Vorkurs Mathematik
Reelle Funktionen - 3
13 Baustein-Regeln

Andreas Unterreiter

9. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 $g \subseteq f$ - "Teile einer Funktion entfernen"

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge g \subseteq f \quad \Rightarrow \quad g \text{ reelle Funktion} \wedge \forall x : x \in \mathsf{dom}\, g \Rightarrow g(x) = f(x).$$

$$f : D \to B \text{ reelle Funktion} \wedge g \subseteq f \quad \Rightarrow \quad g : \mathsf{dom}\, g \to B \text{ reelle Funktion} \wedge \forall x : x \in \mathsf{dom}\, g \Rightarrow g(x) = f(x).$$

Beispiel (ohne Beweis) Die Funktion $f = \mathsf{rez}$ "soll im Quadrat mit Seitenlänge 20 um den Ursprung $(0,0)$ gezeichnet" werden. Mathematisch präziser soll

$$g = \{(x,y) : (x,y) \in f \wedge |x| \leq 10 \wedge |y| \leq 10\},$$

skizziert werden. Offenbar gilt $g \subseteq f$ und g kann durch "Entfernen" der nicht weiter interessierenden Punkte von f gewonnen werden. Ohne allzu viel Mühe ergibt sich

$$g : [-10| - \frac{1}{10}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{10}|10] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Es fällt die "Löchrigkeit" von

$$\mathsf{dom}\, g = [-10| - \frac{1}{10}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{10}|10],$$

und von

$$\mathsf{ran}\, g = [-10| - \frac{1}{10}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{10}|10],$$

auf. $\square$(Beispiel)

In Bezug auf Stetigkeit gilt:

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $g \subseteq f$

$\wedge$ $I \cap \mathsf{dom}\, g$ echtes reelles Intervall

$\Rightarrow$

g stetig auf $I \cap \mathsf{dom}\, g$.

Bezüglich Differenzierbarkeit gilt

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ $g \subseteq f$

$\wedge$ $I \cap \mathsf{dom}\, g$ echtes reelles Intervall

$\Rightarrow$

g differenzierbar auf $I \cap \mathsf{dom}\, g$

$\wedge$ $\forall x : x \in I \cap \mathsf{dom}\, g \Rightarrow g'(x) = f'(x)$.

---

2 $(f \downharpoonleft E)$ - "Eine Funktion einschränken"

---

f reelle Funktion $\quad\Rightarrow\quad$ $(f \downharpoonleft E)$ reelle Funktion
$\wedge\ \forall x : x \in E \cap \mathsf{dom}\, f \Rightarrow (f \downharpoonleft E)\,(x) = f(x).$

$f : D \to B$ reelle Funktion $\quad\Rightarrow\quad$ $(f \downharpoonleft E) : E \cap D \to B$ reelle Funktion
$\wedge\ \forall x : x \in E \cap D \Rightarrow (f \downharpoonleft E)\,(x) = f(x).$

Beispiel (ohne Beweis) Die Funktion $f = \mathsf{rez}$ soll nur für natürliche Zahlen als Eingabe betrachtet werden. Mathematisch präziser soll

$$(f \downharpoonleft \mathbb{N}) = (\mathsf{rez} \downharpoonleft \mathbb{N}) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad (f \downharpoonleft \mathbb{N})\,(n) = \frac{1}{n},$$

in den Fokus rücken. Nach gängigem Sprachgebrauch entsteht in diesem Fall eine "reelle Folge", also eine reelle Funktion, deren Definitions-Bereich= $\mathbb{N}$ ist. Unter Zugrundelegung verstehenden Einverständnisses dessen, was mit den drei Punkten "..." gemeint ist, kann die Folge $(f \downharpoonleft \mathbb{N})$ als

$$\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right),$$

geschrieben werden.

In Bezug auf Stetigkeit gilt:

---

 f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $E \cap I$ echtes reelles Intervall

$\Rightarrow$

$(f \downharpoonleft E)$ stetig auf $E \cap I$.

Bezüglich Differenzierbarkeit gilt

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ $E \cap I$ echtes reelles Intervall

$\Rightarrow$

$(f \downharpoonleft E)$ differenzierbar auf $E \cap I$

$\wedge$ $\forall x : x \in E \cap I \Rightarrow (f \downharpoonleft E)'(x) = f'(x)$.

---

3 $f \cup g$ - "Eine Funktion abschnittsweise definieren"

---

f reelle Funktion $\wedge$ g reelle Funktion $\wedge$ $\forall t : t \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) \Rightarrow f(t) = g(t)$

$$\Rightarrow \quad f \cup g \text{ reelle Funktion} \wedge \forall x : \begin{cases} x \in \mathsf{dom}\, f & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = f(x) \\ x \in \mathsf{dom}\, g & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = g(x) \end{cases}.$$

$f : D \to B$ reelle Funktion $\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion
$\wedge \forall t : t \in D \cap C \Rightarrow f(t) = g(t)$

$$\Rightarrow \quad f \cup g : D \cup C \to B \cup A \text{ reelle Funktion} \wedge \forall x : \begin{cases} x \in D & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = f(x) \\ x \in C & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = g(x) \end{cases}.$$

Spezialfall:

---

f reelle Funktion $\wedge$ g reelle Funktion $\wedge$ $0 = (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$$\Rightarrow \quad f \cup g \text{ reelle Funktion} \wedge \forall x : \begin{cases} x \in \mathsf{dom}\, f & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = f(x) \\ x \in \mathsf{dom}\, g & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = g(x) \end{cases}.$$

$f : D \to B$ reelle Funktion $\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion $\wedge$ $0 = D \cap C$

$$\Rightarrow \quad f \cup g : D \cup C \to B \cup A \text{ reelle Funktion} \wedge \forall x : \begin{cases} x \in D & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = f(x) \\ x \in C & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = g(x) \end{cases}.$$

Beispiel (ohne Beweis) Für $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ und $g = \mathsf{vzw}$ ist $f \cup g$ *keine* Funktion, da $(1, 1) \in f \cup g$ und $(1, -1) \in f \cup g$ und $1 \neq -1$. Hier ist die dritte Prämisse des eingangs erwähnten Satzes falsch. Es gibt $x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$ - etwa $x = 1$ - mit $f(x) \neq g(x)$. $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Auf die reellen Funktionen $f = (\mathsf{vzw} \downharpoonright \,]-\infty|0])$ und auf $g = (\mathsf{id}_{\mathbb{R}} \downharpoonright [0|+\infty[)$ trifft die dritte Prämisse des eingags erwähnten Satzes zu, denn für den einzigen gemeisamen Punkt 0 von $\mathsf{dom}\, f$ und $\mathsf{dom}\, g$ gilt

$$f(x) = f(0) = \mathsf{vzw}(0) = 0 = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(0) = g(0) = g(x).$$

Somit ist $f \cup g$ reelle Funktion mit

$$\forall x : \left\{ \begin{array}{lll} -\infty < x \leq 0 & \Rightarrow & (f \cup g)(x) = f(x) = -x \\ 0 \leq x < +\infty & \Rightarrow & (f \cup g)(x) = g(x) = x \end{array} \right. .$$

Unschwer ist $f \cup g = |.|$ zu erkennen. $\square$(Beispiel)

Ungleich schwieriger ist es, halbwegs allgemein, doch unter im Vorkurs zumutbaren Voraussetzungen auf " $f \cup g$ stetig" schließen zu können.

Beispiel (ohne Beweis) Die Funktionen

$$f = (\mathsf{zo} \downharpoonright \,]-\infty|0])\,, g = (1^{on}\mathbb{R} \downharpoonright \,]0|+\infty[)\,,$$

sind stetig, die Definitions-Bereiche sind echte reelle Intervalle und schneiden sich nicht, $f \cup g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine reelle Funktionen, doch $f \cup g$ ist wegen

$$\lim_{t \uparrow 0} f(t) = 0 \neq 1 = \lim_{t \downarrow 0} g(t),$$

unstetig in 0. $\square$(Beispiel)

Ein noch halbwegs gut lesbarer Satz über die Stetigkeit von $f \cup g$ gilt unter speziellen Voraussetzungen an f und g.

$c \in \mathbb{R} \wedge a < c \wedge c < b$

$\wedge$ f reelle Funktion $\wedge$ $\mathsf{dom}\, f \subseteq \,]-\infty|c]$ $\wedge$ f stetig auf $]a|c]$

$\wedge$ g reelle Funktion $\wedge$ $\mathsf{dom}\, g \subseteq [c|+\infty[$ $\wedge$ stetig auf $[c|b[$

$\wedge$ $f(c) = g(c)$

$\Rightarrow$

$f \cup g$ reelle Funktion

$\wedge$ $f \cup g$ stetig auf $]a|b[$

$\wedge$ $\forall x : \left\{ \begin{array}{lll} x \in \mathsf{dom}\, f & \Rightarrow & (f \cup g)(x) = f(x) \\ x \in \mathsf{dom}\, g & \Rightarrow & (f \cup g)(x) = g(x) \end{array} \right.$

Beispiel (ohne Beweis) Auf die reellen Funktionen $f = (\mathsf{vzw} \downharpoonright \,]-\infty|0])$ und auf $g = (\mathsf{id}_{\mathbb{R}} \downharpoonright [0|+\infty[)$ treffen die Prämissen dieses Satzes mit $a = -\infty$, $c = 0$, $b = +\infty$ zu. Insbesondere gilt

$$f(c) = f(0) = \mathsf{vzw}(0) = 0 = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(0) = g(0) = g(c).$$

Somit ist $f \cup g$ reelle Funktion, die auf $]-\infty|+\infty[\, = \mathbb{R}$ stetig ist. Wie bereits erwähnt gilt

$$f \cup g = |.|,$$

so dass sich auch auf Grund dieses Beispiels die reelle Betragsfunktion als stetig herausstellt. □(Beispiel)

Nicht einfacher ist die Situation, wenn auf die Differenzierbarkeit von $f \cup g$ unter Vorkurs-tauglichen Prämissen geschlossen werden soll. Immerhin gilt ähnlich zum soeben erwähnten Satz über die Stetigkeit von $f \cup g$ Folgendes.

