Stetige Funktionen auf echten reellen Intervallen

Andreas Unterreiter

6. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 3 Umkehrsätze

Satz - UKS S

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ f streng $\left\{ \begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ auf I

$\wedge$ $J = f[I]$

$\wedge$ $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$

$\Rightarrow$

J echtes reelles Intervall

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ $g : J \to I$ bijektiv

$\wedge$ g stetig

$\wedge$ g streng $\left\{ \begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = x$

$\wedge$ $\forall y : y \in J \quad \Rightarrow \quad f(g(y)) = y.$

Satz - UKS E

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ f streng $\left\{ \begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ auf I

$\wedge$ $J = f[I]$

$\wedge$ $h : J \to I$

$\wedge$ $\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad h(f(x)) = x$

$\wedge$ $\forall y : y \in J \quad \Rightarrow \quad f(h(y)) = y$

$\Rightarrow$

J echtes reelles Intervall

$\wedge$ $h = (f \downharpoonleft I)^{-1}$

$\wedge$ $h : J \to I$ bijektiv

$\wedge$ h streng $\left\{ \begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$

Satz - UKS D

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ f streng $\left\{ \begin{array}{c} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ auf I

$\wedge$ $J = f[I]$

$\wedge$ $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$

$\wedge$ $A \subseteq I$

$\wedge$ A echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf A

$\wedge$ $\forall a : a \in A \Rightarrow 0 \neq f'(a)$

$\wedge$ $B = f[A]$

$\Rightarrow$

B echtes reelles Intervall

$\wedge$ $B \subseteq J$

$\wedge$ g differenzierbar auf B

$\wedge$ $\forall x : x \in A \quad \Rightarrow \quad g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$\wedge$ $\forall y : y \in B \quad \Rightarrow \quad f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis)

Für $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ gilt $f : D \to B$ mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$ und f ist streng wachsend. $I = \mathbb{R}$ ist echtes reelles Intervall, f stetig auf $\mathbb{R}$ und für $J = f[I] = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}]$ gilt $J = \mathbb{R}$ und $g = (f \downharpoonleft I)^{-1} = (\mathsf{id}_{\mathbb{R}} \downharpoonleft \mathbb{R})^{-1}$ ist gleich $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$. Einige der bereits begkannten Eigenschaften von $\mathbb{R}$ und $g = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ folgen nun aus **UKS - S**: $\mathbb{R}$ echtes reelles Intervall, $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ reelle Funktion, $\mathsf{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ stetig, streng wachsend und

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad g(f(x)) = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x)) = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) = x,$$

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(g(y)) = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(y)) = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(y) = y.$$

Auch **UKS - D** kommt zur Geltung, da $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ differenzierbar mit Ableitung$=$ $1 \neq 0$ ist, also auch differenzierbar auf dem echten reellen Intervall $A = \mathbb{R}$ mit Ableitung$\neq 0$ dort ist. Aus **UKS - D** folgt dann via $B = f[A] = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$: $g = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad g'(f(x)) \cdot f'(x) = \mathsf{id}'_{\mathbb{R}}(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x)) \cdot \mathsf{id}'_{\mathbb{R}}(x) = (\mathsf{id}'_{\mathbb{R}}(x))^2 = 1,$$

sowie

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(g(y)) \cdot g'(y) = \mathsf{id}'_{\mathbb{R}}(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(y)) \cdot \mathsf{id}'_{\mathbb{R}}(y) = (\mathsf{id}'_{\mathbb{R}}(y))^2 = 1.$$

⋆

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis)

Für $f = |.|$ gilt $f : D \to B$ reelle Funktion mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$, f stetig. Jedoch ist **UKS - S** nicht mit $I = \mathbb{R}$ einsetzbar, da f auf $\mathbb{R}$ *nicht* streng monoton ist. In der Tat ist f auf $]-\infty|0]$ streng fallend und auf $[0|+\infty]$ streng wachsend. Somit bieten sich für I entsprechend **UKS - S** die Möglichkeiten $I =]-\infty|0]$ oder $I = [0|+\infty[$ an. In beiden Fällen ist $g = (f \downharpoonleft I)^{-1} = (|.| \downharpoonleft I)^{-1}$ und $J = f[I] = |.|[\mathbb{R}]$, so dass $J = [0|+\infty[$ - nun via **UKS - S** - echtes reelles Intervall, $g : J \to I$ bijektiv, also $g : [0|+\infty[\to I$ bijektiv, g stetig,

