad = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)\\
&\qquad = -2 + 3 + (-5) + 7 + (-11) + 13 + (-17) + 19 + (-23) + 19.
\end{aligned}
$$

Dieser Algorithmus wird durch den Term

$$\sum_{j=1}^{10} f(j),$$

in dem erstmalig im Vorkurs das Summensymbol $\sum$ erscheint, dargestellt. Es folgt

$$\sum_{j=1}^{10} f(j)$$
$$= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$$
$$= -2 + 3 + (-5) + 7 + (-11) + 13 + (-17) + 19 + (-23) + 19.$$

$\star$

Genau so gut wie die Zahlen

$$-2, 3, -5, 7, -11, 13, -17, 19, -23, 19,$$

von links nach rechts mit -2 beginnend zu summieren, kann von rechts nach links mit 19 beginnend addiert werden. Es resultiert unter Beibehaltung von f,

$$f(10) + f(9) + f(8) + f(7) + f(6) + f(5) + f(4) + f(3) + f(2) + f(1),$$

oder als Algorithmus,

`Initialisierung` :	$Summe(1) = f(10)$
`for` $j = 1, \ldots, 9$:	$Summe(1 + j) = Summe(j) + f(10 - j)$
`Ausgabe` :	$Summe(10)$

oder mit Hilfe des Summensymbols,

$$\sum_{j=1}^{10} f(11 - j)$$
$$= f(10) + f(9) + f(8) + f(7) + f(6) + f(5) + f(4) + f(3) + f(2) + f(1)$$
$$= 19 + (-23) + 19 + (-17) + 13 + (-11) + 7 + (-5) + 3 + (-2).$$

$\star$

Alternativ könnte man zur Berechnung der Summe von

$$-2, 3, -5, 7, -11, 13, -17, 19, -23, 19,$$

auf die Idee kommen, zunächst schrittweise die negativen Zahlen zu addieren und dann die positiven Zahlen hinzuzählen, also mit Hilfe der Funktion f,

$$-2 + (-5) + (-11) + (-17) + (-23) + 3 + 7 + 13 + 19 + 19$$
$$= f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(10),$$

zu bilden. Versucht man, diese Art des Summierens algorithmisch zu fassen, ist man mit der Schwierigkeit konfrontiert, erst ein Verfahren entwickeln zu müssen, wonach der Zähler j der Reihe nach die Zahlen

$$1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 10,$$

durchläuft - oder wahlweise eine andere Funktion zum Durchlaufen der Zahlen in der gewünschten Reihenfolge, also

$$g : \{1, \ldots, 10\} \to \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} g(\ 1\ ) &= \ -2 \\ g(\ 2\ ) &= \ -5 \\ g(\ 3\ ) &= -11 \\ g(\ 4\ ) &= -17 \\ g(\ 5\ ) &= -23 \\ g(\ 6\ ) &= \ \ \ 3 \\ g(\ 7\ ) &= \ \ \ 7 \\ g(\ 8\ ) &= \ \ 13 \\ g(\ 9\ ) &= \ \ 19 \\ g(10) &= \ \ 19 \end{aligned}$$

zu betrachten, um

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{10} g(j) \\ &\quad = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) + g(6) + g(7) + g(8) + g(9) + g(10) \\ &\qquad = -2 + (-5) + (-11) + (-17) + (-23) + 3 + 7 + 13 + 19 + 19, , \end{aligned}$$

zu erhalten. Der Nachteil der Einführung einer neuen Funktion mit neuer Bezeichnung liegt darin, diesen Vorgang für jede neue Art der Summation wiederholen zu müssen. Einfacher ist es, nicht die Funktion, sondern die Reihenfolge der Durchlaufung der Zahlen von $\{1, \ldots, 10\}$ zu ändern. Neuerlich ist es hilfreich, dies zunächst umgaangssprachlich zu versuchen:

“Als 1tes mit der 1ten Zahl beginnen, als 2tes die 3te Zahl addieren, als 3tes die 5te Zahl addieren, als 4tes die 7te Zahl addieren, als 5tes die 9te Zahl addieren, als 6tes die 2te Zahl addieren, als 7tes die 4te Zahl addieren, als 8tes die 6te Zahl addieren, als 9tes die 8te Zahl addieren, als 10tes die 10te Zahl addieren” .

Hier wird offenbar über die Funktion

$$\phi : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 10\},$$

$$\begin{aligned}
\phi(\ 1\ ) &= \ 1\\
\phi(\ 2\ ) &= \ 3\\
\phi(\ 3\ ) &= \ 5\\
\phi(\ 4\ ) &= \ 7\\
\phi(\ 5\ ) &= \ 9\\
\phi(\ 6\ ) &= \ 2\\
\phi(\ 7\ ) &= \ 4\\
\phi(\ 8\ ) &= \ 6\\
\phi(\ 9\ ) &= \ 8\\
\phi(10) &= 10
\end{aligned}$$

gesprochen. Anders als die Funktionen f oder g nehmen die Werte von ϕ nicht die zu addierenden Zahlen, sondern die Werte

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

des Zählers j an. Offenbar gilt

$$\phi : \{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots, 10\} \text{ bijektiv.}$$

Die angestrebte Summationsreihenfolge wird sichtbar, wenn

$$f \circ \phi : \{1, \dots, 10\} \to \mathbb{R}, \quad (f \circ \phi)(j) = f(\phi(j)),$$

betrachtet wird.

$$\begin{array}{lcl}
\phi(\ 1\ ) = \ 1 & , & (f\circ\phi)(\ 1\ ) = f(\phi(\ 1\ )) = \ f(\ 1\ ) = \ -2\\
\phi(\ 2\ ) = \ 3 & , & (f\circ\phi)(\ 2\ ) = f(\phi(\ 2\ )) = \ f(\ 3\ ) = \ -5\\
\phi(\ 3\ ) = \ 5 & , & (f\circ\phi)(\ 3\ ) = f(\phi(\ 3\ )) = \ f(\ 5\ ) = -11\\
\phi(\ 4\ ) = \ 7 & , & (f\circ\phi)(\ 4\ ) = f(\phi(\ 4\ )) = \ f(\ 7\ ) = -17\\
\phi(\ 5\ ) = \ 9 & , & (f\circ\phi)(\ 5\ ) = f(\phi(\ 5\ )) = \ f(\ 9\ ) = -23\\
\phi(\ 6\ ) = \ 2 & , & (f\circ\phi)(\ 6\ ) = f(\phi(\ 6\ )) = \ f(\ 2\ ) = \ \ 3\\
\phi(\ 7\ ) = \ 4 & , & (f\circ\phi)(\ 7\ ) = f(\phi(\ 7\ )) = \ f(\ 4\ ) = \ \ 7\\
\phi(\ 8\ ) = \ 6 & , & (f\circ\phi)(\ 8\ ) = f(\phi(\ 8\ )) = \ f(\ 6\ ) = \ 13\\
\phi(\ 9\ ) = \ 8 & , & (f\circ\phi)(\ 9\ ) = f(\phi(\ 9\ )) = \ f(\ 8\ ) = \ 19\\
\phi(10) = 10 & , & (f\circ\phi)(10) = f(\phi(10)) = \ f(10) = \ 19
\end{array}$$

In algorithmischer Darstellung sieht die Summation folgender Maßen aus:

$$\begin{array}{ll}
\texttt{Initialisierung}: & \mathit{Summe}(1) = (f \circ \phi)(1)\\
\texttt{for}\ j = 1, \dots, 9: & \mathit{Summe}(1+j) = \mathit{Summe}(j) + (f \circ \phi)(1+j)\\
\hline
\texttt{Ausgabe}: & \mathit{Summe}(10)
\end{array}$$

Mit Summensymbol:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{10}(f\circ\phi)(j)\\
&\quad=(f\circ\phi)(1)+(f\circ\phi)(2)+(f\circ\phi)(3)+(f\circ\phi)(4)+(f\circ\phi)(5)+(f\circ\phi)(6)\\
&\qquad\qquad+(f\circ\phi)(7)+(f\circ\phi)(8)+(f\circ\phi)(9)+(f\circ\phi)(10)\\
&\qquad=f(\phi(1))+f(\phi(2))+f(\phi(3))+f(\phi(4))+f(\phi(5))+f(\phi(6))\\
&\qquad\qquad+f(\phi(7))+f(\phi(8))+f(\phi(9))+f(\phi(10))\\
&\quad=f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)+f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)\\
&\qquad\qquad=-2+(-5)+(-11)+(-17)+(-23)+3+7+13+19+19,
\end{aligned}
$$

oder auch

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{10} f(\phi(j))\\
&\qquad=f(\phi(1))+f(\phi(2))+f(\phi(3))+f(\phi(4))+f(\phi(5))+f(\phi(6))\\
&\qquad\qquad+f(\phi(7))+f(\phi(8))+f(\phi(9))+f(\phi(10))\\
&\quad=f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)+f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)\\
&\qquad\qquad=-2+(-5)+(-11)+(-17)+(-23)+3+7+13+19+19.
\end{aligned}
$$

Klarer Weise gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{10} f(j)\\
&\quad=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)+f(9)+f(10)\\
&\qquad=-2+3+(-5)+7+(-11)+13+(-17)+19+(-23)+19\\
&\qquad=-2+(-5)+(-11)+(-17)+(-23)+3+7+13+19+19\\
&\quad=f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)+f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)\\
&\quad=f(\phi(1))+f(\phi(2))+f(\phi(3))+f(\phi(4))+f(\phi(5))+f(\phi(6))+f(\phi(7))\\
&\qquad\qquad+f(\phi(8))+f(\phi(9))+f(\phi(10))\\
&\qquad\qquad\qquad=\sum_{j=1}^{10} f(\phi(j)).
\end{aligned}
$$

⋆

Mit dem soeben vorgestellten “Um-Indizieren” kann auch die vorherige Summation dargestellt werden:

$$\psi:\{1,\dots,10\}\to\{1,\dots,10\},\quad \psi(j)=11-j,$$

so dass

$$\begin{aligned}
&19 + (-23) + 19 + (-17) + 13 + (-11) + 7 + (-5) + 3 + (-2) \\
&\quad = f(10) + f(9) + f(8) + f(7) + f(6) + f(5) + f(4) + f(3) + f(2) + f(1) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{n} f(11-j) = \sum_{j=1}^{10} f(\psi(j)) = \sum_{j=1}^{10} (f \circ \psi)(j).
\end{aligned}$$

Offenbar gilt

$$\psi : \{1, \ldots, 10\} \to \{1, \ldots, 10\} \text{ bijektiv},$$

und

$$\sum_{j=1}^{10} (f \circ \psi)(j) = \sum_{j=1}^{10} f(\psi(j)) = \sum_{j=1}^{10} f(11-j) = \sum_{j=1}^{10} f(j).$$