$c \in \mathbb{R} \wedge a < c \wedge c < b$

$\wedge$ f reelle Funktion $\wedge$ $\mathsf{dom}\, f \subseteq \,]-\infty|c]$ $\wedge$ f differenzierbar auf $]a|c]$

$\wedge$ g reelle Funktion $\wedge$ $\mathsf{dom}\, g \subseteq [c|+\infty[$ $\wedge$ differenzierbar auf $[c|b[$

$\wedge$ $f(c) = g(c)$

$\wedge$ $f'(c) = g'(c)$

$\Rightarrow$

$f \cup g$ reelle Funktion

$\wedge$ $f \cup g$ differenzierbar auf $]a|b[$

$$\wedge \quad \forall x : \begin{cases} x \in \mathsf{dom}\, f & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = f(x) \\ x \in \mathsf{dom}\, g & \Rightarrow \quad (f \cup g)(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\wedge \quad \forall x : \begin{cases} x \in \,]a|c] & \Rightarrow \quad (f \cup g)'(x) = f'(x) \\ x \in [c|b[& \Rightarrow \quad (f \cup g)'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Beispiel (ohne Beweis) Auf die reellen Funktionen $f = (\mathsf{vzw} \downharpoonright \,]-\infty|0])$ und auf $g = (\mathsf{id}_{\mathbb{R}} \downharpoonright [0|+\infty[)$ trifft mit $a = -\infty$, $c = 0$, $b = +\infty$ wegen

$$f'(c) = f'(0) = -1 \neq 1 = g'(0) = g'(c),$$

nicht die letzte Prämissen dieses Satzes zu. In der Tat ist $f \cup g = |.|$ *nicht differenzierbar* in $c = 0$ und somit $\neg(f \cup g$ differenzierbar auf $]a|b[)$. □(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Auf die reellen Funktionen

$$f :]-\infty|0] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2,$$

$$g : [0|+\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2,$$

und auf

$$a = -\infty, c = 0, b = +\infty,$$

treffen unter anderem wegen

$$f(c) = f(0) = -0^2 = 0 = 0^2 = g(0) = g(c),$$

$$f'(c) = f'(0) = -2 \cdot 0 = 0 = 2 \cdot 0 = g'(0) = g'(c),$$

die Prämissenn dieses Satzes zu. Somit ist

$$f \cup g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \cup g)(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x \leq 0 \\ x^2 & , \quad 0 \leq x \end{cases},$$

differenzierbar mit

$$(f \cup g)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \cup g)'(x) = \begin{cases} -2 \cdot x & , \quad x \leq 0 \\ 2 \cdot x & , \quad 0 \leq x \end{cases}.$$

Unschwer ist

$$f \cup g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \cup g)(x) = x \cdot |x|,$$

sowie

$$(f \cup g)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \cup g)'(x) = 2 \cdot |x|,$$

zu erkennen. $\square$(Beispiel)

4 $f(c+.)$ - "Eine Funktion um c nach links verschieben"

---

f reelle Funktion

$\wedge$ $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$f(c+.)$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(f(c+.)) = \{\omega : c+\omega \in \mathsf{dom}\, f\}$

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(f(c+.)) = \{-c+\nu : \nu \in \mathsf{dom}\, f\}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(f(c+.)) = \mathsf{ran}\, f$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(f(c+.)) \Rightarrow f(c+.)(x) = f(c+x).$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $c \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $C = \{\omega : c+\omega \in D\}$

$\Rightarrow$

$f(c+.) : C \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $f(c+.) : C \to B, \quad f(c+.)(x) = f(c+x)$

$\wedge$ $C = \{-c+\nu : \nu \in D\}.$

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ gilt

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

Falls $c = 7$, so gilt

$$C = \{\omega : 7+\omega \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

und

$$f(7+.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(7+.)(x) = f(7+x) = 7+x,$$

ist tatsächlich die "um 7 nach links verschobene Gerade $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$". □(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ gilt

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

Falls $c = -3$, so gilt

$$C = \{\omega : -3 + \omega \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

und

$$f(-3 + .)(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(-3 + .)(x) = f(-3 + x) = -3 + x,$$

ist die “um -3 nach links verschobene Gerade $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$” . Diese Verschiebung von $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ um die negative Zahl -3 nach links ist anschaulich eine “Verschiebung von $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ um $3 = |-3|$ nach rechts” . □(Beispiel)

Bezüglich Stetigkeit von $f(c + .)$ gilt:

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $c \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $J = \{\omega : c + \omega \in I\}$

$\Rightarrow$

J echtes reelles Intervall

$\wedge$ $J = \{-c + \nu : \nu \in I\}$

$\wedge$ $f(c + .)$ stetig auf J

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \mathsf{rez}$ und $I =]0| + \infty[$ gilt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f \text{ stetig auf } I.$$

Mit $c = -2$ und

$$J = \{\omega : -2 + \omega \in I\},$$

folgt aus dem vorherigen Satz: J echtes reelles Intervall und $f(-2 + .)$ stetig auf J. Etwas expliziter gilt wegen $-(-2) = 2$,

$$J = \{2 + \nu : \nu \in I\} =]2| + \infty[,$$

und

$$f(-2 + .) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(-2 + .)(x) = \frac{1}{-2 + x},$$

ist stetig auf $]2| + \infty[$. □(Beispiel)

Bezüglich Differenzierbarkeit von $f(c+.)$ gilt:

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ $c \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $J = \{\omega : c + \omega \in I\}$

$\Rightarrow$

J echtes reelles Intervall

$\wedge$ $J = \{-c + \nu : \nu \in I\}$

$\wedge$ $f(c+.)$ differenzierbar auf J

$\wedge$ $\forall x : x \in J \Rightarrow f(c+.)'(x) = f'(c+x)$

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \sin$ und $I = \mathbb{R}$ gilt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f \text{ differenzierbar auf } I.$$

Mit $c = \pi$ und

$$J = \{\omega : \pi + \omega \in I\},$$

folgt aus dem vorherigen Satz: J echtes reelles Intervall und $f(\pi+.)$ differenzierbar auf J und für alle x mit $x \in J$ gilt $f(\pi+.)'(x) = f'(\pi + x)$. Etwas expliziter gilt

$$J = \{-\pi + \omega : \omega \in I\} = \mathbb{R},$$

und

$$\sin(\pi+.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(\pi+.)(x) = \sin(\pi + x),$$

differenzierbar und

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin(\pi+.)'(x) = \sin'(\pi + x) = \cos(\pi + x).$$

$\Box$(Beispiel)

5 $f(\lambda\cdot.)$- "Das Argument einer Funktion skalieren"

---

f reelle Funktion

$\wedge$ $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$f(\lambda\cdot.)$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(f(\lambda\cdot.)) = \{\omega : \lambda\cdot\omega \in \mathsf{dom}\, f\}$

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(f(\lambda\cdot.)) = \left\{\frac{\nu}{\lambda} : \nu \in \mathsf{dom}\, f\right\}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(f(\lambda\cdot.)) = \mathsf{ran}\, f$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(f(\lambda\cdot.)) \Rightarrow f(\lambda\cdot.)(x) = f(\lambda\cdot x)$.

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $C = \{\omega : \lambda\cdot\omega \in D\}$

$\Rightarrow$

$f(\lambda\cdot.) : C \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $f(\lambda\cdot.) : C \to B, \quad f(\lambda\cdot.)(x) = f(\lambda\cdot x)$

$\wedge$ $C = \left\{\frac{\nu}{\lambda} : \nu \in \ D\right\}$.

Zumeist wird $f(\lambda\cdot.)$ mit $f : D \to B$ reelle Funktion für $0 < \lambda$ betrachtet. Allgemeiner ist zwischen unterschiedlichen Werte-Bereichen von λ mit $0 \neq \lambda$ zu unterscheiden. In allen Fällen bleibt der Bild-Bereich von f erhalten.

$\underline{1 < \lambda}$ $f(\lambda\cdot.)$ ist "horizontal $\frac{1}{\lambda}$-getreckte Version von f". Nullstellen, x-Werte von Extremalstellen und Wendepunkten rücken näher zusammen. Wird die unabhängige Variable von f als Zeit interpretiert, erscheint $f(\lambda\cdot.)$ als "Zeitraffer-Version von f". Ist f T periodisch, so ist $f(\lambda\cdot.)$ $\frac{T}{\lambda}$ periodisch, so dass $f(\lambda\cdot.)$ eine kleinere Periode als f hat und entsprechend "höherfrequenter" ist.

$\underline{\lambda = 1}$ Offenbar gilt $f(1\cdot.) = f$.

$\underline{0 < \lambda < 1}$ $f(\lambda\cdot.)$ ist die "horizontal $\frac{1}{\lambda}$-gestreckte Version von f". Nullstellen, Extremalstellen und Wendepunkte entfernen sich voneinander. Wird die unabhängige Variable von f als Zeit interpretiert, erscheint $f(\lambda \cdot .)$ als "Zeitlupen-Version von f". Ist f T periodisch, so ist $f(\lambda \cdot .)$ $\frac{T}{\lambda}$ periodisch, so dass $f(\lambda \cdot .)$ eine größere Periode als f hat und entsprechend "niederfrequenter" ist.

$\underline{\lambda = -1}$ $f((-1) \cdot .)$ ist die "an der y-Achse gespiegelte Version von f". Ist f (streng) wachsend, so ist $f((-1) \cdot .)$ (streng) fallend. Ist f (streng) fallend, so ist $f((-1) \cdot .)$ (streng) wachsend. Allgemeiner gilt: Ist f (streng) wachsend auf E, so ist $f((-1) \cdot .)$ (streng) fallend auf $\{-\omega : \omega \in E\}$. Ist f (streng) fallend auf E, so ist $f((-1) \cdot .)$ (streng) wachsend auf $\{-\omega : \omega \in E\}$. Auch gilt: Ist f konvex auf E, so ist $f((-1) \cdot .)$ konvex auf $\{-\omega : \omega \in E\}$. Ist f konkav auf E, so ist $f((-1) \cdot .)$ konkav auf $\{-\omega : \omega \in E\}$. Wird die unabhängige Variable von f als Zeit interpretiert, erscheint $f((-1) \cdot .)$ als "Zeitumkehr-Version von f". Ist f T periodisch, so ist auch $f((-1) \cdot .)$ T periodisch.

$\underline{-1 < \lambda < 0}$ Wegen der etwas mühsam zu lesenden, doch in diesem Fall richtigen Gleichung

$$f((-\lambda) \cdot .) = f(|\lambda| \cdot .)((-1) \cdot .),$$

wird die Funktion erst an der y-Achse gespiegelt und dann horizontal $\frac{1}{|\lambda|}$-gestreckt.

$\underline{\lambda < -1}$ Wegen der nach wie vor etwas mühsam zu lesenden, doch auch in diesem Fall richtigen Gleichung

$$f((-\lambda) \cdot .) = f(|\lambda| \cdot .)((-1) \cdot .),$$

wird die Funktion erst an der y-Achse gespiegelt und dann horizontal $\frac{1}{|\lambda|}$-gestreckt.