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad g(|x|) = x,$$

$$\forall y : y \in [0|+\infty[: \quad \Rightarrow \quad |g(y)| = y.$$

<u>$I =]-\infty|0]$</u> Da f streng fallend auf I ist, ist g streng fallend. Um weitere Aussagen über g zu erhalten ist es hilfreich, die erste obiger Inversionsformeln zu betrachten:

$$\forall x : x \in]-\infty|0] \quad \Rightarrow \quad g(|x|) = x.$$

Da für alle $x \in]-\infty|0]$ die Gleichung $-|x| = x$ zutrifft, liegt es nahe, $g = h$ mit

$$h :]-\infty|0] \to \mathbb{R}, \quad h(y) = -y,$$

zu vermuten. Zum Nachweis dieser Vermutung kann **UKS - E** verwendet werden. Offenbar gilt

$$h : J \to I,$$

und wie bereits fest gestellt gilt auch

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad h(f(x)) = -|x| = x.$$

Ausserdem gilt für alle y mit $y \in J$, also $y \in [0| + \infty[$,

$$f(h(y)) = |-y| = |y| = y,$$

da $0 \leq y$ und $y \in \mathbb{R}$. Nun ergibt sich mit **UKS - E** in der Tat

$$h = (f \downharpoonleft I)^{-1},$$

also auch $h = g$ und somit ist

$$g : J \to I, \quad g(y) = -y.$$

Interessanter Weise ist g differemzierbar. Im Speziellen ist g differenzierbar in 0. Diese Eigenschaft von g geht über das via **UKS - D** verfügbare Resultat hinaus. Gemäss **UKS - D** muss die Differenzierbarkeit von f auf einem echten reellen Intervall $A \subseteq I$ gegeben sein. Das größte derartige Intervall ist $]-\infty|0[$. Dann folgt via **UKS - D** die Differenzierbarkeit von g auf $f[A] =]-\infty|0[$. Eine Erweiterung auf $]-\infty|0]$ via **UKS - D** ist nicht möglich. Es gilt

$$g' : J \to \mathbb{R}, \quad g'(y) = -1.$$

$\underline{I = [0| + \infty[}$ Da f streng wachsend auf I ist, ist g streng wachsend. Auch gilt

$$\forall x : x \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad g(|x|) = x.$$

Da für alle $x \in [0| + \infty[$ die Gleichung $|x| = x$, liegt es nahe, die Funktion

$$h : [0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad h(y) = y,$$

zu untersuchen. Offenbar gilt

$$h : J \to I,$$

sowie, wie bereits fest gestellt, auch

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad h(f(x)) = |x| = x.$$

Ausserdem gilt für $y \in J$, also $y \in [0| + \infty[$,

$$f(h(y)) = |y| = y,$$

da $0 \leq y$ und $y \in \mathbb{R}$. Via **UKS - E** folgt nun

$$h = (f \downharpoonleft I)^{-1} = g,$$

und somit

$$g : J \to I, \quad g(y) = y.$$

g differenzierbar. Mit ähnlicher Begründung wie im vorhergehenden Fall gilt auch hier: die Differenzierbarkeit von g auf $]0| + \infty[$ folgt aus **UKS - D**, die Differenzierbarkeit von g in 0 ist nur mit **UKS - D** nicht zu begründen. Es gilt

$$g' : J \to \mathbb{R}, \quad g'(y) = 1.$$

$\star$

Beispiel (ohne Beweis)

Für $f = [.]^+$ gilt $f : D \to B$ reelle Funktion mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$, f stetig, f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f streng wachsend auf $[0| + \infty[$. Mit $I = [0| + \infty[$ und $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$ und $J = f[I] = [.]^+[[0| + \infty[]$ gilt zunächst $J = [0| + \infty[$ und dann via **UKS - S**: $g : J \to I$ bijektiv, g stetig, g streng wachsend und

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad g([x]^+) = x,$$

woraus via $[x]^+ = x$ für alle $x \in [0| + \infty[$ die Aussage

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad g(x) = x,$$

folgt. Hieraus ergibt sich ohne Weiteres

$$g : J \to I, \quad g(y) = y.$$

Ohne Bezug auf **UKS - D** ist festzustellen, dass g differenzierbar ist und dass

$$g' : J \to \mathbb{R}, \quad g'(y) = 1,$$

gilt.