2 $\sum_{j=u}^{o} f(j)$ - Teil 1 - Standardfall $u \leq o$

Ohne eine genaue Definition von “$\sum_{j=u}^{o} f(j)$” zu geben gilt in den hier am meisten interessierenden Fällen

---

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $u \in \mathbb{Z}$

$\wedge$ $u \in D$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j=u}^{u} f(j) = f(u).$$

<u>**Beispiel**</u> (ohne Beweis) Für $f = (.)^4$ und $u = 5$ gilt $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion mit $D = \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{Z}$ und $u \in D$, so dass

$$\sum_{j=5}^{5} f(j) = \sum_{j=5}^{5} (.)^4(j) = \sum_{j=5}^{5} j^4 = 5^4 = 625.$$

$\Box$(Beispiel)

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z}$

$\wedge \quad u \leq o$

$\wedge \quad \{u, \ldots, 1+o\} \subseteq D$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j=u}^{1+o} f(j) = \left(\sum_{j=u}^{o} f(j) \right) + f(1+o).$$

Ohne hier weiter vertiefen zu wollen, ist durch diese beide Regeln für die genannten u, o sowohl die Summe

$$f(u) + f(1+u) + f(2+u) + \ldots + f(o),$$

als auch deren Darstellung mit dem Summensymbol

$$\sum_{j=u}^{o} f(j),$$

fest gelegt und es gilt

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z}$

$\wedge \quad u \leq o$

$\wedge \quad \{u, \ldots, o\} \subseteq D$

$\Rightarrow$

$$f(u) + f(1+u) + f(2+u) + \ldots + f(o) = \sum_{j=u}^{o} f(j).$$

In algorithmischer Darstellung ist hier von

`Initialisierung` :	$Summe(u) = f(u)$
`for` $j = u, \ldots, -1+o$:	$Summe(1+j) = Summe(j) + f(1+j)$
`Ausgabe` :	$Summe(o)$

mit

$$Summe(o) = f(u) + f(1+u) + f(2+u) + \ldots + f(o) = \sum_{j=u}^{o} f(j),$$

die Rede.

2.1 Indexverschiebung $\sum_{k=-a+u}^{-a+o} f(a+k)$ und $\sum_{k=a+u}^{a+o} f(-a+k)$

Im eingangs erwähnten Beispiel wird die Funktion f zur Erfassung der Summanden

$$-2, 3, -5, 7, -11, 13, -17, 19, -23, 19,$$

via

$$f : \{1, \ldots, 10\} \to \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
f(\ 1\ ) &= \ -2 \\
f(\ 2\ ) &= \quad 3 \\
f(\ 3\ ) &= \ -5 \\
f(\ 4\ ) &= \quad 7 \\
f(\ 5\ ) &= -11 \\
f(\ 6\ ) &= \ \ 13 \\
f(\ 7\ ) &= -17 \\
f(\ 8\ ) &= \ \ 19 \\
f(\ 9\ ) &= -23 \\
f(10) &= \ \ 19
\end{aligned}$$

festgelegt. Hiermit ist klar, dass der Zähler j die Zahlen $1, \ldots, 10$ durchläuft. Genau so gut hätte man auch die Zahlen $0, \ldots, 9$ oder $-4, \ldots, 5$ als Zähler benutzen können, etwa

$$\phi : \{-4, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 10\},$$

$$\begin{aligned}
\phi(-4) &= 1 \\
\phi(-3) &= 3 \\
\phi(-2) &= 5 \\
\phi(-1) &= 7 \\
\phi(\ 0\ ) &= 9 \\
\phi(\ 1\ ) &= 2 \\
\phi(\ 2\ ) &= 4 \\
\phi(\ 3\ ) &= 6 \\
\phi(\ 4\ ) &= 8 \\
\phi(\ 5\ ) &= 10
\end{aligned}$$

um dann, ohne an der eigentlichen Berechnung etwas zu ändern,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-4}^{5}(f\circ\phi)(k) = \sum_{k=-4}^{5} f(\phi(k))&\\ = f(\phi(-4)) + f(\phi(-3)) + f(\phi(-2)) + f(\phi(-1)) + f(\phi(0)) + f(\phi(1))&\\ + f(\phi(2)) + f(\phi(3)) + f(\phi(4)) + f(\phi(5))&\\ = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)&\\ = \sum_{j=1}^{10} f(j),&\end{aligned}$$

zu erhalten. Hier ist

$$\phi : \{-4,\ldots,5\} \to \{1,\ldots,10\} \text{ bijektiv,}$$

mehr noch, ϕ ist eine *streng wachsende* Funktion, die explizit als

$$\phi : \{-4,\ldots,5\} \to \{1,\ldots,10\}, \quad \phi(k) = 5 + k,$$

darstellbar ist. Allgemein gilt

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z}$

$\wedge \quad u \leq o$

$\wedge \quad \{u,\ldots,o\} \subseteq D$

$\wedge \quad a \in \mathbb{Z}$

$\wedge \quad \phi : \{-a+u,\ldots,-a+o\} \to \{u,\ldots,o\}, \quad \phi(k) = a + k$

$\Rightarrow$

$\{-a+u,\ldots,-a+o\} \subseteq \mathsf{dom}\,(f\circ\phi)$

$\wedge \quad \displaystyle\sum_{k=-a+u}^{-a+o} f(\phi(k)) = \sum_{k=-a+u}^{-a+o} f(a+k) = \sum_{j=u}^{o} f(j),$

---

wobei man sagt, dass $\displaystyle\sum_{k=-a+u}^{-a+o} f(a+k)$ durch Indexverschiebung um a nach unten aus $\sum_{j=u}^{o} f(j)$ hervorgegangen ist. Es fällt auf: In $\sum_{k=-a+u}^{-a+o} f(a+k)$ ist der Indexbereich gegenüber $\sum_{j=u}^{o} f(j)$ um a vermindert, während der Laufindex $a+k$ in $\sum_{k=-a+u}^{-a+o} f(a+k)$ gegenüber j in $\sum_{j=u}^{o} f(j)$ um a vermehrt ist.

Neben einer Indexverschiebung um a nach unten gibt es auch eine Indexverschiebung um a nach oben.

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to B \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z} \\
\wedge & u \leq o \\
\wedge & \{u, \ldots, o\} \subseteq D \\
\wedge & a \in \mathbb{Z} \\
\wedge & \phi : \{a+u, \ldots, a+o\} \to \{u, \ldots, o\}, \quad \phi(k) = -a+k \\
\Rightarrow & \\
 & \{a+u, \ldots, a+o\} \subseteq \mathsf{dom}\,(f \circ \phi) \\
\wedge & \displaystyle\sum_{k=a+u}^{a+o} f(\phi(k)) = \sum_{k=a+u}^{a+o} f(-a+k) = \sum_{j=u}^{o} f(j),
\end{array}
$$

---

wobei man sagt, dass $\sum_{k=a+u}^{a+o} f(-a+k)$ durch Indexverschiebung um a nach oben aus $\sum_{j=u}^{o} f(j)$ hervorgegangen ist. Es fällt auf: In $\sum_{k=a+u}^{a+o} f(-a+k)$ ist der Indexbereich gegenüber $\sum_{j=u}^{o} f(j)$ um a vermehrt, während der Laufindex $-a+k$ in $\sum_{k=a+u}^{a+o} f(-a+k)$ gegenüber j in $\sum_{j=u}^{o} f(j)$ um a vermindert ist.

Beispiel (ohne Beweis) Für $f = \sqrt{\cdot}$ und $u = 3$ und $o = 7$ gilt

$$\sqrt{\cdot} : [0| + \infty[\to \mathbb{R},$$

$$\{3, \ldots, 7\} \subseteq [0| + \infty[,$$

und

$$\sum_{j=3}^{7} \sqrt{j} = \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}.$$

Mit Indexverschiebung um 5 nach unten ergibt sich

$$\sum_{j=3}^{7} \sqrt{j} = \sum_{k=-2}^{2} \sqrt{5+k} = \sum_{j=2}^{2} \sqrt{5+j},$$

mit Indexverschiebung um 97 nach oben ergibt sich

$$\sum_{j=3}^{7} \sqrt{j} = \sum_{k=100}^{104} \sqrt{-97+k} = \sum_{j=100}^{104} \sqrt{-97+j}.$$

Auch ist eine Änderung der Reihenfolge der Summation mit anschließender Indexverschiebung nach unten möglich. So gilt etwa

$$\begin{aligned}\sum_{j=3}^{7} \sqrt{j} &= \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} \\ &= \sqrt{7} + \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{4} + \sqrt{3} = \sum_{j=3}^{7} \sqrt{10-j} \\ &= \sum_{k=1}^{5} \sqrt{10-(2+k)} = \sum_{k=1}^{5} \sqrt{8-k} = \sum_{j=1}^{5} \sqrt{8-j}.\end{aligned}$$

□(Beispiel)

2.2 DistributivGesetz $c \cdot \sum_{j=u}^{o} f(j) = \sum_{j=u}^{o} c \cdot f(j)$

Es soll die Summe der Zahlen

$$-4, 6, -10, 14, -22, 26, -34, 38, -46, 38$$

ermittelt werden.

1.Möglichkeit

$$-4 + 6 + (-10) + 14 + (-22) + 26 + (-34) + 38 + (-46) + 38 = \sum_{j=1}^{10} g(j),$$

wobei

$$
\begin{array}{c}
g:\{1,\ldots,10\}\to\mathbb{R},\\
\begin{array}{rr}
g(\ 1\ ) = & -4\\
g(\ 2\ ) = & 6\\
g(\ 3\ ) = & -10\\
g(\ 4\ ) = & 14\\
g(\ 5\ ) = & -22\\
g(\ 6\ ) = & 26\\
g(\ 7\ ) = & -34\\
g(\ 8\ ) = & 38\\
g(\ 9\ ) = & -46\\
g(10) = & 38
\end{array}.
\end{array}
$$

Dieser Weg bringt kaum Neues und wird hier nicht weiter beschritten.