Bezüglich Stetigkeit von $f(\lambda \cdot .)$ gilt:

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $J = \{\omega : \lambda \cdot \omega \in I\}$

$\Rightarrow$

J echtes reelles Intervall

$\wedge$ $J = \{\frac{\nu}{\lambda} : \nu \in I\}$

$\wedge$ $f(\lambda \cdot .)$ stetig auf J.

Bezüglich Differenzierbarkeit von $f(\lambda \cdot .)$ gilt:

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $J = \{\omega : \lambda \cdot \omega \in I\}$

$\Rightarrow$

J echtes reelles Intervall

$\wedge$ $J = \{\frac{\nu}{\lambda} : \nu \in I\}$

$\wedge$ $f(\lambda \cdot .)$ differenzierbar auf J

$\wedge$ $\forall x : x \in J \Rightarrow f(\lambda \cdot .)'(x) = \lambda \cdot f'(\lambda \cdot x)$.

Beispiel (ohne Beweis) Für $f = \cos$ und $D = B = \mathbb{R}$ und $I = \mathbb{R}$ und $\lambda = 100$ gilt

$$\cos(100 \cdot .) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(100 \cdot .)(x) = \cos(100 \cdot x),$$

$\cos(100\cdot .)$ ist $\frac{2\cdot\pi}{100}=\frac{\pi}{50}$ periodisch, differenzierbar und es gilt

$$\cos(100\cdot .)':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \cos(100\cdot .)'(x)=100\cdot\cos'(100\cdot x)=-100\cdot\sin(100\cdot x).$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Für $f=\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ und $D=B=\mathbb{R}$ und $I=\mathbb{R}$ und $\lambda=\frac{1}{111}$ gilt

$$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(\frac{1}{111}\cdot .):\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(\frac{1}{111}\cdot .)(x)=\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(\frac{1}{111}\cdot x)=\frac{x}{111},$$

$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(\frac{1}{111}\cdot .)$ differenzierbar und es gilt

$$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(\frac{1}{111}\cdot .)':\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(\frac{1}{111}\cdot .)'(x)=\frac{1}{111}\cdot\mathsf{id}_{\mathbb{R}}'(\frac{1}{111}\cdot x)=\frac{1}{111}\cdot 1=\frac{1}{111}.$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Für $f=\exp$ und $D=B=\mathbb{R}$ und $\lambda=-1$ gilt

$$\exp((-1)\cdot .):\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \exp((-1)\cdot .)(x)=\exp(-x),$$

$\exp((-1)\cdot .)$ ist die an der y-Achse gespiegelte Version von exp, $\exp((-1)\cdot .)$ ist streng fallend (da exp streng wachsend), $\exp((-1)\cdot .)$ nimmt nur positive Werte und jeden positiven Wert (mindestens) einmal an (da $\mathsf{ran}\,(\exp((-1)\cdot .))=\mathsf{ran}\,(\exp)=\,]0|+\infty[$), $\exp((-1)\cdot .)$ differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}&\exp((-1)\cdot .)':\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ &\qquad\exp((-1)\cdot .)'(x)=(-1)\cdot\exp'((-1)\cdot x)=(-1)\cdot\exp(-x)=-\exp(-x).\end{aligned}$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Für

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=5\cdot x,$$

und $B=D=\mathbb{R}$ und $I=\mathbb{R}$ und $\lambda=-\frac{1}{2}$ gilt

$$f(-\frac{1}{2}\cdot .):\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f(-\frac{1}{2}\cdot .)(x)=f(-\frac{1}{2}\cdot x)=5\cdot-\frac{1}{2}\cdot x=-\frac{5\cdot x}{2},$$

$f(-\frac{1}{2}\cdot .)$ ist die erst an der y-Achse gespiegelte und dann horizontal 2-gestrechte Version von f, $f(-\frac{1}{2}\cdot .)$ ist streng fallend (da f streng wachsend) und differenzierbar und

$$f(-\frac{1}{2}\cdot .)':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(-\frac{1}{2}\cdot .)'(x)=-\frac{1}{2}\cdot f'(-\frac{1}{2}\cdot x)=-\frac{1}{2}\cdot 5=-\frac{5}{2}.$$

$\square$(Beispiel)

6 $(d+.f)$ - "Eine Funktion um d nach oben verschieben"

---

f reelle Funktion

$\wedge$ $d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$(d+.f)$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(d+.f) = \mathsf{dom}\,f$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,f = \{d+f(\omega) : \omega \in \mathsf{dom}\,f\}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,f = \{d+\nu : \nu \in \mathsf{ran}\,f\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(d+.f) \Rightarrow (d+.f)(x) = d+f(x)$.

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $d \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $A = \{d+\omega : \omega \in B\}$

$\Rightarrow$

$(d+.f) : D \to A$ reelle Funktion

$\wedge$ $(d+.f) : D \to A, \quad (d+.f)(x) = d+f(x)$.

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ und $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$ und $d = 3$ gilt

$$A = \{d+\omega : \omega \in B\} = \{3+\omega : \omega \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

und

$$(d+.f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (d+.f)(x) = d+f(x),$$

also

$$(3+.\mathsf{id}_{\mathbb{R}}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (3+.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})(x) = 3+\mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) = 3+x,$$

und $(3+.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})$ ist die "um 3 nach oben verschobene Gerade $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$". $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \mathsf{sgn}$ gilt

$$f : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}, \quad f(x) = \mathsf{sgn}\,(x).$$

Falls $d = -1$, so gilt mit $B = \{-1, 0, 1\}$,

$$A = \{d + \omega : \omega \in \{-1, 0, 1\}\} = \{-1 + \omega : \omega \in \{-1, 0, 1\}\} = \{-2, -1, 0\},$$

und somit ist

$$(-1 + .\mathsf{sgn}\,) : \mathbb{R} \to \{-2, -1, 0\},$$
$$(-1 + .\mathsf{sgn}\,)(x) = -1 + \mathsf{sgn}\,(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x < 1 \\ -1 & , \quad x = 0 \\ \;\;0 & , \quad 0 < x \end{cases} ,$$

die “ um -1 nach oben verschobene Funktion sgn ” . Diese Verschiebung von sgn um die negative Zahl -1 nach oben ist anschaulich eine “ Verschiebung von sgn um $1 = |-1|$ nach unten” . □(Beispiel)

Bezüglich Stetigkeit von $(d + .f)$ gilt:

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$(d + .f)$ stetig auf I

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \mathsf{rez}$ und $I = \,]-\infty|0[$ gilt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f \text{ stetig auf } I.$$

Mit $d = -7$ folgt aus dem vorherigen Satz:

$$(-7 + .\mathsf{rez}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (-7 + .\mathsf{rez})(x) = -7 + \frac{1}{x},$$

ist stetig auf $]-\infty|0[$. □(Beispiel)

Bezüglich Differenzierbarkeit von $(d + .f)$ gilt:

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ $d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$(d + .f)$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow (d + .f)'(x) = f'(x)$

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \mathsf{vzw}$ und $I = \mathbb{R}$ gilt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f \text{ differenzierbar auf } I.$$

Mit $d = -8$ folgt aus dem vorherigen Satz:

$$(-8 + .\mathsf{vzw}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (-8 + .\mathsf{vzw})(x) = -8 - x,$$

differenzierbar und

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-8 + .\mathsf{vzw})'(x) = \mathsf{vzw}'(x) = -1.$$

$\square$(Beispiel)

7 $(a \cdot .f)$ - "Die Amplitude einer Funktion skalieren"

---

f reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$(a \cdot .f)$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(a \cdot .f) = \mathsf{dom}\, f$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(a \cdot .f) = \{a \cdot f(\omega) : \omega \in \mathsf{dom}\, f\}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(a \cdot .f) = \{a \cdot \nu : \nu \in \mathsf{ran}\, f\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(a \cdot .f) \Rightarrow (a \cdot .f)(x) = a \cdot f(x).$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $A = \{a \cdot \omega : \omega \in B\}$

$\Rightarrow$

$(a \cdot .f) : D \to A$ reelle Funktion

$\wedge$ $(a \cdot .f) : D \to A, \quad (a \cdot .f)(x) = a \cdot f(x).$

Meistens wird $(a \cdot .f)$ mit $f : D \to B$ reelle Funktion für $0 < a \in \mathbb{R}$ betrachtet. Aber es ist auch $a \leq 0$,a reell möglich. Qualitativ stellt sich bei $(a \cdot .f)$ für unterschiedliche Werte-Bereiche von a unterschiedliches Verhalten ein.

$\underline{1 < a}$ $(a \cdot .f)$ ist die "vertikal a-gestreckte Version von f". Nullstellen, die x-Werte der Extremalstellen und der Wendpunkte bleiben erhalten. Der Abstand von jedem Punkt von f zur x-Achse verändert sich auf das a-Fache, wird also, da $1 < a \in \mathbb{R}$, für nicht auf der x-Achse liegende Punkte von f größer. Für alle x, y mit $x \in D$ und $y \in D$ gilt $(a \cdot .f)(x) - (a \cdot .f)(y) = a \cdot (f(x) - f(y))$ und $|f(x) - f(y)| \leq a \cdot |f(x) - f(y)| = |(a \cdot .f)(x) - (a \cdot .f)(y)|$.

$\underline{a = 1}$ Offenbar gilt $(1 \cdot .f) = f$.

$\underline{0 < a < 1}$ $(a \cdot .f)$ ist die "vertikal a-gestreckte Version von f". Nullstellen, die x-Werte von Extremalstellen und von Wendpunkten bleiben erhalten. Der Abstand von jedem Punkt von f zur x-Achse verändert sich auf das a-Fache, wird also, da $0 < a < 1$, für nicht auf der x-Achse liegende Punkte von f kleiner. Für alle x, y mit $x \in D$ und $y \in D$ gilt $(a \cdot .f)(x) - (a \cdot .f)(y) = a \cdot (f(x) - f(y))$ und $|(a \cdot .f)(x) - (a \cdot .f)(y)| = a \cdot |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$.

$\underline{a = 0}$ Offenbar gilt $(0 \cdot .f) = \mathsf{zo}_D$, also

$$(0 \cdot .f) : D \to \{0\}, \quad (0 \cdot .f)(x) = 0.$$

$\underline{a = -1}$ $(-1 \cdot .f)$ ist die "an der x-Achse gespiegelte Version von f". Ist f (streng) wachsend (auf E), so ist $(-1 \cdot .f)$ (streng) fallend (auf E). Ist f (streng) fallend auf E, so ist $(-1 \cdot .f)$ (streng) wachsend (auf E). Ist f konvex auf E, so ist $(-1 \cdot .f)$ konkav auf E. Ist f konkav auf E, so ist $(-1 \cdot .f)$ konvex auf E.