$\star$

Beispiel (ohne Beweis)

Für $f = [.]^-$ gilt $f : D \to B$ reelle Funktion mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$, f stetig, f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f streng fallend auf $] - \infty|0]$. Mit $I =] - \infty|0]$ und $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$ und $J = f[I] = [.]^-[] - \infty|0]]$ gilt zunächst $J = [0| + \infty[$ und dann via **UKS - S**: $g : J \to I$ bijektiv, g stetig, g streng fallend und

$$\forall y : y \in J \quad \Rightarrow \quad [g(y)]^- = y,$$

woraus via $g(y) \in I$ und $[x]^- = x$ für alle $x \in I$ die Aussage

$$\forall y : y \in J \quad \Rightarrow \quad -g(y) = y,$$

folgt. Hieraus ergibt sich ohne Weiteres

$$g : J \to I, \quad g(y) = -y.$$

Ohne Bezug auf **UKS - D** ist festzustellen, dass g differenzierbar ist und dass

$$g' : J \to \mathbb{R}, \quad g'(y) = -1,$$

gilt.

⋆

Beispiel (ohne Beweis)

Für $f = \mathsf{vzw}$ gilt $f : D \to B$ mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$ und f streng fallend, f stetig, f differenzierbar. $I = \mathbb{R}$ ist echtes reelles Intervall, f stetig auf $\mathbb{R}$, f differenzierbar mit Ableitung$= -1 \neq 0$ und für $J = f[I] = \mathsf{vzw}[\mathbb{R}]$ gilt $J = \mathbb{R}$ und $g = (f \downharpoonright I)^{-1} = (\mathsf{vzw} \downharpoonright \mathbb{R})^{-1} = \mathsf{vzw}^{-1}$. Einige Eigenschaften von $\mathbb{R}$ und g folgen nun aus **UKS - S**: $\mathbb{R}$ echtes reelles Intervall, g reelle Funktion, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, g stetig, streng fallend und

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(g(y)) = -g(y) == y,$$

woraus ohne allzu viel Mühe $g(y) = -y$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und somit

$$g = f = \mathsf{vzw} = \mathsf{vzw}^{-1},$$

folgt. Ohne Weiteres folgt hieraus: g differenzierbar und

$$g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g'(y) = -1.$$

⋆

Beispiel (ohne Beweis)

Für $f = \mathsf{rez}$ gilt $f : D \to B$ reelle Funktion mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$. f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig und differenzierbar mit Ableitung$\neq 0$ dort. Jedoch ist f weder auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ streng monoton noch ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ echtes reelles Intervall, so dass **UKS - S** nicht ohne passende Wahl von I eingesetzt werden kann. Es bieten sich die Möglichkeiten $I =]-\infty|0[$ und $I =]0|+\infty[$ an. In beiden Fällen ist f streng fallend auf I, so dass gemäß **UKS - S** auch $g = (f \downharpoonright I)^{-1}$ streng fallend und stetig ist. Ebenso kommt **UKS - D** mit $A = I$ und $B = J$ zum Einsatz und sichert die Differenzierbar von g auf J. Auch gelten jeweils die Aussagen

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad g(1/x) = x, g'(1/x) \cdot (-1/x^2) = 1,$$

$$\forall y : y \in J \quad \Rightarrow \quad 1/g(y) = y, -1/(g(y))^2 = 1.$$

Aus der zweiten Aussage ergibt sich ohne Weiteres

$$\forall y : y \in J \quad \Rightarrow \quad g(y) = 1/y = \mathsf{rez}(y),$$

so dass in beiden Fällen

$$g = (\mathsf{rez} \downharpoonleft J) = (f \downharpoonleft J)\,,$$

gilt.

Für $I = \,]-\infty|0[$ folgt $J = \,]-\infty|0[\, = I$ und für $I = \,]0|+\infty[$ folgt $J = \,]0|+\infty[\, = I$, so dass sich

$$(f \downharpoonleft\,]-\infty|0[)^{-1} \cup (f \downharpoonleft\,]0|+\infty[)^{-1} = (\mathsf{rez} \downharpoonleft \mathbb{R} \setminus \{0\})\,,$$

ergibt. Dies deutet darauf hin, dass f über **UKS - S** hinausgehende Inversionseigenschaften besitzt. In der Tat folgt nach kurzer Überlegung

$$f^{-1} = \mathsf{rez} = f.$$

Mit diesem Resultat sind insbesondere die Formeln

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(f(x)) = 1/(1/x) = x,$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad f'(f(x)) \cdot f'(x) = -1/(1/x)^2 \cdot (-1/x^2) = 1,$$

hervorzuheben.