2.Möglichkeit Es fällt auf, dass jeder Summand gerade ist. Somit kann die 2 als gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden. Wird die gesuchte Summe mit s bezeichnet, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
s &= -4+6+(-10)+14+(-22)+26+(-34)+38+(-46)+38\\
&= 2\cdot(-2)+2\cdot 3+2\cdot(-5)+2\cdot 7+2\cdot(-11)+2\cdot 13+2\cdot(-17)+2\cdot 19+2\cdot(-23)+2\cdot 19\\
&= 2\cdot\big(-2+3+(-5)+7+(-11)+13+(-17)+19+(-23)+19\big)\\
&= 2\cdot\sum_{j=1}^{10} f(j) = 2\cdot 3 = 6.
\end{aligned}
$$

Bei genauerer Betrachtung gilt

$$
\forall j : j\in\{1,\ldots,10\} \qquad \Rightarrow \qquad g(j) = 2\cdot f(j),
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{10} 2\cdot f(j) = \sum_{j=1}^{10} g(j)\\
&= -4+6+(-10)+14+(-22)+26+(-34)+38+(-46)+38\\
&= 2\cdot\big(-2+3+(-5)+7+(-11)+13+(-17)+19+(-23)+19\big)\\
&= 2\cdot\sum_{j=1}^{10} f(j).
\end{aligned}
$$

Allgemeiner gilt das DistributivGesetz:

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z}$

$\wedge \quad u \leq o$

$\wedge \quad \{u, \ldots, o\} \subseteq D$

$\wedge \quad c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$$c \cdot \sum_{j=u}^{o} f(j) = \sum_{j=u}^{o} c \cdot f(j).$$

---

3 $\sum_{j=u}^{o} f(j)$ - Teil 2 - Allgemeiner Fall

3.1 $o < u$ - Vorstellung

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad u \in \mathbb{Z}$

$\wedge \quad u \in D \wedge -1 + u \in D$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j=u}^{-1+u} f(j) = 0.$$

Beispiel (ohne Beweis) Für $f = \exp$ und $u = -137$ gilt $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion mit $D = \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{Z}$ und $u = -137 \in D$ und $-1 + u = -138 \in D$, so dass

$$\sum_{j=-137}^{-138} f(j) = \sum_{j=-137}^{-138} \exp(j) = 0.$$

□(Beispiel)

$$\begin{aligned} & f : D \to B \text{ reelle Funktion} \\ \wedge \quad & a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \\ \wedge \quad & \Big\{ \min\{a, 1+b\}, \ldots, \max\{-1+a, b\} \Big\} \subseteq D \\ \Rightarrow & \\ & \sum_{j=a}^{b} f(j = - \sum_{j=1+b}^{-1+a} f(j). \end{aligned}$$

Beispiel (ohne Beweis) Für $f = \mathsf{rez}$ und $a = 5$ und $b = 2$ gilt $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion mit $D = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ und

$$-1 + a = 4, 1 + b = 4,$$

$$\min\{a, 1+b\} = \min\{5, 3\} = 3,$$

$$\max\{-1+a, b\} = \max\{4, 2\} = 4,$$

somit

$$\Big\{ \min\{a, 1+b\}, \ldots \max\{-1+a, b\} \Big\} = \{3, \ldots, 4\} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R},$$

also

$$\Big\{ \min\{a, 1+b\}, \ldots \max\{-1+a, b\} \Big\} \subseteq D,$$

so dass

$$\sum_{j=5}^{3} \mathsf{rez}(j) = \sum_{j=5}^{3} \frac{1}{j} = - \sum_{j=4}^{4} \frac{1}{j} = -\frac{1}{4}.$$

□(Beispiel)

3.2 $\left(\sum_{j=u}^{m} f(j)\right) + \left(\sum_{j=1+m}^{o} f(j)\right) = \sum_{j=u}^{o} f(j)$

Zunächst gilt in einem Standardfall:

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z}$

$\wedge$ $m \in \mathbb{Z}$

$\wedge$ $u \leq m \leq o$

$\wedge$ $\{u, \ldots, o\} \subseteq D$

$\wedge$ $1 + m \in D$

$\Rightarrow$

$$\left(\sum_{j=u}^{m} f(j)\right) + \left(\sum_{j=1+m}^{o} f(j)\right) = \sum_{j=u}^{o} f(j).$$

<u>**Beispiel**</u> (ohne Beweis) Für $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ und $u = 5$ und $m = 7$ und $o = 10$ gilt $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion mit $D = \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{Z}$, $o \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, $u \leq m \leq o$, $\{u, \ldots, o\} \subseteq D$, $1 + m = 8 \in D$, so dass

$$\left(\sum_{j=u}^{m} f(j)\right) + \left(\sum_{j=1+m}^{o} f(j)\right) = \sum_{j=u}^{o} f(j),$$

also

$$\left(\sum_{j=5}^{8} \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(j)\right) + \left(\sum_{j=9}^{10} \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(j)\right) = \sum_{j=5}^{10} \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(j),$$

oder auch

$$\left(\sum_{j=5}^{8} j\right) + \left(\sum_{j=9}^{10} j\right) = \sum_{j=5}^{10} j,$$

und via

$$\sum_{j=5}^{8} j = 5 + 6 + 7 + 8 = 26,$$

$$\sum_{j=9}^{10} j = 9 + 10 = 19,$$

$$\sum_{j=5}^{10} j = 5+6+7+8+9+10 = 45,$$

gilt in der Tat

$$\left(\sum_{j=5}^{8} j\right) + \left(\sum_{j=9}^{10} j\right) = 26 + 19 = 45 = \sum_{j=5}^{10} j.$$

$\square$(Beispiel)

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z}$

$\wedge$ $u \leq o$

$\wedge$ $m \in \mathbb{Z}$

$\wedge$ $\Big\{ \min\{u, 1+m\}, \dots, \max\{m.o\} \Big\} \subseteq D$

$\Rightarrow$

$$\left(\sum_{j=u}^{m} f(j)\right) + \left(\sum_{j=1+m}^{o} f(j)\right) = \sum_{j=u}^{o} f(j).$$

Beispiel (ohne Beweis) Für $f = |.|$ und $u = -2$ und $o = 3$ und $m = -6$ gilt $|.| : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion mit $D = \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{Z}$, $o \in \mathbb{Z}$, $u \leq o$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$\min\{u, 1+m\} = \min\{-2, 1+(-6)\} = \min\{-2, -5\} = -5,$$

$$\max\{m, o\} = \max\{-6, 3\} = 3,$$

so dass

$$\Big\{ \min\{u, 1+m\}, \dots, \max\{m, o\} \Big\} = \{-5, \dots, 3\},$$

somit via $\{-5, \dots, 3\} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$,

$$\Big\{ \min\{u, 1+m\}, \dots, \max\{m, o\} \Big\} \subseteq D,$$

und via vorherigen Satzes,

$$\left(\sum_{j=-2}^{-6} |j|\right) + \left(\sum_{j=-5}^{3} |j|\right) = \sum_{j=-2}^{3} |j|.$$

Im Detail,

$$\sum_{j=-2}^{-6} |j| = -\sum_{j=-5}^{-3} |j| = -(|-5| + |-4| + |-3|) = -12,$$

$$\sum_{j=-5}^{3} |j| = |-5| + |-4| + |-3| + |-2| + |-1| + |0| + |1| + |2| + |3| = 21,$$

$$\sum_{j=-2}^{3} |j| = |-2| + |-1| + |0| + |1| + |2| + |3| = 9,$$

also

$$\left(\sum_{j=-2}^{-6} |j|\right) + \left(\sum_{j=-5}^{3} |j|\right) = -12 + 21 = 9 = \sum_{j=-2}^{3} |j|.$$

□(Beispiel)

4 $\sum_{j\in A} f(j)$ - Ungerichtete Summation

Wie bereits gesagt, hängt das Ergebnis der Summation endlich vieler reeller Zahlen, etwa von

$$-2, 3, -5, 7, -11, 13, -17, 19, -23, 19,$$

nicht von der Reihenfolge ab, mit der addiert wird. Die Berechnung der Summe mit der Funktion

$$f : \{1, \ldots, 10\} \to \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
f(\ 1\ ) &= \ -2 \\
f(\ 2\ ) &= \ \ \ 3 \\
f(\ 3\ ) &= \ -5 \\
f(\ 4\ ) &= \ \ \ 7 \\
f(\ 5\ ) &= -11 \\
f(\ 6\ ) &= \ \ 13 \\
f(\ 7\ ) &= -17 \\
f(\ 8\ ) &= \ \ 19 \\
f(\ 9\ ) &= -23 \\
f(10) &= \ \ 19
\end{aligned}$$

via

$$\sum_{j=1}^{10} f(j),$$

ist also nur eine von vielen Möglichkeiten, diese Summe zu berechnen - hier werden, wie bereits an anderer Stelle erwähnt, die Zahlen beginnend bei -2 endend bei 19 in der angegebenen Reihenfolge aufaddiert. Genau so gut könnte man erst die positiven Zahlen

$$3, 7, 13, 19, 19,$$

addieren, dann die negativen Zahlen

$$-2, -5, -11, -17, -23,$$

addieren und dann diese beiden Summen addieren. Eine mathematische Umsetzung dieser Vorgehensweise wäre, *zwei* Funktionen

$$g : \{1, \ldots, 5\} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h : \{1, \ldots, 5\} \to \mathbb{R},$$

via

$$\begin{aligned} g(1) &= \ \ 3 \\ g(2) &= \ \ 7 \\ g(3) &= 13 \\ g(4) &= 19 \\ g(5) &= 19 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h(1) &= \ \ -2 \\ h(2) &= \ \ -5 \\ h(3) &= -11 \\ h(4) &= -17 \\ h(5) &= -23 \end{aligned}$$

festzulegen, um dann

$$\sum_{k=1}^{5} g(k) = g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) = 3 + 7 + 13 + 19 + 19 = 61,$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{5} h(l) &= h(1) + h(2) + h(3) + h(4) + h(5) \\ &= -2 + (-5) + (-11) + (-17) + (-23) = -58, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{10} f(j) &= -2 + 3 + (-5) + 7 + (-11) + 13 + (-17) + 19 + (-23) + 19 \\ &= (3 + 7 + 13 + 19 + 19) + (-2 + (-5) + (-11) + (-17) + (-23)) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{5} g(k) \right) + \left(\sum_{l=1}^{5} h(jl \right) \end{aligned}$$

zu erhalten. Rechnung und Darstellung sind mathematisch richtig. Doch ist die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{10} f(j) = \left(\sum_{k=1}^{5} g(k)\right) + \left(\sum_{l=1}^{5} h(l)\right),$$

nicht ohne Weiteres zu verstehen, weil sich bei blosser Betrachtung nicht der Zusammenhang von f, g, h erschließt. Dies ist umso weniger zufrieden stellend, als bei $\sum_{k=1}^{5} g(k)$ und bei $\sum_{l=1}^{5} h(l)$ jeweils nur eine Auswahl von

$$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7), f(8), f(9), f(10),$$

summiert wird: Bei $\sum_{k=1}^{5} g(k)$ ist es die Auswahl $f(2), f(4), f(6), f(8), f(10)$, bei $\sum_{l=1}^{5} h(l)$ ist es die Auswahl $f(1), f(3), f(5), f(7), f(9)$. In noch etwas holprig klingender Sprechweise wird bei

$$f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(19) = 3 + 7 + 13 + 19 + 19,$$