$\underline{-1 < a < 0}$ Es gilt in diesem Fall

$$(a \cdot .f) = (|a| \cdot .(-1 \cdot .f)),$$

so dass $(a \cdot .f)$ aus f dadurch entsteht, indem f erst an der x-Achse gespiegelt und dann vertikal $|a|$-gestreckt wird. Im vorliegenden Fall gilt $0 < |a| < 1$. Die Reihenfolge ist wegen

$$(a \cdot .f) = (-1 \cdot .(|a| \cdot .f)),$$

umkehrbar: $(a \cdot .f)$ entsteht durch f auch so, indem f erst vertikal $|a|$-gestreckt und dann an der x-Achse gespiegelt wird.

$\underline{a < -1}$ Auch in diesem Fall gelten

$$(a \cdot .f) = (|a| \cdot .(-1 \cdot .f)),$$

und

$$(a \cdot .f) = (-1 \cdot .(|a| \cdot .f)),$$

so dass die Anmerkungen vom Fall $-1 < a < 0$ sinngemäß auch hier, jedoch mit der Änderung $1 < |a|$, gelten.

Bezüglich Stetigkeit von $(a \cdot .f)$ gilt:

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$(a \cdot .f)$ stetig auf I.

Bezüglich Differenzierbarkeit von $(a \cdot .f)$ gilt:

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$(a \cdot .f)$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow (a \cdot .f)'(x) = a \cdot f'(x).$

Beispiel (ohne Beweis) Für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x) + \cos(x),$$

gilt

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2},$$

und

$$\mathsf{ran}\, f = [-\sqrt{2}|\sqrt{2}],$$

so dass

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x)| \leq \sqrt{2},$$

und auch

$$|f| \text{ hat in } \tfrac{\pi}{4} \text{ globales Maximum} \wedge |f(\tfrac{\pi}{4})| = \sqrt{2}.$$

Auf Grund dieser Tatsache ist der Maximalwert von $|f|$ gleich $\sqrt{2}$ und man sagt, dass "die Amplitude von f gleich $\sqrt{2}$" ist. Mit $a = -5$ gilt

$$(-5 \cdot .f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (-5 \cdot .f)(x) = -5 \cdot f(x) = -5 \cdot (\sin(x) + \cos(x)).$$

Gemäß vorherigen Satzes ist $(-5 \cdot .f)$ wie f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$(-5 \cdot .f)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (-5 \cdot .f)'(x) = -5 \cdot f'(x),$$

also

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-5 \cdot .f)'(x) = -5 \cdot (\cos(x) - \sin(x)).$$

$(-5 \cdot .f)$ ist die erst an der x-Achse gespiegelte und dann vertikal 5-gestreckte Version von f. Somit ist die Amplitude von $(-5 \cdot .f)$ das Fünffache der Amplitude von f. Mathematisch präziser gilt

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow -5 \cdot \sqrt{2} \leq (-5 \cdot .f)(x) \leq 5 \cdot \sqrt{2},$$

$$\textsf{ran}\,(-5\cdot.f) = [\,-5\cdot\sqrt{2}|5\cdot\sqrt{2}\,],$$
$$\forall x : x\in\mathbb{R} \Rightarrow |(-5\cdot f)(x)| \le 5\cdot\sqrt{2},$$
$$(-5\cdot.f) \text{ hat in } \tfrac{\pi}{4} \text{ globales Maximum} \wedge |(-5\cdot.f)(\tfrac{\pi}{4})| = 5\cdot\sqrt{2},$$
$$\text{der Maximalwert von } |(-5\cdot.f)| \text{ ist gleich } 5\cdot\sqrt{2},$$
$$\text{die Amplitude von } (-5\cdot.f) \text{ ist } 5\cdot\sqrt{2}.$$

□(Beispiel)

8 $(1/.f)$ - "Die reziproke Funktion bilden"

---

f reelle Funktion

$\Rightarrow$

$(1/.f)$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(1/.f) = \mathsf{dom}\,f$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(1/.f) = \{\frac{1}{f(\omega)} : \omega \in \mathsf{dom}\,f\}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(1/.f) = \{\frac{1}{\nu} : \nu \in \mathsf{ran}\,f\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(1/.f) \Rightarrow (1/.f)(x) = \frac{1}{f(x)}$.

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $A = \{\frac{1}{\omega} : \omega \in B\}$

$\Rightarrow$

$(1/.f) : D \to A$ reelle Funktion

$\wedge$ $(1/..f) : D \to A, \quad (1/.f)(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Im Speziellen gilt für $f : D \to B$ reelle Funktion:

$$\forall x : x \in D \wedge 0 = f(x) \Rightarrow 0 = (1/.f)(x),$$

$$\forall x : x \in D \wedge 0 = (1/.f)(x) \Rightarrow 0 = f(x).$$

so dass f und $(1/.f)$ die gleichen Nullstellen haben.

Die reziproke Funktion $(1/.f)$ von f ist von der inversen Relation f^{-1} von f zu unterscheiden. So ist $(1/.f)$ für $f : D \to B$ reelle Funktion stets eine Funktion, während dies für f^{-1} nur in Ausnahmefällen gilt.

Zur Unterscheidung von “$(1/.f)$” und “f^{-1}” ist auch folgender Satz hilfreich.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $(1/.f) = f^{-1}$

$\Leftrightarrow$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\wedge$ $f \circ f = \mathsf{rez}.$

Beweis siehe “**Exempla 1**” .

Die reziproke Funktion einer reellen Funktion ist auf jedem echten reellen Intervall, auf dem f stetig und$\neq 0$ ist, stetig.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow 0 \neq f(x)$

$\Rightarrow$

$(1/.f)$ stetig auf I

Ähnliches gilt bezüglich Differenzierbarkeit mit erwarteten Erweiterungen.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow 0 \neq f(x)$

$\Rightarrow$

f differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow (1/.f)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}.$

Beispiel (ohne Beweis) Sei $f = \sin$. Bei genauerer Betrachtung ergit sich mit Hilfe von Schulmathematik

$$\sin : \mathbb{R} \to [\,-1|1\,],$$

und offenbar gilt

$$A = \left\{\frac{1}{\omega} : \omega \in [\,-1|1\,]\right\} =]\,-\infty|-1\,] \cup \{0\} \cup [\,1|+\infty\,[,$$

so dass A, ohne selbst ein Intervall zu sein, die Vereinigung dreier reeller Intervalle ist. Es gilt somit

$$(1/.\sin) : \mathbb{R} \to]\,-\infty|-1\,] \cup \{0\} \cup [\,1|+\infty\,[, \quad (1/.\sin)(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

Die Nullstellen von $(1/.\sin)$ sind die ganzzahligen Vielfachen von π, $(1/.\sin)$ ist $2 \cdot \pi$-periodisch, $(1/.\sin)$ ist auf jedem Intervall $]\,n \cdot \pi|(1+n) \cdot \pi\,[$ mit $n \in \mathbb{Z}$ differenzierbar mit

$$\forall x, n : x \in]\,n \cdot \pi|(1+n) \cdot \pi\,[\wedge n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (1/.\sin)'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

$$\forall n : n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (1/.\sin)[\,]\,n \cdot \pi|(1+n) \cdot \pi\,[\,] = \begin{cases} [\,1|+\infty\,[& , \quad n \text{ gerade} \\ ]\,-\infty|-1\,] & , \quad n \text{ ungerade} \end{cases},$$

und falls n gerade, $n \in \mathbb{Z}$, so hat f in $\frac{1+2\cdot n}{2} \cdot \pi$ striktes Minimum auf $]\,n \cdot \pi|(1+n) \cdot \pi\,[$ mit $f(\frac{1+2\cdot n}{2} \cdot \pi) = 1$, und falls n ungerade, $n \in \mathbb{Z}$, so hat f in $\frac{1+2\cdot n}{2} \cdot \pi$ striktes Maximum auf $]\,n \cdot \pi|(1+n) \cdot \pi\,[$ mit $f(\frac{1+2\cdot n}{2} \cdot \pi) = -1$. $\square$(Beispiel)

9 $f. + .g$ - "Zwei Funktionen addieren"

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\Rightarrow$

$f. + .g$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(f. + .g) = (\mathsf{dom}\,f) \cap (\mathsf{dom}\,g)$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(f. + .g) = \{f(\omega) + g(\omega) : \omega \in (\mathsf{dom}\,f) \cap (\mathsf{dom}\,g)\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(f. + .g) \Rightarrow (f. + .g)(x) = f(x) + g(x).$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\Rightarrow$

$f. + .g : D \cap C \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $f. + .g : D \cap C \to \mathbb{R}, \quad (f. + .g)(x) = f(x) + g(x)$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(f. + .g) = \{f(\omega) + g(\omega) : \omega \in D \cap C\}.$

Es fällt auf, dass die Summe zweier reeller Funktionen nur für jene x definiert ist, die in beiden Definitionsbereichen liegen. Diese Aussage spielt auch bei Betrachtung der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit eine Rolle.

$\quad f$ reelle Funktion

$\wedge \quad g$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ stetig auf I

$\wedge \quad g$ stetig auf I

$\Rightarrow$

$\quad I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge \quad f. + .g$ stetig auf I.

Für die Ableitung der Summe zweier auf einem echten reellen Intervall differenzierbarer, reeller Funktionen gilt die erwartete Aussage.

$\quad f$ reelle Funktion

$\wedge \quad g$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad g$ differenzierbar auf I

$\Rightarrow$

$\quad I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge \quad f. + .g$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad \forall x : x \in I \Rightarrow (f. + .g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Beispiel (ohne Beweis) Falls $f = \exp$ und $g = \ln$, so gilt

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\ln :]0| + \infty[\to \mathbb{R},$$

so dass wegen $\mathbb{R} \cap]0| + \infty[=]0| + \infty[$,

$$\exp . + . \ln :]0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad (\exp . + . \ln)(x) = \exp x + \ln x,$$

und nicht ganz mühelos

$$\mathsf{ran}\,(\exp\,.+.\,\ln) = \mathbb{R},$$

und $\exp\,.+.\,\ln$ ist stetig und differenzierbar und

$$\forall x : x \in \,]0| + \infty[\, \Rightarrow (\exp\,.+.\,\ln)'(x) = \exp'(x) + \ln'(x) = \exp x + \frac{1}{x},$$

so dass $\exp\,.+.\,\ln$ streng wachsend ist. Hieraus, aus der Stetigkeit von $\exp\,.+.\,\ln$ und aus den nicht allzu schwer herzuleitenden Aussagen

$$\lim_{t\downarrow 0}(\exp t + \ln t) = -\infty, \quad \lim_{t\uparrow+\infty}(\exp t + \ln t) = +\infty,$$

folgt, dass es genau ein $t^* \in \,]0| + \infty[$ mit

$$\exp(t^*) + \ln(t^*) = 0,$$

gibt und wegen

$$0 < e = \exp 1 + \ln 1,$$

muss $0 < t^* < 1$ gelten. $\square$(Beispiel)

10 $f. \cdot .g$ - "Zwei Funktionen multiplizieren"

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\Rightarrow$

$f. \cdot .g$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(f. \cdot .g) = (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(f. \cdot .g) = \{f(\omega) \cdot g(\omega) : \omega \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(f. \cdot .g) \Rightarrow (f. \cdot .g)(x) = f(x) \cdot g(x).$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\Rightarrow$

$f. \cdot .g : D \cap C \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $f. \cdot .g : D \cap C \to \mathbb{R}, \quad (f. \cdot .g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(f. \cdot .g) = \{f(\omega) \cdot g(\omega) : \omega \in D \cap C\}.$

Es fällt auf, dass das Produkt zweier reeller Funktionen nur für jene x definiert ist, die in beiden Definitionsbereichen liegen. Diese Aussage spielt auch bei Betrachtung der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit eine Rolle.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ g stetig auf I

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $f. \cdot .g$ stetig auf I.