2 7 Sätze mit Stetigkeit

Satz - IS 1

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\Rightarrow$

$f[I]$ reelles Intervall

Satz - IS 2

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ f streng monoton auf I

$\Rightarrow$

$f[I]$ echtes reelles Intervall

Zwischenwertsatz - ZWS

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $a \in I \wedge b \in I$

$\wedge$ $f(a) \leq c \leq f(b)$

$\Rightarrow$

$\exists \xi : \xi \in \mathsf{co}(a, b) \wedge c = f(\xi)$

Satz vom Maximum

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $a < b$

$\wedge$ f stetig auf $[a|b]$

$\Rightarrow$

$\exists \xi : f$ hat in ξ Maximum auf $[a|b]$

Satz vom Minimum

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad a < b$

$\wedge \quad f$ stetig auf $[a|b]$

$\Rightarrow$

$\exists \xi : f$ hat in ξ Minimum auf $[a|b]$

Satz - Stammfunktion 1

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ stetig auf I

$\Rightarrow$

$\exists F : F$ Stammfunktion von f auf I,

i.e. $F : I \to \mathbb{R} \wedge F$ differenzierbar $\wedge \forall x : x \in I \Rightarrow F'(x) = f(x)$.

Ohne Beweis sind hier Stammfunktionen einiger reeller Funktionen auf einem echten reellen Intervall I angegeben.

$f =$	Bedingung I	$F : I \to \mathbb{R}, F(x) =$
$\mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$	`void`	1
$c^{on}\mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$	`void`	$c \cdot x$
$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$	`void`	$\frac{1}{2} \cdot x^2$
vzw	`void`	$-\frac{1}{2} \cdot x^2$

$f =$	Bedingung I	$F : I \to \mathbb{R}, F(x) =$
$\lvert.\rvert$	`void`	$\frac{1}{2} \cdot x \cdot \lvert x\rvert$
$[.]^+$	`void`	$\frac{1}{2} \cdot x \cdot [x]^+$
$[.]^-$	`void`	$\frac{1}{2} \cdot x \cdot [x]^-$
sgn	$I \subseteq]0\lvert +\infty[$	x
sgn	$I \subseteq]0\lvert +\infty[$	$\lvert x\rvert$
sgn	$I \subseteq]-\infty\lvert 0[$	$\lvert x\rvert$
sgn	$I \subseteq]-\infty\lvert 0[$	$-x$
rez	$I \subseteq]0\lvert +\infty[$	$\ln x$
rez	$I \subseteq]0\lvert +\infty[$	$\ln \lvert x\rvert$
rez	$I \subseteq]-\infty\lvert 0[$	$\ln \lvert x\rvert$
rez	$I \subseteq]-\infty\lvert 0[$	$\ln(-x)$

Satz - Stammfunktion 2

$\quad f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ stetig auf I

$\wedge \quad a \in I$

$\wedge \quad \gamma \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

Es gibt *genau eine* Stammfunktion F von f auf I mit $\gamma = F(a)$,

i.e. es gibt *genau ein* F, so dass $F : I \to \mathbb{R}$ und F differenzierbar und $\forall x : x \in I \Rightarrow F'(x) = f(x)$ und $\gamma = F(a)$.

Beispiel (ohne Beweis)

Mit $f = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}}$ und I echtes reelles Intervall und $a \in I$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f auf I, wenn es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad F(x) = c,$$

gibt. Die Bedingungen $a \in I$ und $\gamma = F(a)$ führen auf $\gamma = F(a) = c$, also $c = \gamma$. In der Tat ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \gamma,$$

eine Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. Gemäß **Satz - Stammfunktion 2** ist dies die einzige Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. $\Box$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis)

Mit $f = k^{on}\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, und I echtes reelles Intervall und $a \in I$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f auf I, wenn es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + k \cdot x,$$

gibt. Die Bedingungen $a \in I$ und $\gamma = F(a)$ führen auf $\gamma = F(a) = c + k \cdot a$, also $c = \gamma - k \cdot a$. In der Tat ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \gamma - k \cdot a + k \cdot x = \gamma + k \cdot (-a + x),$$

eine Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. Gemäß **Satz - Stammfunktion 2** ist dies die einzige Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. $\Box$(Beispiel)

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis)

Mit $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ und I echtes reelles Intervall und $a \in I$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f auf I, wenn es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \frac{1}{2} \cdot x^2,$$

gibt. Die Bedingungen $a \in I$ und $\gamma = F(a)$ führen auf $\gamma = F(a) = c + \frac{1}{2} \cdot a^2$, also $c = \gamma - \frac{1}{2} \cdot a^2$. In der Tat ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \gamma - \frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot x^2 = \gamma + \frac{1}{2} \cdot (-a^2 + x^2),$$

eine Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. Gemäß **Satz - Stammfunktion 2** ist dies die einzige Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. $\square$(Beispiel)