" die Funktion f über die Indizies $2, 4, 6, 8, 10$ summiert" und bei

$$f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9) = -2 + (-5) + (-11) + (-23),$$

wird " die Funktion f über die Indizes $1, 3, 5, 7, 9$ summiert" . Hier geschehen die Summationen noch in einer bestimmten Reihenfolge - die Indizes sind jeweils streng wachsend angeordnet -, doch wenn man sich daran erinnert, dass das Ergebnis der Summation von der Reihenfolge unabhängig ist, könnte man genau so gut auch sagen, dass " die Funktion f über die Index*menge* $\{2, 4, 6, 8\}$ summiert wird" , " die Funktion f über die Index*menge* $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ summiert wird" . Notationell sind diese Summationen ohne allzu viel Aufwand darstellbar:

$$\sum_{j\in\{2,4,6,8,10\}} f(j) = f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(10) = 3 + 7 + 13 + 19 + 19,$$

$$\sum_{j\in\{1,3,5,7,9\}} f(j) = f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9) = -2 + (-5) + (-11) + (-17),$$

und auch

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in\{1,\ldots,10\}} f(j) \\ &\quad = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(9) + f(10) \\ &\quad = -2 + 3 + (-5) + 7 + (-11) + 13 + (-17) + 19 + (-23) + 19 \\ &\quad = \sum_{j=1}^{10} f(j). \end{aligned}$$

Die zweischrittige Summation lässt sich nun besonders einfach darstellen:

$$\sum_{j=1}^{10} f(j) = \sum_{j\in\{1,\dots,10\}} f(j) = \Big(\sum_{j\in\{2,4,6,8,10\}} f(j)\Big) + \Big(\sum_{j\in\{1,3,5,7,9\}} f(j)\Big).$$

Mit den Abkürzungen

$$A = \{2,4,6,8,10\}, B = \{1,3,5,7,9\},$$

ergibt sich

$$A \cup B = \{1,\dots,10\}, A \cap B = 0,$$

und

$$\sum_{j\in A\cup B} f(j) = \Big(\sum_{j\in A} f(j)\Big) + \Big(\sum_{j\in B} f(j)\Big).$$

Somit ist die "ungerichtete, endliche Summation" im Vorkurs zwar noch nicht definiert, doch an Hand eines Beispiels zumindest präsentiert. Es könnte nun auch eine Übungsaufgabe der Form

$$\sum_{j\in\{3,6,9\}} f(j) =?,$$

gestellt werden. Zur Lösung dieser Aufgabe wird auf gerichtete Summation zurück gegriffen, indem eine Funktion

$$\phi : \{1,2,3\} \to \{3,6,9\} \quad \text{bijektiv},$$

gewählt und dann

$$\sum_{k=1}^{3} f(\phi(k)),$$

ermittelt wird. Klarer Weise gilt dann

$$\sum_{k=1}^{3} f(\phi(k)) = \sum_{j\in\{3,6,9\}} f(j),$$

unabhängig von der speziellen Wahl von ϕ. So ergibt sich etwa mit

$$\phi : \{1,2,3\} \to \{3,6,9\}, \quad \phi(k) = 3\cdot k,$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} f(\phi(k)) = \sum_{k=1}^{3} f(3\cdot k) &= f(3) + f(6) + f(9)\\ &= -5 + 13 + (-23) = -15 = \sum_{j\in\{3,6,9\}} f(j),\end{aligned}$$

aber auch mit

$$\phi : \{1,2,3\} \to \{3,6,9\}, \quad \phi(k) = 12 - 3 \cdot k,$$

ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{3} f(\phi(k)) = \sum_{k=1}^{3} f(12 - 3 \cdot k) = f(9) + f(6) + f(3)$$
$$= -23 + 13 + (-5) = -15 = \sum_{j \in \{1,2,3\}} f(j).$$

Allgemein gilt:

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j \in 0} f(j) = 0.$$

$f : D \to \mathbb{R}$

$\wedge \quad p \in D$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j \in \{p\}} f(j) = f(p).$$

$f : D \to \mathbb{R}$

$\wedge \quad p \in D$

$\wedge \quad p \notin E \subseteq D$

$\wedge \quad E$ endlich

$\Rightarrow$

$$\sum_{j \in \{p\} \cup E} f(j) = f(p) + \sum_{j \in E} f(j).$$

$f : D \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $E \subseteq D \wedge E$ endlich

$\wedge$ $A \subseteq D \wedge A$ endlich

$\wedge$ $0 = E \cap A$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j \in E \cup A} f(j) = \left(\sum_{j \in E} f(j) \right) + \left(\sum_{j \in A} f(j) \right).$$

$f : D \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $E \subseteq D \wedge E$ endlich

$\wedge$ $A \subseteq D \wedge A$ endlich

$\Rightarrow$

$$\left(\sum_{j \in E \cup A} f(j) \right) + \left(\sum_{j \in E \cap A} f(j) \right) = \left(\sum_{j \in E} f(j) \right) + \left(\sum_{j \in A} f(j) \right).$$

Für die praktische Berechnung gilt

$f : D \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $E \subseteq D \wedge E$ endlich

$\wedge$ $n \in \mathbb{N}$

$\wedge$ $\phi : \{1, \ldots, n\} \to E$ bijektiv

$\Rightarrow$

$$\sum_{j \in E} f(j) = \sum_{k=1}^{n} f(\phi(k)).$$

---

mit der Verallgemeinerung

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to \mathbb{R} \\
\wedge & E \subseteq D \wedge E \text{ endlich} \\
\wedge & \phi : A \to E \text{ bijektiv} \\
\Rightarrow & \\
 & \displaystyle\sum_{j \in E} f(j) = \sum_{k \in A} f(\phi(k)).
\end{array}
$$

Das DistributivGesetz gilt auch für ungerichtete Summation:

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to \mathbb{R} \\
\wedge & E \subseteq D \wedge E \text{ endlich} \\
\wedge & c \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow & \\
 & \displaystyle c \cdot \sum_{j \in E} f(j) = \sum_{j \in E} c \cdot f(j).
\end{array}
$$

---

5 $\sum_j c^{on}\mathbb{R}(j)$ und

Unabhängig von $u \leq o$ oder $o \leq u$ gilt

$$
\begin{array}{ll}
 & c \in \mathbb{R} \\
\wedge & u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow & \\
 & \displaystyle\sum_{j=u}^{o} c^{on}\mathbb{R}(j) = (o - u + 1) \cdot c.
\end{array}
$$

Falls E eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, ergibt sich für $c \in \mathbb{R}$ die Summe $\sum_{j \in E} c^{on}\mathbb{R}(j)$ durch Multiplikation von c mit der *Anzahl der Elemente von* E.

Es ist von Vorteil, die Anzahl der Elemente einer Menge mit Hilfe der Zählfunktion # anzugeben. Der Definitions-Bereich von # ist die *Klasse aller Mengen*, die als "Universum $\mathcal{U}$" Parameter der Mathematik ist.

$$\mathcal{U} = \{\omega : \omega \text{ Menge}\}.$$

$\mathcal{U}$ ist eine Unmenge. Es gilt

$$\# : \mathcal{U} \to \{+\infty\} \cup \mathbb{N},$$

wobei für jede Menge E gilt: $\#(E) \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn E endlich und $\#(E) = +\infty$ genau dann, wenn E unendliche Menge. Für jede Menge E gilt: $\#(E)$ ist die Anzahl der Elemente von E.

$c \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $\quad E \subseteq \mathbb{R} \wedge E$ endlich

$\Rightarrow$

$$\sum_{j \in E} c^{on}\mathbb{R}(j) = c \cdot \#(E).$$

---

6 $\sum_j f(j)$ und $\leq$

6.1 $0 < \sum_j f(j)$ und $0 \leq \sum_j f(j)$

Sind alle Summanden größer oder gleich 0, so ist auch die Summe größer oder gleich 0.

$$f : D \to B \text{ reelle Funktion}$$

$\wedge$ $u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z} \wedge u \leq o$

$\wedge$ $\{u, \ldots, o\} \subseteq D$

$\wedge$ $\forall j : j \in \{u, \ldots, o\} \Rightarrow 0 \leq f(j)$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \sum_{j=u}^{o} f(j).$$

$$f : D \to \mathbb{R}$$

$\wedge$ $E \subseteq D \wedge E$ endlich

$\wedge$ $\forall j : j \in E \Rightarrow 0 \leq f(j)$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \sum_{j \in E} f(j).$$

Unter den eben genannten Bedingungen gilt die stärkere Aussage $0 < \sum_j f(j)$, wenn mindestens einer der Summanden positiv ist. Anders formuliert: Ist unter den genannten Voraussetzungen die Summe$= 0$, so sind alle Summanden$= 0$.

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to B \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z} \wedge u \leq o \\
\wedge & p \in \{u, \ldots, o\} \subseteq D \\
\wedge & \forall j : j \in \{u, \ldots, o\} \Rightarrow 0 \leq f(j) \\
\Rightarrow & \\
 & 0 < f(p) \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{j=u}^{o} f(j) \\
\wedge & 0 = \sum_{j=u}^{o} f(j) \quad \Rightarrow \quad 0 = f(p).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to \mathbb{R} \\
\wedge & p \in E \subseteq D \wedge E \text{ endlich} \\
\wedge & \forall j : j \in E \Rightarrow 0 \leq f(j) \\
\Rightarrow & \\
 & 0 < f(p) \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{j \in E} f(j) \\
\wedge & 0 = \sum_{j \in E} f(j) \quad \Rightarrow \quad 0 = f(p).
\end{array}
$$

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ und $D = \mathbb{R}$, $u = 71$, $o = 100$ gilt $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion, $u \in \mathbb{Z}$, $o \in \mathbb{Z}$, $u \leq o$, $\{u, \ldots, o\} \subseteq D$ und $\forall j : j \in \{u, \ldots, o\} \Rightarrow 0 \leq f(j)$. Im Speziellen gilt etwa $99 \in \{u, \ldots, o\}$ mit $0 < \sqrt{1 + 99^2}$, so dass auf Grund vorhergehenden Satzes

$$0 < \sum_{j=71}^{100} \sqrt{1+j^2},$$

folgt. Ähnlich gilt

$$0 < \sum_{j\in\{71,\ldots,100\}} \sqrt{1+j^2}.$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) In beiden vorhergehenden Sätzen ist die Voraussetzung $0 \le f(j)$ für die jeweils genannten j von besonderer Bedeutung. So gilt etwa

$$0 = -1 + 1 = \sum_{j\in\{-1,1\}} j,$$

ohne dass die Summanden$= 0$ wären. $\square$(Beispiel)

6.2 $\sum\limits_j f(j) \le \sum\limits_j g(j)$ und $\sum\limits_j f(j) < \sum\limits_j g(j)$

Gilt für zwei reelle Funktionen f, g und alle betrachteten j die Abschätzung $f(j) \le g(j)$, so folgt $\sum\limits_j f(j) \le \sum\limits_j g(j)$.