Für die Ableitung des Produkts zweier auf einem echten reellen Intervall differenzierbarer, reeller Funktionen gilt die erwartete Aussage.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ g differenzierbar auf I

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $f. \cdot .g$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow (f. \cdot .g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + +f(x) \cdot g'(x)$.

Beispiel (ohne Beweis) Falls $f = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ und $g = \mathsf{rez}$, so gilt

$$\mathsf{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\mathsf{rez} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

so dass

$$\mathsf{id}_{\mathbb{R}}.\cdot.\mathsf{rez} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}.\cdot.\mathsf{rez})(x) = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) \cdot \mathsf{rez}(x) = x \cdot \frac{1}{x} = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \neq x \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

und somit ganz mühelos

$$\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{R}}.\cdot.\mathsf{rez}) = \{0, 1\},$$

und $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}.\cdot.\mathsf{rez}$ ist stetig und differenzierbar auf $]-\infty|0[$ und auf $]0|+\infty[$ und

$$\begin{aligned} \forall x : 0 \neq x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\mathsf{id}_{\mathbb{R}}.\cdot.\mathsf{rez})'(x) &= (\mathsf{id}_{\mathbb{R}})'(x) \cdot \mathsf{rez}(x) + \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) \cdot \mathsf{rez}'(x) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{x} + x \cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

da interessanter Weise für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ gilt und wegen $x \in \mathbb{R}$ zunächst $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ und dann $\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$ gilt. $\square$(Beispiel)

11 $f.-.g$ - "Die Differenz zweier Funktionen bilden"

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & g \text{ reelle Funktion} \\
\Rightarrow & \\
 & f.-.g \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & \mathsf{dom}\,(f.-.g) = (\mathsf{dom}\,f) \cap (\mathsf{dom}\,g) \\
\wedge & \mathsf{ran}\,(f.-.g) = \{f(\omega) - g(\omega) : \omega \in (\mathsf{dom}\,f) \cap (\mathsf{dom}\,g)\} \\
\wedge & \forall x : x \in \mathsf{dom}\,(f.-.g) \Rightarrow (f.-.g)(x) = f(x) - g(x).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to B \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & g : C \to A \text{ reelle Funktion} \\
\Rightarrow & \\
 & f.-.g : D \cap \mathbb{C} \to \mathbb{R} \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & f.-.g : D \cap C \to \mathbb{R}, \quad (f.-.g)(x) = f(x) - g(x) \\
\wedge & \mathsf{ran}\,(f.-.g) = \{f(\omega) - g(\omega) : \omega \in D \cap C\}.
\end{array}
$$

Die Differenz zweier reeller Funktionen ist für jene x definiert, die in beiden Definitionsbereichen liegen. Gegenseitiges "punktweises" Abhschätzen reeller Funktionen läßt sich mit Hilfe der Differenz der Funktionen auf punktweises Abschätzen durch die Null zurückführen.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ $x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\Rightarrow$

$f(x) \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (f. - .g)(x) \leq 0$

$\wedge$ $f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (f. - .g)(x) < 0$

$\wedge$ $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (f. - .g)(x) = 0$

$\wedge$ $g(x) \leq f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq (f. - .g)(x)$

$\wedge$ $g(x) < f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < (f. - .g)(x)$.

Die Stetigkeit reeller Funktionen auf echten reellen Intervallen bleibt beim Übergang zur Differenz der Funktionen erhalten.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Interval

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ g stetig auf I

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $f. - .g$ stetig auf I.

Bezüglich Differenzierbarkeit der Differenz reeller Funktionen auf echten reellen Intervallen gilt Erwartetes.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Interval

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ g differenzierbar auf I

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $f. - .g$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow (f. - .g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

<u>**Beispiel**</u> (ohne Beweis) Falls $f = \sqrt{.}$ und $g = (.)^2$, so gilt

$$\sqrt{.} : [0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad \sqrt{.}(x) = \sqrt{x},$$

$$(.)^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.)^2(x) = x^2,$$

so dass

$$\sqrt{.}. - .(.)^2 : [0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad (\sqrt{.}. - .(.)^2)(x) = \sqrt{x} - x^2.$$

Auch gilt

$$\mathsf{ran}\, (\sqrt{.}. - .(.)^2) =] - \infty|b],$$

mit noch zu bestimmenden $b \in]0| + \infty[$. Offenbar gilt

$$\forall x : x \in [0|1] \Rightarrow x^2 \leq \sqrt{x},$$

so dass

$$\forall x : x \in [0|1] \Rightarrow 0 \leq (\sqrt{.}. - .(.)^2)(x),$$

und aus ähnlicher Überlegung folgt

$$\forall x : x \in]1| + \infty[\Rightarrow (\sqrt{.}. - .(.)^2)(x) < 0.$$

Da $\sqrt{.}$ und $(.)^2$ stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen sind und diese Definitionsbereichen echte reelle Intervalle sind, folgt aus dem bisher Gesagten, dass $\sqrt{.}. - .(.)^2$ stetig ist. Differenzierbarkeit von $\sqrt{.}. - .(.)^2$ ist auf $]0| + \infty[$ gegeben. Dort ist $\sqrt{.}. - .(.)^2$ beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$\forall x : x \in]0| + \infty[\Rightarrow (\sqrt{.}. - .(.)^2)'(x) = \sqrt{.}'(x) - \left((.)^2\right)'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 2 \cdot x,$$

$$\forall x : x \in]0| + \infty[0 \Rightarrow (\sqrt{.}. - .(.)^2)''(x) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x}^3} - 2.$$

Somit ist $\sqrt{.}. - .(.)^2$ auf $]0| + \infty[$ konkav, wegen der Stetigkeit ist $\sqrt{.}. - .(.)^2$ auf $[0| + \infty[$ konkav, die Ableitung von $\sqrt{.}. - .(.)^2$ ist streng fallend auf $]0| + \infty[$ und da offenbar

$$\lim_{t \downarrow 0} (\sqrt{.}. - .(.)^2)'(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t \uparrow +\infty} (\sqrt{.}. - .(.)^2)'(t) = -\infty,$$

und die Ableitung stetig auf $]0| + \infty[$ ist, gibt es genau ein $t^* \in]0| + \infty[$ mit

$$(\sqrt{.}. - .(.)^2)'(t^*) = 0,$$

nämlich $t^* \in]0| + \infty[$, so dass

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{t^*}} = 2 \cdot t^*,$$

also

$$\frac{1}{4} = (t^*)^{3/2},$$

so dass

$$t^* = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}.$$

Somit ist $\sqrt{.}. - .(.)^2$ streng wachsend auf $]0|t^*]$ - woraus, da $\sqrt{.}. - .(.)^2$ stetig ist, auch folgt: $\sqrt{.}. - .(.)^2$ streng wachsend auf $[0|t^*]$ - und $\sqrt{.}. - .(.)^2$ ist streng fallend auf $[t^*| + \infty[$. Demnach nimmt $\sqrt{.}. - .(.)^2$ das strikte globale Maximum in t^* an und es gilt

$$(\sqrt{.}. - .(.)^2)(t^*) = \sqrt{t^*} - (t^*)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{256}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[3]{4}}.$$

Damit gilt

$$b = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[3]{4}},$$

und somit

$$\mathsf{ran}\,(\sqrt{.}. - .(.)^2) =] - \infty|\frac{3}{4 \cdot \sqrt[3]{4}}].$$

$\square$(Beispiel)

12 $f./.g$ - "Den Quotienten zweier Funktionen bilden"

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\Rightarrow$

$(f./.g)$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(f./.g) = (\mathsf{dom}\, f) \cap (8\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(f./.g) = \left\{\frac{f(\omega)}{g(\omega)} : \omega \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)\right\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(f./.g) \Rightarrow (f./.g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\Rightarrow$

$f./.g : D \cap C \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $f./.g : D \cap C \to \mathbb{R}, \quad (f./.g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(f./.g) = \left\{\frac{f(\omega)}{g(\omega)} : \omega \in D \cap C\right\}$

$\wedge$ $f./.g = f. \cdot .(1/.g)$

Der Quotient zweier reeller Funktionen ist für jene x definiert, die in beiden Definitionsbereichen liegen. Entsprechend der Regel zur Division reeller Zahlen durch Null gilt

$$\forall x : x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) \wedge g(x) = 0 \Rightarrow (f./.g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{0} = 0,$$

so dass die Nullstellen von $(f./.g)$ genau die Nullstellen von f in $(\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$ *oder* die Nullstellen von g in $(\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$ sind.

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & g \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) \\
\Rightarrow & \\
 & (f./.g)(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = f(x) \vee 0 = g(x) \\
\wedge & 0 < (f./.g)(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \neq f(x) \wedge 0 \neq g(x) \wedge \mathsf{sgn}\,(f(x)) = \mathsf{sgn}\,(g(x)) \\
\wedge & (f./.g)(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \neq f(x) \wedge 0 \neq g(x) \wedge \mathsf{sgn}\,(f(x)) = -\mathsf{sgn}\,(g(x)) \\
 & \qquad\qquad \wedge -\mathsf{sgn}\,(f(x)) = \mathsf{sgn}\,(g(x)).
\end{array}
$$

Gegenseitiges “punktweises” Abhschätzen reeller Funktionen läßt sich, falls beide Fuktionen in den betrachteten Stellen positiv sind, mit Hilfe des Quotienten der Funktionen auf punktweises Abschätzen durch die Eins zurückführen.