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis)

Mit $f = \mathsf{vzw}$ und I echtes reelles Intervall und $a \in I$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f auf I, wenn es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad F(x) = c - \frac{1}{2} \cdot x^2,$$

gibt. Die Bedingungen $a \in I$ und $\gamma = F(a)$ führen auf $\gamma = F(a) = c - \frac{1}{2} \cdot a^2$, also $c = \gamma + \frac{1}{2} \cdot a^2$. In der Tat ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \gamma + \frac{1}{2} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 = \gamma + \frac{1}{2} \cdot (a^2 - x^2),$$

eine Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. Gemäß **Satz - Stammfunktion 2** ist dies die einzige Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. $\square$(Beispiel)

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis)

Mit $f = |.|$ und I echtes reelles Intervall und $a \in I$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f auf I, wenn es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \frac{1}{2} \cdot x \cdot |x|,$$

gibt. Die Bedingungen $a \in I$ und $\gamma = F(a)$ führen auf $\gamma = F(a) = c + \frac{1}{2} \cdot a \cdot |a|$, also $c = \gamma - \frac{1}{2} \cdot a \cdot |a|$. In der Tat ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \gamma - \frac{1}{2} \cdot a \cdot |a| + \frac{1}{2} \cdot x \cdot |x| = \gamma + \frac{1}{2} \cdot (-a \cdot |a| + x \cdot |x|),$$

eine Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. Gemäß **Satz - Stammfunktion 2** ist dies die einzige Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis)

Mit $f = [.]^+$ und I echtes reelles Intervall und $a \in I$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f auf I, wenn es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \frac{1}{2} \cdot x \cdot [x]^+,$$

gibt. Die Bedingungen $a \in I$ und $\gamma = F(a)$ führen auf $\gamma = F(a) = c + \frac{1}{2} \cdot a \cdot [a]^+$, also $c = \gamma - \frac{1}{2} \cdot a \cdot [a]^+$. In der Tat ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \gamma - \frac{1}{2} \cdot a \cdot [a]^+ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot [x]^+ = \gamma + \frac{1}{2} \cdot (-a \cdot [a]^+ + x \cdot [x]^+),$$

eine Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. Gemäß **Satz - Stammfunktion 2** ist dies die einzige Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis)

Mit $f = [.]^-$ und I echtes reelles Intervall und $a \in I$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f auf I, wenn es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \frac{1}{2} \cdot x \cdot [x]^-,$$

gibt. Die Bedingungen $a \in I$ und $\gamma = F(a)$ führen auf $\gamma = F(a) = c + \frac{1}{2} \cdot a \cdot [a]^-$, also $c = \gamma - \frac{1}{2} \cdot a \cdot [a]^-$. In der Tat ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \gamma - \frac{1}{2} \cdot a \cdot [a]^- - \frac{1}{2} \cdot x \cdot [x]^- = \gamma + \frac{1}{2} \cdot (-a \cdot [a]^- + x \cdot [x]^-),$$

eine Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. Gemäß **Satz - Stammfunktion 2** ist dies die einzige Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis)

Mit $f = \mathsf{sgn}$ und I echtes reelles Intervall mit $I \subseteq \,]0| + \infty[$ *oder* $I \subseteq \,] - \infty|0[$ und $a \in I$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f auf I, wenn es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + |x|,$$

gibt. Die Bedingungen $a \in I$ und $\gamma = F(a)$ führen auf $\gamma = F(a) = c + |a|$, also $c = \gamma - |a|$. In der Tat ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \gamma - |a| + |x| = \gamma + \frac{1}{2} \cdot (-|a| + |x|),$$

eine Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. Gemäß **Satz - Stammfunktion 2** ist dies die einzige Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. $\square$(Beispiel)

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis)

Mit $f = \mathsf{rez}$ und I echtes reelles Intervall mit $I \subseteq \,]0|+\infty[$ *oder* $I \subseteq \,]-\infty|0[$ und $a \in I$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f auf I, wenn es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in I \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \ln|x|,$$

gibt. Die Bedingungen $a \in I$ und $\gamma = F(a)$ führen auf $\gamma = F(a) = c + \ln|a|$, also $c = \gamma - \ln|a|$. In der Tat ist

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \gamma - \ln|a| + \ln|x| = \gamma + \ln\left|\frac{x}{a}\right|,$$

eine Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. Gemäß **Satz - Stammfunktion 2** ist dies die einzige Stammfunktion von f auf I mit $\gamma = F(a)$. $\square$(Beispiel)