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\wedge$ $u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z} \wedge u \le o$

$\wedge$ $\{u, \ldots, o\} \subseteq D \cap C$

$\wedge$ $\forall j : j \in \{u, \ldots, o\} \Rightarrow f(j) \le g(j)$

$\Rightarrow$

$$\sum_{j=u}^{o} f(j) \le \sum_{j=u}^{o} g(j).$$

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to \mathbb{R} \\
\wedge & g : C \to \mathbb{R} \\
\wedge & E \subseteq D \cap C \wedge E \text{ endlich} \\
\wedge & \forall j : j \in E \Rightarrow f(j) \leq g(j) \\
\Rightarrow & \\
 & \sum\limits_{j \in E} f(j) \leq \sum\limits_{j \in E} g(j).
\end{array}
$$

Unter den genannten Bedingungen gilt die stärkere Abschätzung

$$\sum_j f(j) < \sum_j g(j),$$

wenn für mindestens einen der betrachteten Indizes p die Aussage $f(p) < g(p)$ gilt. Anders formuliert: Sind unter den geannten Voraussetzungen die beiden Summen gleich, so sind alle Summanden gleich.

$$
\begin{array}{llll}
 & f : D \to B \text{ reelle Funktion} & & \\
\wedge & g : C \to A \text{ reelle Funktion} & & \\
\wedge & u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z} \wedge u \leq o & & \\
\wedge & p \in \{u, \ldots, o\} \subseteq D \cap C & & \\
\wedge & \forall j : j \in \{u, \ldots, o\} \Rightarrow f(j) \leq g(j) & & \\
\Rightarrow & & & \\
 & f(p) < g(p) & \Rightarrow & \sum\limits_{j=u}^{o} f(j) < \sum\limits_{j=u}^{o} g(j) \\
\wedge & \sum\limits_{j=u}^{o} f(j) = \sum\limits_{j=u}^{o} g(j) & \Rightarrow & f(p) = g(p).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to \mathbb{R} \\
\wedge & g : C \to \mathbb{R} \\
\wedge & p \in E \subseteq D \cap C \wedge E \text{ endlich} \\
\wedge & \forall j : j \in E \Rightarrow f(j) \leq g(j) \\
\Rightarrow & \\
 & f(p) < g(p) \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j \in E} f(j) < \sum_{j \in E} g(j) \\
\wedge & \sum_{j \in E} f(j) = \sum_{j \in E} g(j) \qquad \Rightarrow \qquad f(p) = g(p).
\end{array}
$$

Beispiel (ohne Beweis) Die bisherigen Erkenntnisse sollen verwendet werden, um

$$\sum_{j=71}^{100} \sqrt{1 + 2 \cdot j^2}$$

nach oben und nach unten abzuschätzen. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mut $D = \mathbb{R}$ und $f(x) = \sqrt{1 + 2 \cdot x^2}$. Offenbar ist f reelle Funktion. Mit $u = 71$ und $o = 100$ gilt $\{u, \ldots, o\} \subseteq \mathbb{Z}$, also auch $\{u, \ldots, o\} \subseteq D$. Ohne Weiteres gilt für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{2 \cdot x^2} < \sqrt{1 + 2 \cdot x^2},$$

also auch

$$\sqrt{2} \cdot |x| < \sqrt{1 + 2 \cdot x^2}.$$

Dies legt nahe, die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{2} \cdot |x|,$$

mit $C = \mathbb{R} = D$ zu betrachten: g reelle Funktion und für alle $j \in \{u, \ldots, o\}$ gilt

$$g(j) < f(j),$$

und im Speziellen $100 \in \{u, \ldots, o\}$ mit $g(100) < f(100)$. Auch gilt $\{u, \ldots, o\} \subseteq C$, so dass nun

$$\sum_{j=u}^{o} g(j) < \sum_{j=u}^{o} f(j),$$

folgt. Es ergibt sich hieraus

$$\sum_{j=71}^{100} \sqrt{2} \cdot |j| < \sum_{j=71}^{100} \sqrt{1 + 2 \cdot j^2},$$

also auch

$$\sqrt{2} \cdot \sum_{j=71}^{100} |j| < \sum_{j=71}^{100} \sqrt{1 + 2 \cdot j^2},$$

woraus wegen $|j| = j$ für alle $j \in \{u, \ldots, o\}$ die Abschätzung

$$\sqrt{2} \cdot \sum_{j=71}^{100} j < \sum_{j=71}^{100} \sqrt{1 + 2 \cdot j^2},$$

folgt. Damit ist die fragliche Summe *nach unten* abgeschätzt.

Für eine Abschätzung *nach oben* bietet sich die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{3} \cdot |x|,$$

an. Jedoch gilt *nicht* für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $f(x) \leq h(x)$ - es gilt etwa $h(0) = 0 < 1 = f(0)$ - doch gilt wegen $1 < j^2$ für alle $j \in \{u, \ldots, o\}$ offenbar

$$\begin{aligned}&\forall j : j \in \{u, \ldots, o\} \Rightarrow \\ &\qquad f(j) = \sqrt{1 + 2 \cdot j^2} < \sqrt{j^2 + 2 \cdot j^2} = \sqrt{3 \cdot j^2} = \sqrt{3} \cdot |j| = h(j),\end{aligned}$$

und dies genügt, um via $100 \in \{u, \ldots, o\}$ und $f(100) < h(100)$ die Abschätzung

$$\sum_{j=71}^{100} f(j) < \sum_{j=71}^{100} h(j),$$

zu erhalten. Es ergibt sich hieraus nach einigen Umformungen

$$\sum_{j=71}^{100} f(j) < \sqrt{3} \cdot \sum_{j=71}^{100} j.$$

Da offenbar

$$0 < \sum_{j=71}^{100} j,$$

gilt, können die beiden Abschätzungen als

$$\sqrt{2} < \frac{\sum_{j=71}^{100} \sqrt{1 + 2 \cdot j^2}}{\sum_{j=71}^{100} j} < \sqrt{3},$$

zusammengefasst werden. □(Beispiel)

7 $\left(\sum_j g(j)\right) + \left(\sum_j h(j)\right) = \sum_j \big(g(j) + h(j)\big)$

Die Summe von

$$-2, 3, -5, 7, -11, 13, -17, 19, -23, 19,$$

kann ermittelt werden, indem man erst die negaitiven Zahlen

$$-2, -5, -11, -17, -23,$$

addiert, dann die positiven Zahlen

$$3, 7, 13, 19, 19,$$

addiert und dann diese beiden Summen zusammenzählt. Die mathematische Umsetzung dieser Vorgehensweise gelingt mit Hilfe der beiden Funktionen

$$g : \{1, \ldots, 5\} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h : \{1, \ldots, 5\} \to \mathbb{R},$$

via

$$\begin{aligned} g(1) &= {-2} \\ g(2) &= {-5} \\ g(3) &= -11 \\ g(4) &= -17 \\ g(5) &= -23 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h(1) &= 3 \\ h(2) &= 7 \\ h(3) &= 13 \\ h(4) &= 19 \\ h(5) &= 19 \end{aligned} \; ,$$

wonach

$$\begin{aligned} &-2 + 3 + (-5) + 7 + (-11) + 13 + (-17) + 19 + (-23) + 19 \\ &\qquad = (-2 + (-5) + (-11) + (-17) + (-23)) + (3 + 7 + 13 + 19 + 19) \\ &\qquad = \left(\sum_{j=1}^{5} g(j)\right) + \left(\sum_{j=1}^{5} h(j)\right). \end{aligned}$$

Diese Art des Summierens soll nun mit einer paarweisen Zusammenfassung der Zahlen,

$$\begin{aligned} &(-2 + 3) + (-5 + 7) + (-11 + 13) + (-17 + 19) + (-23 + 19) \\ &\qquad = 1 + 2 + 2 + 2 + (-4) = 7 - 4 = 3, \end{aligned}$$

verglichen werden. Mit Hilfe von g und h ist dieses paarweise Addieren einfach zu erfassen:

$$\begin{aligned}
&(-2+3)+(-5+7)+(-11+13)+(-17+19)+(-23+19)\\
&=(g(1)+h(1))+(g(2)+h(2))+(g(3)+h(3))+(g(4)+h(4))+(g(5)+h(5))\\
&=\sum_{j=1}^{5}\big(g(j)+h(j)\big),
\end{aligned}$$

und offenbar gilt somit

$$\left(\sum_{j=1}^{5} g(j)\right)+\left(\sum_{j=1}^{5} h(j)\right)=\sum_{j=1}^{5}\big(g(j)+h(j)\big).$$

Diese Art des Zusammenfassens von Summen gilt natürlich nicht nur im soeben betrachteten Fall.

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reele Funktion

$\wedge$ $u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z} \wedge u \leq o$

$\wedge$ $\{u, \ldots, o\} \subseteq D \cap C$

$\Rightarrow$

$$\left(\sum_{j=u}^{o} f(j)\right)+\left(\sum_{j=u}^{o} g(j)\right)=\sum_{j=u}^{o}\big(f(j)+g(j)\big).$$

$f : D \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $g : C \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $E \subseteq D \cap C \wedge E$ endlich

$\Rightarrow$

$$\left(\sum_{j\in E} f(j)\right)+\left(\sum_{j\in E} g(j)\right)=\sum_{j\in E}\big(f(j)+g(j)\big).$$

Beispiel (ohne Beweis) In Fortführung eines früheren Beispiels soll

$$\sum_{j=71}^{100} \sqrt{1+2\cdot j^2},$$

etwas besser als zuletzt nach oben abgeschätzt werden. Mit Hilfe der Funktion

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=1+\sqrt{2}\cdot|x|,$$

und des auch an sich nicht uninteressanten ...

Satz - sqrtsum

$$\forall a,b: a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{|a|+|b|}\le\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}.$$

Beweis VS $a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R}$.

`1.1`: Aus VS folgt: $0\le 2\cdot\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$.

`1.2`: Aus VS folgt: $|a|\in\mathbb{R}\wedge|b|\in\mathbb{R}$.

`1.3`: Aus VS folgt: $\left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\right)^2=|a|+2\cdot\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}+|b|$.

`1.4`: Aus VS folgt: $0\le|a|+|b|\in\mathbb{R}$.