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & g \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) \\
\Rightarrow & \\
 & 0 < f(x) \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) \wedge 0 < g(x) \wedge (f./.g)(x) \leq 1 \\
\wedge & 0 < f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) \wedge 0 < g(x) \wedge (f./.g)(x) < 1 \\
\wedge & 0 < g(x) \leq f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) \wedge 1 \leq (f./.g)(x) \\
\wedge & 0 < g(x) \leq f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < g(x) \wedge 1 \leq (f./.g)(x) \\
\wedge & 0 < g(x) < f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) \wedge 1 < (f./.g)(x) \\
\wedge & 0 < g(x) < f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < g(x) \wedge 1 < (f./.g)(x)
\end{array}
$$

Ähnlich wie bei der reziproken Funktion liegen bei der Division reeller Funktionen in Bezug auf Stetigkeit die Dinge abseits der Nullstellen des Nenners einfach.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ g stetig auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow 0 \neq g(x)$

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $f./.g$ stetig auf I.

Es erscheint die bekannte "Quotientenregel" des Differenzierens.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ g differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow 0 \neq g(x)$

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $f./.g$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow (f./.g)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'((x)}{g^2(x)}$.

Beispiel (ohne Beweis) Falls $g : C \to A$ reelle Funktion, so gilt

$$(1/.g) = (1^{on}R)./.g.$$

Es gilt im Speziellen $1^{on}\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $\mathbb{R} \cap C = C$, da $C \subseteq \mathbb{R}$, da $g : C \to A$ reelle Funktion ist. $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Falls $f = \ln$ und $g = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$, so folgt

$$\ln :]0| + \infty[\to \mathbb{R},$$

$$\mathsf{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

so dass

$$\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}} :]0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad (\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})(x) = \frac{\ln x}{x},$$

stetig und (beliebig oft) differenzierbar ist. Es gilt offenbar

$$\lim_{t\downarrow 0}(\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})(t) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{\ln t}{t} = -\infty,$$

und es gilt, wenn auch noch jenseits im Vorkurs gegenwärtiger Möglichkeiten,

$$\lim_{t\uparrow +\infty}(\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})(t) = \lim_{t\uparrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

Dennoch kann $\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ nicht wachsend sein - gilt doch

$$0 < \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e} = (\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})(e).$$

Genaueres ist durch die Ableitung

$$(\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})' :]0| + \infty[\to \mathbb{R},$$

$$(\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})'(x) = \frac{\ln'(x) \cdot \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x) - \ln x \cdot \mathsf{id}'_{\mathbb{R}}(x)}{\mathsf{id}^2_{\mathbb{R}}(x)} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

zu erfahren, bei deren Berechnung die für alle betrachteten x gültige Gleichung $\frac{x}{x} = 1$ eingesetzt wird. Es folgt für alle $x \in]0| + \infty[$,

$$0 < (\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})'(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < x < e,$$

$$(\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})'(x) < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad e < x,$$

so dass $(\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})$ dank Stetigkeit streng wachsend auf $]0|e]$ ist, streng fallend auf $[e| + \infty[$ ist, somit in e das strikte globale Maximum mit $(\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})(e) = \frac{1}{e}$ annimmt, und somit auch

$$\mathsf{ran}\,(\ln ./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}}) =] - \infty|\frac{1}{e}],$$

gilt. Es gilt

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1-\ln t}{t^2} = +\infty,$$

$$\lim_{t\uparrow +\infty} \frac{1-\ln t}{t^2} = 0.$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$\begin{aligned}
&(\ln./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})'' : \,]0|+\infty[\, \to \mathbb{R},\\
&\qquad (\ln./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}})''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2\cdot x}{x^4} = \frac{-x-2\cdot x\cdot(1-\ln x)}{x^4}\\
&\qquad\qquad = \frac{-1-2\cdot(1-\ln x)}{x^3} = \frac{-3+2\cdot \ln x}{x^3},
\end{aligned}$$

wobei hier die interessannter Weise für alle $x \in \mathbb{R}$ gültigen Gleichungen $\frac{1}{x}\cdot x^2 = x$ und $\frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$ eingesetzt wird. Via

$$\ln(e^{3/2}) = \frac{3}{2},$$

und Stetigkeit folgt: $\ln./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ konkav auf $]0|e^{3/2}]$, $\ln./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ konvex auf $[e^{3/2}|+\infty[$, $\ln./.\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ hat $\mp$-Wendepunkt in $e^{3/2}$. □(Beispiel)

13 $f \circ g$ - "Zwei reelle Funktionen verknüpfen"

Durch Spezialisierung allgemeiner Aussagen geweinnt man

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & g \text{ reelle Funktion} \\
\Rightarrow & \\
 & f \circ g \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & \mathsf{dom}\,(f \circ g) = g^{-1}[\mathsf{dom}\, f] \\
\wedge & \mathsf{ran}\,(f \circ g) = f[\mathsf{ran}\, g] \\
\wedge & \forall x : x \in \mathsf{dom}\,(f \circ g) \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)).
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to B \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & g : C \to A \text{ reelle Funktion} \\
\Rightarrow & \\
 & f \circ g : g^{-1}[D] \to B \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & f \circ g : g^{-1}[D] \to B, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) \\
\wedge & \mathsf{ran}\,(f \circ g) = f[\mathsf{ran}\, g].
\end{array}
$$

Hier ist die Bestimmung von $\mathsf{dom}\,(f \circ g) = g^{-1}[D]$ zugegebener Maßen pragmatisch wenig ansprechend. Besser ist die Merkregel

x genau dann im Definitionsbereich von $f \circ g$, wenn $g(x)$ im Definitionsbereich von f ist

Auch in die - einfachste - Aussage über die Stetigkeit von $f \circ g$ reeller Funktionen f und g muss man sich erst einlesen.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ J echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ g stetig auf J

$\wedge$ $g[J] \subseteq I$

$\Rightarrow$

$f \circ g$ stetig auf J.

Etwas vereinfachend als Merkregel:

f reelle Funktion, g reelle Funktion f stetig auf echtem reellen Intervall I, g stetig auf echtem reellen Intervall J, $g(x) \in I$ für jedes $x \in J$ $\quad\Rightarrow\quad$ $f \circ g$ stetig auf J

Bei der Differenzierbarkeit von $f \circ g$ reeller Funktionen f und g auf echten reellen Intervallen liegen, verglichen mit der Stetigkeit, die Dinge änlich, doch kaum einfacher.

$\quad f$ reelle Funktion

$\wedge \quad g$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad J$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad g$ differenzierbarer auf J

$\wedge \quad g[J] \subseteq I$

$\Rightarrow$

$\quad f \circ g$ differenzierbar auf J

$\wedge \quad \forall x : x \in J \Rightarrow (f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$

Etwas vereinfachend als Merkregel:

f reelle Funktion, g reelle Funktion f differenzierbar auf echtem reellen Intervall I, g differenzierbar auf echtem reellen Intervall J, $g(x) \in I$ für jedes $x \in J$ $\Rightarrow \quad f \circ g$ differenzierbar auf J $\wedge\ \forall x : x \in J \Rightarrow (f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Sind f und g *unterschiedliche* reelle Funktionen, so ist, wie an Hand folgender Beispiele dargelegt, mit $f \circ g \neq g \circ f$ zu rechnen. Andererseits gilt $\exp \neq \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$, doch

$$\exp \circ \mathsf{id}_{\mathbb{R}} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}} \circ \exp,$$

so dass die Frage “$f \circ g \neq g \circ f$ oder $f \circ g = g \circ f$?” offenbar nur durch individuelle Betrachtung der involvierten Funktionen zu entscheiden ist.

<u>**Beispiel**</u> (ohne Beweis) Seien $f = \exp$ und $g = \cos$. Dann ist

$$\exp \circ \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

(beliebig oft) differenzierbar mit

$$(\exp \circ \cos)' = \exp \circ \cos \,.\cdot.(-\sin),$$

$$(\exp \circ \cos)'' = \exp \circ \cos \,.\cdot.\, \sin^2 .-. \exp \circ \cos \,.\cdot.\, \cos,$$

oder lesefreundlicher,

$$(\exp \circ \cos)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (\exp \circ \cos)'(x) = \exp(\cos x) \cdot (-\sin x),$$

$$(\exp \circ \cos)'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (\exp \circ \cos)''(x) = \exp(\cos x) \cdot \sin^2(x) - \exp(\cos x) \cdot \cos x.$$

Offenbar ist $\exp \circ \cos$ $2 \cdot \pi$-periodisch mit

$$\mathsf{ran}\,(\exp \circ \cos) = [\frac{1}{e}|e],$$

$$\mathsf{ran}\,((\exp \circ \cos)') \subseteq [-e|e].$$

□(Beispiel)

<u>**Beispiel**</u> (ohne Beweis) Seien $f = \cos$ und $g = \exp$. Dann ist

$$\cos \circ \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

(beliebig oft) differenzierbar mit

$$(\cos \circ \exp)' = -\sin \circ \exp \,.\cdot.\, \exp,$$

$$(\cos \circ \exp)'' = -\cos \circ \exp \,.\cdot.\, \exp^2 .-. \sin \circ \exp \,.\cdot.\, \exp,$$

oder lesefreundlicher,

$$(\cos \circ \exp)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (\cos \circ \exp)'(x) = -\sin(\exp x) \cdot \exp x,$$

$$\begin{aligned}(\cos \circ \exp)'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (\cos \circ \exp)''(x) &= -\cos(\exp x) \cdot \exp^2 x - \sin(\exp x) \cdot \exp x \\ &= -\cos(\exp x) \cdot \exp(2 \cdot x) - \sin(\exp x) \cdot \exp x.\end{aligned}$$

$\boxed{\texttt{Thema0}}$ $\cos\circ\exp$ ist T periodisch.

`1`: Aus `Thema0` folgt: $T \in \,]0| + \infty[.$

`2`: Aus `Thema0` und aus "$\ln(\pi/2) \in \mathbb{R}$" folgt: $\cos(\exp(\ln(\pi/2))) = \cos(\exp(T + \ln(\pi/2))).$

`3`: Aus `2` folgt: $\cos(\pi/2) = \cos((\exp T) \cdot \pi/2).$

`4`: Aus `3` folgt: $0 = \cos((\exp T) \cdot \pi/2).$

`5`: Aus `4` folgt: $\exists n : n \in \mathbb{Z} \wedge \exp T = 1 + 2 \cdot n.$

`6`: Aus `1` folgt: $1 < \exp T.$

`7`: Aus `5`"$n \in \mathbb{Z} \wedge \exp T = 1 + 2 \cdot n$" und aus `6` folgt: $1 \le n \in \mathbb{N}.$

`8`: Aus `7` folgt: $\ln(\frac{\pi}{1+4\cdot n}) \in \mathbb{R}.$

`9`: Aus `Thema0` und aus `8` folgt: $\cos(\exp(\ln(\frac{\pi}{1+4\cdot n}))) = \cos(\exp(T + \ln(\frac{\pi}{1+4\cdot n}))).$

`10`: Aus `9` folgt: $\cos(\frac{\pi}{1+4\cdot n}) = \cos((\exp T) \cdot \frac{\pi}{1+4\cdot n}).$

`11`: Aus `10` und aus `5`"$\exp T = 1 + 2 \cdot n$" folgt: $\cos(\frac{\pi}{1+4\cdot n}) = \cos(\pi \cdot \frac{1+2\cdot n}{1+4\cdot n}).$

`12.1`: Aus `7` folgt: $0 < \frac{\pi}{1+4\cdot n} < \frac{\pi}{2}.$

`12.2`: Aus `7` folgt: $\frac{\pi}{2} < \pi \cdot \frac{1+2\cdot n}{1+4\cdot n} < \pi.$

`13.1`: Aus `12.1` folgt: $0 < \cos(\frac{\pi}{1+4\cdot n}).$

`13.2`: Aus `12.2` folgt: $-1 < \cos(\pi \cdot \frac{1+2\cdot n}{1+4\cdot n}) < 0.$

`14`: Aus `13.1` und aus `13.2` folgt: $0 < 0.$

`15`: Aus `14` folgt: $0 \neq 0.$

Ergo `Thema0`: `A1` | "$\cos\circ\exp$ ist T periodisch $\Rightarrow 0 \neq 0$"

`1`: Aus `A1` und aus "$0 = 0$" folgt: $\neg(\cos\circ\exp$ ist T periodisch$).$

Offenbar gilt

$$\mathsf{ran}\,(\cos\circ\exp) = \big[-1|1\big],$$

und die Grenzwerte

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \ln\left(\frac{1+4\cdot n}{2}\cdot\pi\right) = +\infty,$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\uparrow+\infty} (\cos\circ\exp)'\left(\ln\left(\frac{1+4\cdot n}{2}\cdot\pi\right)\right)\\
&\qquad = \lim_{n\uparrow+\infty}\left(-\sin\left(\frac{1+4\cdot n}{2}\cdot\pi\right)\right)\cdot\frac{1+4\cdot n}{2}\cdot\pi\\
&\qquad\qquad = \lim_{n\uparrow+\infty} -\frac{1+4\cdot n}{2}\cdot\pi = -\infty,
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \ln\left(\frac{3+4\cdot n}{2}\cdot\pi\right) = +\infty,$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\uparrow+\infty} (\cos\circ\exp)'\left(\ln\left(\frac{3+4\cdot n}{2}\cdot\pi\right)\right)\\
&\qquad = \lim_{n\uparrow+\infty}\left(-\sin\left(\frac{3+4\cdot n}{2}\cdot\pi\right)\right)\cdot\frac{3+4\cdot n}{2}\cdot\pi\\
&\qquad\qquad = \lim_{n\uparrow+\infty} \frac{3+4\cdot n}{2}\cdot\pi = +\infty,
\end{aligned}$$

deuten auf die - wahre - Aussage

$$\mathsf{ran}\,((\cos\circ\exp)') = \mathbb{R},$$

hin. □(Beispiel)

13.1 $|.| \circ f$ - "Den Betrag einer Funktion bilden"

In Zusammenführung bisher Gesagten gilt

---

f reelle Funktion

$\Rightarrow$

$|.| \circ f$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(|.| \circ f) = \mathsf{dom}\,f$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(|.| \circ f) = \{|f(\omega)| : \omega \in \mathsf{dom}\,f\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(|.| \circ f) \Rightarrow (|.| \circ f)(x) = |f(x)|.$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\Rightarrow$

$|.| \circ f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $|.| \circ f : D \to \mathbb{R}, \quad (|.| \circ f)(x) = |f(x)|$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(|.| \circ f) = \{|f(\omega)| : \omega \in D\}.$

---

sowie

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\Rightarrow$

$|.| \circ f$ stetig auf I.

---

und

$\quad f$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad \forall x : x \in I \Rightarrow 0 \neq f(x)$

$\Rightarrow$

$\quad |.| \circ f$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad \forall x : x \in I \Rightarrow (|.| \circ f)'(x) = \mathsf{sgn}\,(f(x)) \cdot f'(x).$

Bemerkenswerter Weise *kann* $|.| \circ f$ auch an Stellen x mit $f(x) = 0$ differenzierbar sein. Siehe übernächstes Beispiel.

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \sin$ gilt

$$|.| \circ \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (|.| \circ \sin)(x) = |\sin x|,$$

$|.| \circ \sin$ stetig, $\mathsf{ran}\,(|.| \circ \sin) = [0|1]$,

$$\forall n : n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \ |.| \circ \sin \text{ differenzierbar auf }]n \cdot \pi|(1+n) \cdot \pi[,$$

$$\forall n, x : n \in \mathbb{Z} \wedge x \in]n \cdot \pi|(1+n) \cdot \pi[\Rightarrow (|.| \circ \sin)'(x) = \mathsf{sgn}\,(\sin(x)) \cdot \cos x,$$

und für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $|.| \circ \sin$ wegen

$$\begin{aligned}\lim_{t \uparrow n \cdot \pi} \frac{|\sin t| - |\sin(n \cdot \pi)|}{t - n \cdot \pi} &= \lim_{t \uparrow n \cdot \pi} \frac{(-1)^{1+n} \cdot \sin t - 0}{t - n \cdot \pi} \\ &= \lim_{t \uparrow n \cdot \pi} \frac{(-1)^{1+n} \cdot \sin t - (-1)^{1+n} \cdot \sin(n \cdot \pi)}{t - n \cdot \pi} \\ &= (-1)^{1+n} \cdot \lim_{t \uparrow n \cdot \pi} \frac{\sin t - \sin(n \cdot \pi)}{t - n \cdot \pi} = (-1)^{1+n} \sin'(n \cdot \pi) \\ &= (-1)^{1+n} \cdot \cos(n \cdot \pi) = (-1)^{1+n} \cdot (-1)^n = -1,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow n\cdot\pi}\frac{|\sin t|-|\sin(n\cdot\pi)|}{t-n\cdot\pi} &= \lim_{t\downarrow n\cdot\pi}\frac{(-1)^n\cdot\sin t-0}{t-n\cdot\pi}\\ &= \lim_{t\downarrow n\cdot\pi}\frac{(-1)^n\cdot\sin t-(-1)^n\cdot\sin(n\cdot\pi)}{t-n\cdot\pi}\\ &= (-1)^n\cdot\lim_{t\downarrow n\cdot\pi}\frac{\sin t-\sin(n\cdot\pi)}{t-n\cdot\pi} = (-1)^n\sin'(n\cdot\pi)\\ &= (-1)^n\cdot\cos(n\cdot\pi) = (-1)^n\cdot(-1)^n = 1,\end{aligned}$$

in $n\cdot\pi$ *nicht* differenzierbar. □(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Mt $f=(.)^3$ gilt

$$|.|\circ(.)^3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (|.|\circ(.)^3)(x)=|x^3|,$$

$|.|\circ(.)^3$ stetig, $\mathsf{ran}\,(|.|\circ(.)^3)=[0|+\infty[$,

$$|.|\circ(.)^3 \text{ differenzierbar auf }]-\infty|0[,$$

$$|.|\circ(.)^3 \text{ differenzierbar auf }]0|+\infty[,$$

$$\begin{aligned}&\forall x: 0\neq x\in\mathbb{R}\Rightarrow\\ &\qquad(|.|\circ(.)^3)'(x)=\mathsf{sgn}\,(x^3)\cdot 3\cdot x^2=\mathsf{sgn}\,(x)\cdot 3\cdot x^2=3\cdot\mathsf{sgn}\,x\cdot x^2\\ &\qquad\qquad=3\cdot\mathsf{sgn}\,(x)\cdot x\cdot x=3\cdot|x|\cdot x=3\cdot x\cdot|x|,\end{aligned}$$

da für alle reellen x offenbar $\mathsf{sgn}\,(x^3)=\mathsf{sgn}\,x$. Jedoch ist $|.|\circ(.)^3$ wegen

$$\lim_{t\to 0}\frac{|t^3|-|0^3|}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|\cdot|t|^2-0}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\cdot|t|}{t}=\lim_{t\to 0}t\cdot|t|=0,$$

- die Gleichungen $|t|^2=t^2$ und $\frac{t^2\cdot|t|}{t}=t\cdot|t|$ sind für alle reellen t richtig - auch in $x=0$ differenzierbar und es folgt wegen $3\cdot 0\cdot|0|=0$,

$$(|.|\circ(.)^3)':\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (|.|\circ(.)^3)'(x)=3\cdot x\cdot|x|.$$

□(Beispiel)

13.2 $|.|\circ(f.-.g)$ - “Die Abstandsfunktion zweier Funktionen bilden”

Um wie in der Schulmathematik den (nicht-orientierten) Flächeninhalt jenes Bereichs zu bestimmen, der von zwei Parallelen der y-Achse und zwei reellen Funktionen f,g begrenzt wird, ist es erforderlich, “die Funktion $|f.-.g|$” zu ermitteln.

Mathematisch präziser handelt es sich um die Funktion $|.| \circ (f. - .g)$, die hier kurz besprochen werden soll.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\Rightarrow$

$|.| \circ (f. - .g)$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(|.| \circ (f. - .g)) = (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(|.| \circ (f. - .g)) = \{|f(\omega) - g(\omega)| : \omega \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(|.| \circ (f. - .g)) \Rightarrow (|.| \circ (f. - .g))(x) = |f(x) - g(x)|.$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\Rightarrow$

$|.| \circ (f. - .g) : D \cap C \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $|.| \circ (f. - .g) : D \cap C \to \mathbb{R} \quad , (|.| \circ (f. - .g))(x) = |f(x) - g(x)|$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(|.| \circ (f. - .g)) = \{|f(\omega) - g(\omega)| : \omega \in D \cap C\}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(|.| \circ (f. - .g)) \subseteq [0| + \infty[.$

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ $x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\Rightarrow$

$f(x) \neq g(x) \Leftrightarrow 0 < |f(x) - g(x)|$

$\wedge$ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = |f(x) - g(x)|.$

Die Abstandsfunktion reeller Funktionen ist stetig auf echten reellen Intervallen, auf denen die betrachteten Funktionen stetig sind.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ g stetig auf I

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $|.| \circ (f. - .g)$ stetig auf I.