`1.5`: Aus VS folgt: $0\le\left(\sqrt{|a||}+\sqrt{|b|}\right)^2\in\mathbb{R}$.

`1.6`: Aus VS folgt: $\sqrt{|a||}+\sqrt{|b|}=\sqrt{\left(\sqrt{|a||}+\sqrt{|b|}\right)^2}$.

`2`: Aus `1.1` und aus `1.2` folgt: $|a|+|b|\le|a|+2\cdot\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}+|b|$.

`3`: Aus `2` und aus `1.3` folgt: $|a|+|b|\le\left(\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}\right)^2$.

`4`: Aus `3`, aus `1.4` und aus `1.5` folgt: $\sqrt{|a|+|b|}\le\sqrt{\left(\sqrt{|a||}+\sqrt{|b|}\right)^2}$.

`5`: Aus `4` und aus `1.6` folgt: $\sqrt{|a|+|b|}\le\sqrt{|a|}+\sqrt{|b|}$.

□

... folgt offenbar

$$\forall x: x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)=\sqrt{1+2\cdot x^2}\le 1+\sqrt{2}\cdot|x|=g(x),$$

so dass mit Einsatz bisheriger Resultate

$$\sum_{j=71}^{100} \sqrt{1+2\cdot j^2} = \sum_{j=71}^{100} f(j) < \sum_{j=71}^{100} g(j) = \sum_{j=71}^{100} \left(1+\sqrt{2}\cdot|j|\right)$$
$$= \left(\sum_{j=71}^{100} 1\right) + \left(\sum_{j=71}^{100} \sqrt{2}\cdot|j|\right),$$

und an dieser Stelle darf man sich über $\sum_{j=71}^{100} 1$ wundern, denn eine *Zahl* - hier ist es die 1 - wurde bislang noch nie mit dem Summenzeichen addiert. Zur Klärung, was mit $\sum_{j=71}^{100} 1$ gemeint ist, soll g genauer betrachtet werden. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = 1+\sqrt{2}\cdot|x| = 1^{on}\mathbb{R}(x) + \sqrt{2}\cdot|x|,$$

so dass eigentlich

$$\sum_{j=71}^{100} g(j) = \sum_{j=71}^{100} \left(1^{on}\mathbb{R}(j)+\sqrt{2}\cdot|j|\right) = \left(\sum_{j=71}^{100} 1^{on}\mathbb{R}(j)\right) + \left(\sum_{j=71}^{100} \sqrt{2}\cdot|j|\right),$$

gilt. Hierdurch wird man auf die Konvention

$$\sum_{j=71}^{100} 1 = \sum_{j=71}^{100} 1^{on}\mathbb{R}(j),$$

gebracht, die ein Spezialfall der allgemeineren Regeln

$$\forall c,u,o : c\in\mathbb{R}\wedge u\in\mathbb{Z}\wedge o\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=u}^{o} c = \sum_{j=u}^{o} c^{on}\mathbb{R}(j),$$

$$\forall c,E : c\in\mathbb{R}\wedge E \text{ endlich} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j\in E} c = \sum_{j\in E} c^{on}\mathbb{R}(j),$$

ist. Es ergeben sich auf Grund bereits gefundener Resultate

$$\forall c,u,o : c\in\mathbb{R}\wedge u\in\mathbb{Z}\wedge o\in\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=u}^{o} c = c\cdot(o-u+1),$$

$$\forall c,E : c\in\mathbb{R}\wedge E \text{ endlich} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j\in E} c = c\cdot\#(E).$$

In Fortführung obiger Abschätzung ergibt sich

$$\sum_{j=71}^{100} \sqrt{1+2\cdot j^2} < \left(\sum_{j=71}^{100} 1\right) + \left(\sum_{j=71}^{100} \sqrt{2}\cdot |j|\right)$$
$$= 1\cdot(100-71+1) + \sqrt{2}\cdot \sum_{j=71}^{100} |j| = 1\cdot 30 + \sqrt{2}\cdot \sum_{j=71}^{100} j = 30 + \sqrt{2}\cdot \sum_{j=71}^{100} j.$$

Hieraus und aus Früherem folgt

$$\sqrt{2} \quad < \quad \frac{\sum_{j=71}^{100} \sqrt{1+2\cdot j^2}}{\sum_{j=71}^{100} j} \quad < \quad \frac{30}{\sum_{j=71}^{100} j} + \sqrt{2}.$$

Die Summe “$\sum_{j=71}^{100} j$” kann mit bisherigen Erkenntnissen berechnet werden. Offenbar gilt

$$\left(\sum_{j=0}^{70} j\right) + \left(\sum_{j=71}^{100} j\right) = \sum_{j=0}^{100} j,$$

und bekannter Massen gilt

$$\sum_{j=0}^{70} j = \frac{70\cdot 71}{2} = \frac{4970}{2} = 2485,$$

$$\sum_{j=0}^{100} j = \frac{100\cdot 101}{2} = 50\cdot 101 = 5050,$$

so dass

$$2485 + \sum_{j=71}^{100} j = 5050.$$

Es ergibt sich

$$\sum_{j=71}^{100} j = 5050 - 2485 = 2565,$$

woruaus via

$$\frac{30}{2565} = \frac{6}{513} = \frac{2}{171},$$

die Abschätzung

$$\sqrt{2} \quad < \quad \frac{\sum_{j=71}^{100} \sqrt{1+2\cdot j^2}}{2565} \quad < \quad \frac{2}{171} + \sqrt{2},$$

folgt. □(Beispiel)

8 $\left(\sum_j f(j)\right) \cdot \left(\sum_k g(k)\right) = \sum_{(j,k)} \big(f(j)\cdot g(k)\big)$

Zur Berechnung des Produkts der Summen,

$$(2+(-3)+5)\cdot(4+(-5)+8),$$

stehen - mindestens - zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Man könnte zuerst die Summen

$$2+(-3)+5=4,$$

und

$$4+(-5)+8=7,$$

berechnen und dann die Ergebnisse - mit dem Resultat 28 - multiplizieren. Oder man ermittelt das Produkt durch gliedweises Multiplizieren mit anschliessender Summation,

$$\begin{aligned}
&(2+(-3)+5)\cdot(4+(-5)+8)\\
&= 2\cdot 4+2\cdot(-5)+2\cdot 8+(-3)\cdot 4+(-3)\cdot(-5)+(-3)\cdot 8+5\cdot 4+5\cdot(-5)+5\cdot 8\\
&= 8+(-10)+16+(-12)+15+(-24)+20+(-25)+40\\
&= 14+(-21)+35 = 28,
\end{aligned}$$

Beim ersten Verfahren wird erst addiert, dann multipliziert. Beim zweiten Verfahren wird erst multipliziert und dann addiert. Allgemeiner als dieses Beispiel lässt sich die erste Methode mit reellen Funktionen f, g und geeigneten Zahlen u, o, ν, ω als

$$\left(\sum_{j=u}^{o} f(j)\right)\cdot\left(\sum_{k=\nu}^{\omega} g(k)\right),$$

darstellen. Bei der zweiten Methode werden erst alle Produkte der Form

$$f(j)\cdot g(k)$$

mit $j \in \{u, \ldots, o\}$ und $k \in \{\nu, \ldots, \omega\}$ gebildet und dann addiert.

$$\sum_{?} \big(f(j) \cdot g(k)\big),$$

wobei hier noch nicht klar ist, welche Indizes "?" über welche Menge summiert werden sollen. Da j und k Mengen mit $o - u + 1$ und $\omega - \nu + 1$ Elementen durchlaufen, muss die noch unbekannte Indexmenge $(o - u + 1) \cdot (\omega - \nu + 1)$ Elemente haben. Dies trifft auf das binäre cartesische Produkt von $\{u, \ldots, o\}$ und $\{\nu, \ldots, \omega\}$ zu.

In der Tat gilt

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\wedge$ $u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z} \wedge u \leq o$

$\wedge$ $\nu \in \mathbb{Z} \wedge \omega \in \mathbb{Z} \wedge \nu \leq \omega$

$\wedge$ $\{u, \ldots, o\} \subseteq D$

$\wedge$ $\{\nu, \ldots, \omega\} \subseteq A$

$\Rightarrow$

$$\left(\sum_{j=u}^{o} f(j)\right) \cdot \left(\sum_{k=\nu}^{\omega} g(k)\right) = \sum_{(j,k) \in \{u,\ldots,o\} \times \{\nu,\ldots,\omega\}} \big(f(j) \cdot g(k)\big).$$

$f : D \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $g : C \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $E \subseteq D \wedge E$ endlich

$\wedge$ $\eta \subseteq C \wedge \eta$ endlich

$\Rightarrow$

$$\left(\sum_{j \in E} f(j)\right) \cdot \left(\sum_{k \in \eta} g(k)\right) = \sum_{(j,k) \in E \times \eta} \big(f(j) \cdot g(k)\big).$$

In diesen beiden Aussagen wird owohl mit $\sum\limits_{(j,k)\in\{u,\ldots,o\}\times\{\nu,\ldots,\omega\}} \big(f(j)\cdot g(k)\big)$ als auch mit $\sum\limits_{(j,k)\in E\times\eta} f(j)\cdot g(k)$ der bisherige Rahmen der Summation verlassen, da die Indexmenge der Summation in beiden Fällen nicht mehr eine - reelle - Teilmenge reeller Definitions-Bereiche von Funktionen, sondern das "zweidimensionale Gebilde" eines binär cartesischen Produkts ist. Auch fällt auf, dass in beiden Fällen eine *ungerichtete* Summation vorliegt.

Zur Berechnung von $\sum\limits_{(j,k)\in\{u,\ldots,o\}\times\{\nu,\ldots,\omega\}} \big(f(j)\cdot g(k)\big)$ mit *gerichteter* Summation empfiehlt es sich, zweimal "einfache" Summationen durchzuführen. Anhand obigen Beispiels sieht dies beispielsweise so aus:

$$\begin{aligned}&(2+(-3)+5)\cdot(4+(-5)+8)\\ &\qquad = 2\cdot(4+(-5)+8)+(-3)\cdot(4+(-5)+8)+5\cdot(4+(-5)+8),\end{aligned}$$

wahlweise auch

$$\begin{aligned}&(2+(-3)+5)\cdot(4+(-5)+8)\\ &\qquad = (2+(-3)+5)\cdot 4+(2+(-3)+5)\cdot(-5)+(2+(-3)+5)\cdot 8.\end{aligned}$$

In etwas allgemeinerer Form und unter Zugrundelegung bestehenden Einverständnisses bezüglich "..." wird im ersten Fall

$$f(u)\cdot\sum_{k=\nu}^{\omega} g(k)+f(1+u)\cdot\sum_{k=\nu}^{\omega} g(k)+\ldots+f(o)\cdot\sum_{k=\nu}^{\omega} g(k),$$

und im zweiten Fall

$$\left(\sum_{j=u}^{o} f(j)\right)\cdot g(\nu)+\left(\sum_{j=u}^{o} f(j)\right)\cdot g(1+\nu)+\ldots+\left(\sum_{j=u}^{o} f(j)\right)\cdot g(\omega),$$

berechnet. Die Summanden des ersten Falls können als

$$f(j)\cdot\sum_{k=\nu}^{\omega} g(k),\quad j\in\{u,\ldots,o\},$$

bezeichnet werden. Deren Summe ist gleich

$$\sum_{j=u}^{o}\left(f(j)\cdot\sum_{k=\nu}^{\omega} g(k)\right),$$

die mit Hilfe des DistributivGesetzes auch als

$$\sum_{j=u}^{o}\left(\sum_{k=\nu}^{\omega} f(j)\cdot g(k)\right),$$

geschrieben werden kann. Durch - konventionskonformes - Weglassen der Klammer ergibt sich die “Doppelsumme”

$$\sum_{j=u}^{o}\sum_{k=\nu}^{\omega}\big(f(j)\cdot g(k)\big),$$

die algorithmisch so zu verstehen ist:

$$\begin{array}{ll} \texttt{Initialisierung}: & Summe(u) = f(u)\cdot\sum_{k=\nu}^{\omega} g(k) \\ \texttt{for}\ j = u,\ldots,-1+o: & Summe(1+j) = Summe(j) + f(1+j)\cdot\sum_{k=\nu}^{\omega} g(k) \\ \hline \texttt{Ausgabe}: & Summe(o) \end{array}$$

In schematischer Darstellung wird hier das in der xy-Ebene eingezeichnete binär-cartesische Produkt $\{u,\ldots,o\}\times\{\nu,\ldots,\omega\}$ schrittweise von links nach rechts vertikal von unten nach oben “durchlaufen”. Ähnlich ist, korrespondiernd zum obigen zweiten Fall die Doppelsumme

$$\sum_{k=\nu}^{\omega}\sum_{j=u}^{o}\big(f(j)\cdot g(k)\big).$$

zu verstehen und zu interpretieren.

$$\begin{array}{ll} \texttt{Initialisierung}: & S(\nu) = \left(\sum_{j=u}^{o} f(j)\right)\cdot g(\nu) \\ \texttt{for}\ k = \nu,\ldots,-1+\omega: & S(1+k) = S(k) + \left(\sum_{j=u}^{o} f(j)\right)\cdot g(1+k) \\ \hline \texttt{Ausgabe}: & S(\omega) \end{array}$$

In schematischer Darstellung wird hier das in der xy-Ebene eingezeichnete binär-cartesische Produkt $\{u,\ldots,o\}\times\{\nu,\ldots,\omega\}$ schrittweise von unten nach oben horizontal von links nach rechts “durchlaufen”.

9 $\sum\limits_{(j,k)} h((j,k))$

Im Rahmen des Vorkurses sind ausser Teilmengen reeller Zahlen Teimengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Indexmengen für die Summation von Interesse. Wie bereits im vorhergehenden Kapitel an einem Spezialfall angedeutet wird dabei die Summation gelegentlich auf eine Doppelsumme zurück geführt.

Dies kann, muss aber nicht immer der Fall sein.

$h : D \to \mathbb{R}$

$\wedge$ E endlich

$\wedge$ η endlich

$\wedge$ $E \times \eta \subseteq D$

$\Rightarrow$

$$\sum_{(j,k)\in E\times\eta} h((i,j)) = \sum_{j\in E} \sum_{k\in\eta} h((j,k)) = \sum_{k\in\eta} \sum_{j\in E} h((j,k)).$$

Beispiel (ohne Beweis) Mit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h((x,y)) = x + y$ und $E = \{-1, 0, 1\}$ und $\eta = \{3, 6, 7\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{(j,k)\in E\times\eta} h((j,k)) &= \sum_{(j,k)\in E\times\eta} \big(j + k\big) = \sum_{j\in E} \sum_{k\in\eta} \big(j + k\big) = \sum_{j\in E} \sum_{k\in\eta} \big(j^{on}\mathbb{R}(k) + k\big) \\
&= \sum_{j\in E} \left(\left(\sum_{k\in\eta} j^{on}\mathbb{R}(k) \right) + \left(\sum_{k\in\eta} k \right) \right) = \sum_{j\in E} \big(j \cdot \#(\eta) + \sum_{k\in\eta} k\big) \\
&= \sum_{j\in E} \big(j \cdot 3 + (3 + 6 + 7)\big) = \sum_{j\in E} \big(3 \cdot j + 16\big) \\
&= (-3 + 16) + (0 + 16) + (3 + 16) = 48,
\end{aligned}$$

und auch

$$\begin{aligned}\sum_{(j,k)\in E\times\eta} h((j,k)) &= \sum_{(j,k)\in E\times\eta} \big(j+k\big) = \sum_{k\in\eta}\sum_{j\in E}\big(j+k\big) = \sum_{k\in\eta}\sum_{j\in E}\big(k+j\big) \\ &= \sum_{k\in\eta}\sum_{j\in E}\big(k^{on}\mathbb{R}(j)+j\big) = \sum_{k\in\eta}\left(\left(\sum_{j\in E} k^{on}\mathbb{R}(j)\right)+\left(\sum_{j\in E} j\right)\right) \\ &= \sum_{k\in\eta}\big(k\cdot\#(E)+\sum_{j\in E} j\big) = \sum_{k\in\eta}\big(k\cdot 3+0\big) = \sum_{k\in\eta} 3\cdot k \\ &= 3\cdot 3+3\cdot 6+3\cdot 7 = 9+18+21 = 48.\end{aligned}$$

$\square$(Beispiel)

Gelegentlich wird über Teilmengen binär cartesischer Produkte summiert. Die Berechnung gelingt dann gelegentlich mit Hilfe gerichteter Summation.

$h : D \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $E \subseteq D \wedge E$ endlich

$\wedge$ $u \in \mathbb{Z} \wedge o \in \mathbb{Z} \wedge u \leq 1+o$

$\wedge$ $\phi : \{u,\ldots,o\} \to E$ bijektiv

$\Rightarrow$

$$\sum_{(j,k)\in E} h((j,k)) = \sum_{l=u}^{o} h(\phi(l)).$$

Beispiel (ohne Beweis) Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und sei

$$h : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad h((j,k)) = \binom{5}{j}\cdot a^j\cdot b^k.$$

Ausserdem sei

$$E = \{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : j+k=5\}.$$

Offenbar gilt

$$E = \{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}.$$

Um

$$\sum_{(j,k)\in E} h((j,k)),$$

zu berechnen, soll vorhergehender Satz angewendet werden. Eine Möglichkeit für $\phi : \{u, \dots, o\} \to E$ bijektiv ist

$$\phi : \{0, \dots, 5\} \to E, \quad \phi(l) = (l, 5 - l).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{(j,k)\in E} \binom{5}{j} \cdot a^j \cdot b^k = \sum_{(j,k)\in E} h((j,k)) &= \sum_{l=0}^{5} h(\phi(l)) \\ &= \sum_{l=0}^{5} h((l, 5-l)) = \sum_{l=0}^{5} \binom{5}{l} \cdot a^l \cdot b^{5-l}.\end{aligned}$$

Die ebenfalls mögliche Wahl

$$\psi : \{0, \dots, 5\} \to \mathbb{R}, \quad \psi(l) = (5 - l, l),$$

führt auf

$$\begin{aligned}\sum_{(j,k)\in E} \binom{5}{j} \cdot a^j \cdot b^k = \sum_{(j,k)\in E} h((j,k)) &= \sum_{l=0}^{5} h(\psi(l)) \\ &= \sum_{l=0}^{5} h((5-l, l)) = \sum_{l=0}^{5} \binom{5}{5-l} \cdot a^{5-l} \cdot b^l,\end{aligned}$$

so dass via

$$\forall l : l \in \{0, \dots, 5\} \Rightarrow \binom{5}{5-l} = \binom{5}{l},$$

die Gleichung

$$\sum_{l=0}^{5} \binom{5}{l} \cdot a^l \cdot b^{5-l} = \sum_{l=0}^{5} \binom{5}{l} \cdot a^{5-l} \cdot b^l,$$

folgt. $\square$(Beispiel)

10 $T(x)(n) = \sum_{j=0}^{n} F(x)(j)$

Abkürzend sei hier

$$^{\mathbb{N}}\mathbb{R} = \{f : f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\},$$

die Menge aller reellen Folgen.

Mitunter ist es von Interesse, “x-abhängige Summationen” auszuführen. Für derlei Aufgaben soll hier an Hand zweier Beispiele das Fundament gelegt werden. Das erste Beispiel ist bereits bekannt.

10.1 $T(x)(n) = \sum_{j=0}^{n} x^j$

Sei

$$F : \mathbb{R} \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}, \quad F(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad F(x)(j) = x^j,$$

so dass $F(x)$ eine spezielle geometrische Folge ist:

$$F(x) = \big(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, \ldots\big) = \big(1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\big)\,.$$

Aus F wird durch Summation die zugehörige x-abhängige “Reihe”

$$T : \mathbb{R} \to {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}, \quad T(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad T(x)(n) = \sum_{j=0}^{n} F(x)(j),$$

also im vorliegenden Fall,

$$\forall x, n : x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow T(x)(n) = \sum_{j=0}^{n} x^j,$$

gebildet. Mit Hilfe früherer Ergebnisse kann $T(x)(n)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ explizit angegeben werden:

$$x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad T(x)(n) = \begin{cases} \dfrac{-1 + x^{1+n}}{-1 + x} & , \quad 1 \neq x \\ \qquad 1 + n & , \quad 1 = x \end{cases}\,.$$

Ersetzt man hier $T(x)(n)$ durch den Term mit dem Summensymbol, so ergibt sich

$$x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j=0}^{n} x^j = \begin{cases} \dfrac{-1 + x^{1+n}}{-1 + x} & , \quad 1 \neq x \\ \qquad 1 + n & , \quad 1 = x \end{cases}\,.$$

In der Konklusion tritt neben den freien Variablen “x, n” die gebundene Variable “j” auf.

10.2 $1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot x^{-1+n} = \ldots$

Betrachtet man für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$T(.)(n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(.)(n)(x) = T(x)(n) = \begin{cases} \dfrac{-1 + x^{1+n}}{-1 + x} & , \quad 1 \neq x \\ 1 + n & , \quad 1 = x \end{cases} ,$$

so fällt auf, dass diese Funktion differenzierbar auf $\left]-\infty|1\right[$ und auf $\left]1|+\infty\right[$ ist:

$$\begin{aligned} &T(.)(n)' : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \\ &\qquad T(.)(n)'(x) = \frac{(1+n) \cdot x^n \cdot (-1+x) - (-1 + x^{1+n}) \cdot 1}{(-1+x)^2} \\ &\qquad\qquad = \frac{1 - (1+n) \cdot x^n + n \cdot x^{1+n}}{(-1+x)^2}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt entsprechend vorhergehenden Abschnitts für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$T(.)(n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(.)(n)(x) = T(x)(n) = \sum_{j=0}^{n} x^j,$$

so dass für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned} T(.)(n)'(x) &= \left(\sum_{j=0}^{n} x^j \right)' = \sum_{j=0}^{n} \left(x^j\right)' = \sum_{j=0}^{n} j \cdot x^{-1+j} \\ &= 0 \cdot x^{-1} + 1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 3 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot x^{-1+n} \\ &= 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot x^{-1+n}, \end{aligned}$$

mit der Konvention

$$1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^{-1+0} = 0,$$

folgt. Somit ist $T(.)(n)'$ gleich zwei Termen, die deswegen gleich sein müssen:

$$\begin{aligned} &1 \neq x \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\qquad 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot x^{-1+n} = \frac{1 - (1+n) \cdot x^n + n \cdot x^{1+n}}{(-1+x)^2}. \end{aligned}$$

Im Fall $x = 1$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot x^{-1+n} \\ &\qquad = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + \ldots + n \cdot 1^{-1+n} \\ &\qquad = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (1+n)}{2}. \end{aligned}$$

□(Beispiel)

11 $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a^j \cdot b^{n-j}$

Im Beweis der “binomischen Formel” werden einige Eigenschaften und Regeln der bisher vorgestellten endlichen Summation verwendet. Der Beweis wird mit vollständiger Induktion geführt.

Satz - Binomische Formel

$$n \in N \wedge a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a^j \cdot b^{n-j}.$$

Neweis

`Thema0` $\qquad a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}.$

`1:` Es gilt:

$$\exists E : E = \left\{ \omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge (a+b)^\omega = \sum_{j=0}^{\omega} \binom{\omega}{j} \cdot a^j \cdot b^{\omega-j} \right\}.$$

`2:` Aus `2` folgt: $\qquad E \subseteq \mathbb{N}.$

`3.1:` Aus `Thema0` folgt: $\qquad (a+b)^0 = 1.$

`3.2:` Aus `Thema0` folgt: $\qquad a^0 = 1.$

`3.3:` Aus `Thema0` folgt: $\qquad b^0 = 1.$

`3.4:` Aus `Thema0` folgt:

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} \cdot a^j \cdot b^{0-j} = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^{0-0}$$
$$= 1 \cdot a^0 \cdot b^0 \stackrel{3.2}{=} 1 \cdot 1 \cdot b^0 \stackrel{3.3}{=} 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

`4:` Aus `3.1` und aus `3.4` folgt: $(a+b)^0 = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} \cdot a^j \cdot b^{0-j}.$

`5:` Aus “0 Menge” , aus “$0 \in \mathbb{N}$” und aus `4` folgt per definitionem E: $\qquad 0 \in E.$

...

`Thema0` $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}.$

...

`Thema6` $\lambda \in E.$

`7.1:` Aus `Thema6` folgt: $\lambda \in \mathbb{N}.$

`7.2:` Aus `Thema6` folgt: $(a+b)^\lambda = \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{\lambda-j}.$

`8.1:` Aus `7.1` folgt: $1+\lambda \in \mathbb{N}.$

`8.2:` Aus `Thema0` und aus `7.1` folgt:
$(a+b)^{1+\lambda} = (a+b) \cdot (a+b)^\lambda.$

`8.3:` Aus `Thema0` und aus `7.1`
folgt via Summationsregeln:

$$\begin{aligned}
a \cdot \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{\lambda-j} &= \sum_{j=0}^{\lambda} a \cdot \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{\lambda-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^{1+j} \cdot b^{\lambda-j} \\
&= \sum_{j=1}^{1+\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{\lambda-(-1+j)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{1+\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} \\
&= \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} \\
&\qquad + \sum_{j=1+\lambda}^{1+\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} \\
&= \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} \\
&\qquad + \binom{\lambda}{-1+(1+\lambda)} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}.
\end{aligned}$$

...

`Thema0` $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}.$

...

`Thema6` $\lambda \in E.$

...

`8.4`: Aus `Thema0` und aus `7.1`
folgt via Summationsregeln:

$$\begin{aligned} b \cdot \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{\lambda-j} &= \sum_{j=0}^{\lambda} b \cdot \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{\lambda-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} \\ = \sum_{j=0}^{0} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} &+ \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} \\ = \binom{\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} &+ \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}. \end{aligned}$$

`8.5`: Aus `7.1` folgt: $-1 + (1 + \lambda) = \lambda.$

`8.6`: Aus `7.1` folgt: $\binom{\lambda}{\lambda} = 1.$

`8.7`: Aus `7.1` folgt: $\binom{1+\lambda}{1+\lambda} = 1.$

`8.8`: Aus `7.1` folgt: $\binom{\lambda}{0} = 1.$

`8.9`: Aus `7.1` folgt: $\binom{1+\lambda}{0} = 1.$

`8.10`: Aus `7.1` folgt:

$$k \in \{1, \ldots, \lambda\} \Rightarrow \binom{\lambda}{-1+k} + \binom{\lambda}{k} = \binom{1+\lambda}{k}.$$

`9.1`: Aus `8.6` und aus `8.7` folgt: $\binom{\lambda}{\lambda} = \binom{1+\lambda}{1+\lambda}.$

`9.2`: Aus `8.8` und aus `8.9` folgt: $\binom{\lambda}{0} = \binom{1+\lambda}{0}.$

`9.3`: Aus `8.1` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

...

`Thema0` $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}.$

...

`Thema6` $\lambda \in E.$

...

10: $$(a+b)^{1+\lambda}$$
$$\stackrel{8.2}{=} (a+b)\cdot(a+b)^{\lambda} = a\cdot(a+b)^{\lambda} + b\cdot(a+b)^{\lambda}$$
$$\stackrel{7.2}{=} a\cdot\sum_{j=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{j}\cdot a^{j}\cdot b^{\lambda-j} + b\cdot\sum_{j=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{j}\cdot a^{j}\cdot b^{\lambda-j}$$
$$\stackrel{8.3}{=} \sum_{j=1}^{\lambda}\binom{\lambda}{-1+j}\cdot a^{j}\cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{\lambda}{-1+(1+\lambda)}\cdot a^{1+\lambda}\cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)} + b\cdot\sum_{j=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{j}\cdot a^{j}\cdot b^{\lambda-j}$$
$$\stackrel{8.5}{=} \sum_{j=1}^{\lambda}\binom{\lambda}{-1+j}\cdot a^{j}\cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{\lambda}{\lambda}\cdot a^{1+\lambda}\cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)} + b\cdot\sum_{j=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{j}\cdot a^{j}\cdot b^{\lambda-j}$$
$$\stackrel{9.1}{=} \sum_{j=1}^{\lambda}\binom{\lambda}{-1+j}\cdot a^{j}\cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda}\cdot a^{1+\lambda}\cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)} + b\cdot\sum_{j=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{j}\cdot a^{j}\cdot b^{\lambda-j}$$
$$= \ldots.$$

`Thema0` $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}.$

...

`Thema6` $\lambda \in E.$

...

`10:` $$\ldots \overset{8.4}{=} \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)} + \binom{\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}$$

$$\overset{9.2}{=} \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)} + \binom{1+\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}$$

$$= \binom{1+\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}.$$

`11:` Aus `Thema0` und aus `7.1` folgt:

$$\sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} = \sum_{j=1}^{\lambda} \left(\binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}\right).$$

...

`Thema0` $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}.$

...

`Thema6` $\lambda \in E.$

...

12: $$(a+b)^{1+\lambda}$$
$$\overset{10}{=} \binom{1+\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}$$
$$\overset{11}{=} \binom{1+\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} + \sum_{j=1}^{\lambda} (\binom{\lambda}{-1+j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}) + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}$$
$$= \binom{1+\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} + \sum_{j=1}^{\lambda} (\binom{\lambda}{-1+j} + \binom{\lambda}{j}) \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}$$
$$\overset{8.10}{=} \binom{1+\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}$$
$$= \ldots$$

`Thema0` $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}.$

...

`Thema6` $\lambda \in E.$

...

`13:` Aus `Thema0` und aus `7.1` folgt:

$$\sum_{j=0}^{\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{0} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}$$
$$= \binom{1+\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}.$$

`14:` $$(a+b)^{1+\lambda} \stackrel{12}{=} \binom{1+\lambda}{0} \cdot a^0 \cdot b^{1+\lambda-0} + \sum_{j=1}^{\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}$$
$$\stackrel{13}{=} \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}$$
$$= \ldots$$

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\qquad a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}.$

...

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $\qquad \lambda \in E.$

...

`15`: Aus `Thema0` und aus `7.1` folgt:

$$\sum_{j=0}^{1+\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \sum_{j=1+\lambda}^{1+\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{1+\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}.$$

`16`: $$(a+b)^{1+\lambda} \stackrel{\texttt{14}}{=} \sum_{j=0}^{\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j} + \binom{1+\lambda}{1+\lambda} \cdot a^{1+\lambda} \cdot b^{1+\lambda-(1+\lambda)}$$
$$\stackrel{\texttt{15}}{=} \sum_{j=0}^{1+\lambda} \binom{1+\lambda}{j} \cdot a^j \cdot b^{1+\lambda-j}.$$

`17`: Aus `9.3`, aus `8.1` und aus `16` folgt per definitionem E: $\qquad 1+\lambda \in E.$

Ergo `Thema6`: $\qquad$ `A1` | "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$"

...

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\qquad\qquad$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$.

...

7: Aus 2, aus 5 und aus `A1`
folgt via **Satz - vollständige Induktion**: $\qquad$ $E = \mathbb{N}$.

$\boxed{\texttt{Thema8}}$ $\qquad\qquad$ $n \in \mathbb{N}$.

9: Aus `Thema8` und aus 7 folgt: $\qquad$ $n \in E$.

10: Aus 9 folgt: $\qquad$ $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a^j \cdot b^{n-j}$.

Ergo `Thema8`: $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a^j \cdot b^{n-j}$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall a, b : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a^j \cdot b^{n-j} \right).$$

Konsequenz:

$$a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad (a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot a^j \cdot b^{n-j}. \qquad \square$$