Bei der Untersuchung der Differenzierbarkeit von $|.| \circ (f. - .g)$ reeller Funktionen f, g auf echten reellen Intervallen ist nicht nur von der dortigen Differenzierbarkeit von f, g auszugehen, sondern auch auf die fehlende Differenzierbarkeit von $|.|$ in 0 zu achten.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ g differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in E \Rightarrow f(x) \neq g(x)$

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $|.| \circ (f. - .g)$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow (|.| \circ (f. - .g))'(x) = \mathsf{sgn}\,(f(x) - g(x)) \cdot (f'(x) - g'(x))$.

<u>**Beispiel**</u> (ohne Beweis) Seien $f = \sqrt{.}$ und $g = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$. Dann gilt

$$|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R) : [0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad (|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R))(x) = |\sqrt{x} - x|,$$

$|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R)$ stetig, $\sqrt{.}$ differenzierbar auf $]0| + \infty[$, $\mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ differenzierbar, $\sqrt{x} = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(x)$ für $x = 0, 1$. Es folgt mit zweimaliger Anwendung des vorherigen Satzes,

$$|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R) \text{ differenzierbar auf }]0|1[,$$

$$|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R) \text{ differenzierbar auf }]1| + \infty[,$$

und

$$\begin{aligned}
&\forall x : 1 \neq x \in]0| + \infty[\Rightarrow \\
&\qquad (|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R))'(x) = \mathsf{sgn}\,(\sqrt{x} - x) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 1 \right) \\
&\qquad = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} - 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} & , \quad 1 < x \end{cases} .
\end{aligned}$$

Auch gilt mit Hilfe den später noch kennen zu lernenden Regeln von Bernoulli-l'Hospital

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \uparrow 1} \frac{(|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R))(t) - (|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R))(1)}{t - 1} \\
&\qquad = \lim_{t \uparrow 1} \frac{|\sqrt{t} - t| - |0|}{t - 1} = \lim_{t \uparrow 1} \frac{\sqrt{t} - t}{t - 1} \overset{\text{BlH}}{=} \lim_{t \uparrow 1} \frac{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}} - 1}{1} \\
&\qquad = \frac{\frac{1}{2} - 1}{1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \uparrow 1} \frac{(|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R))(t) - (|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_R))(1)}{t - 1} \\
&\qquad = \lim_{t \uparrow 1} \frac{|\sqrt{t} - t| - |0|}{t - 1} = \lim_{t \uparrow 1} \frac{-(\sqrt{t} - t)}{t - 1} = \lim_{t \uparrow 1} \frac{-(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}} - 1)}{1} \\
&\qquad = \frac{-(\frac{1}{2} - 1)}{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

so dass $|.| \circ (\sqrt{.}. - .\mathsf{id}_{\mathbb{R}})$ *nicht* differenzierbar in 1 ist. $\square$(Beispiel)

13.3 $\max\{f(.), g(.)\}$ und $\max\{m, f(.)\}$

Offenbar kann das Maximum zweier reeller Zahlen mit Hilfe der Funktion $[.]^+$ ermittelt werden.

Satz - $\max[.]^+$

$x \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

a) $\max\{x, y\} = x + [y - x]^+$.

b) $\max\{x, y\} = y + [x - y]^+$.

Beweis a) VS $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$

1: Aus VS folgt: $x \leq y \vee y < x$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \leq y$.

2.1: Aus `1.1.Fall` folgt: $\max\{x, y\} = y$.

2.2: Aus `1.1.Fall` und aus VS folgt: $0 \leq y - x$.

2.3: Aus VS folgt: $y - x \in \mathbb{R}$.

2.4: Aus VS folgt: $x + (y - x) = y$.

3: Aus 2.2 und aus 2.3 folgt: $[y - x]^+ = y - x$.

4: $\max\{x, y\} \stackrel{2.1}{=} y \stackrel{2.4}{=} x + (y - x) \stackrel{3}{=} x + [y - x]^+$.

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $y < x$.

`2.1`: Aus `1.2.Fall` folgt: $\max\{x, y\} = x$.

`2.2`: Aus `1.2.Fall` und aus VS folgt: $y - x < 0$.

`2.3`: Aus VS folgt: $y - x \in \mathbb{R}$.

`2.4`: Aus VS folgt: $x + 0 = x$.

`3`: Aus `2.2` und aus `2.3` folgt: $|y - x]^+ = 0$.

`4`: $\max\{x, y\} \stackrel{2.1}{=} x \stackrel{2.4}{=} x + 0 \stackrel{3}{=} x + |y - x]^+$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $\max\{x, y\} = x + |y - x]^+$.

`b)` VS $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$.

`1`: Aus VS folgt: $y \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}$.

`2`: Aus `1` folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\max\{y, x\} = y + [x - y]^+$.

`3`: Es gilt: $\max\{x, y\} = \max\{y, x\}$.

`4`: Aus `3` und aus `2` folgt: $\max\{x, y\} = y + [x - y]^+$.

$\square$

Nun kann mit Hilfe von $[.]^+$ jene Funktion angegeben werden, die jedem geeigneten x das Maximum von $f(x)$ und $g(x)$ reeller Funktionen f, g zuordnet.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\Rightarrow$

$\max\{f(.), g(.)\} = f. + .([.]^+ \circ (g. - .f))$

$\wedge$ $\max\{f(.), g(.)\}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(\max\{f(.), g(.)\}) = (\mathsf{dom}\,f) \cap (\mathsf{dom}\,g)$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\max\{f(.), g(.)\}) = \{\max\{f(\omega), g(\omega)\} : \omega \in (\mathsf{dom}\,f) \cap (\mathsf{dom}\,g)\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(\max\{f(.), g(.)\}) \Rightarrow$

$$\max\{f(.), g(.)\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) & , & f(x) \leq g(x) \\ f(x) & , & g(x) \leq f(x) \end{array} \right. .$$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\Rightarrow$

$\max\{f(.), g(.)\} : D \cap C \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\max\{f(.), g(.)\} : D \cap C \to \mathbb{R},$

$$\max\{f(.), g(.)\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \left\{ \begin{array}{lcl} g(x) & , & f(x) \leq g(x) \\ f(x) & , & g(x) \leq f(x) \end{array} \right. .$$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\max\{f(.), g(.)\}) = \{\max\{f(\omega), g(\omega)\} : \omega \in D \cap C\}.$

Auf Grund der Gleichung $\max\{f(.), g(.)\} = f.{+}.([.]^{+}\circ(g.{-}.f))$ ist $\max\{f(.), g(.)\}$ uaf jenen echten reellen Intervallen stetig, auf denen die reellen Funktionen f, g stetig sind.

$\quad$ f reelle Funktion

$\wedge$ $\quad$ g reelle Funktion

$\wedge$ $\quad$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ $\quad$ f stetig auf I

$\wedge$ $\quad$ g stetig auf I

$\Rightarrow$

$\quad$ $I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $\quad$ $\max\{f(.), g(.)\}$ stetig auf I.

Ähnlich folgt mit Hilfe der Gleichung $\max\{f(.), g(.)\} = f. + .([.]^+ \circ (g. - .f))$ ein erwartetes Resultat über die Differenzierbarkeit. Zur Erinnerung: $[.]^+$ nicht differenzierbar in 0.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ g differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow f(x) \neq g(x)$

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $\max\{f(.), g(.)\}$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow$

$$\begin{aligned}(\max\{f(.), g(.)\})'(x) &= f'(x) + ([.]^+)'(f(x) - g(x)) \cdot (g'(x) - f'(x)) \\ &= \begin{cases} g'(x) & , \quad f(x) < g(x) \\ f'(x) & , \quad g(x) < f(x) \end{cases}.\end{aligned}$$

<u>**Beispiel**</u> (ohne Beweis) Mit $f = \mathsf{rez}$ und $g = \mathsf{id}_{\mathbb{R}}$ gilt

$$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \leq -1 \\ x & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad 0 < x \leq 1 \\ x & , \quad 1 \leq x \end{cases},$$

so dass

$$\mathsf{ran}\,(\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}) = [\,-1| + \infty\,[,$$

$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ hat in -1 striktes globales Minimum
mit $\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}(-1) = -1$,
$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ hat in 1 striktes Minimum auf $]\,0| + \infty\,[$
mit $\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}(1) = 1$,
$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ stetig auf $]\,-\infty|0\,[$,
$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ stetig auf $]\,0| + \infty\,[$,
$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ unstetig in 0,
$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ differenzierbar auf $]\,-\infty| -1\,[$,

$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ differenzierbar auf $]-1|0[$,
$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ differenzierbar auf $]0|1[$,
$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ differenzierbar auf $]1|+\infty[$ und

$$(\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\})'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & , \quad x < -1 \\ 1 & , \quad -1 < x < 0 \\ -\frac{1}{x^2} & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad 1 < x \end{cases} ,$$

$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ nicht differenzierbar in -1,
$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ nicht differenzierbar in 0,
$\max\{\mathsf{rez}(.), \mathsf{id}_{\mathbb{R}}(.)\}$ nicht differenzierbar in 1. $\square$(Beispiel)

Ein Spezialfall liegt vor, wenn eine reelle Funktion f mit einer konstanten Funktion $m^{on}\mathbb{R}$ mit $m \in \mathbb{R}$ verglichen wird. Dann gilt

$$\forall x : x \in \mathsf{dom}\, f \Rightarrow \max\{f(.), m^{on}\mathbb{R}(.)\}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad m \leq f(x) \\ m & , \quad f(x) \leq m \end{cases} ,$$

so dass die "Mindestausgabe" gleich m ist. In etwas gefälligerer Notation ergibt sich

---

f reelle Funktion

$\wedge$ $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\max\{m, f(.)\} = m^{on}\mathbb{R}. + .[.]^{+} \circ (f. - .m^{on}\mathbb{R})$

$\wedge$ $\max\{m, f(.)\}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(\max\{m, f(.)\}) = \mathsf{dom}\, f$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\max\{m, f(.)\}) = \{\max\{m, f(\omega)\} : \omega \in \mathsf{dom}\, f\}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\max\{m, f(.)\}) \subseteq [m|+\infty[$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(\max\{m, f(.)\}) \Rightarrow$

$$\max\{m, f(.)\}(x) = \max\{m, f(x)\} = \begin{cases} f(x) & , \quad m \leq f(x) \\ m & , \quad f(x) \leq m \end{cases} .$$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\max\{m, f(.)\} : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\max\{m, f(.)\} : D \to \mathbb{R}, \quad \max\{m, f(.)\}(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad m \leq f(x) \\ m & , \quad f(x) \leq m \end{cases}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\max\{m, f(.)\}) = \{\max\{m, f(\omega)\} : \omega \in D\}$.

Auch gilt

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\max\{m, f(.)\}$ stetig auf I.

---

sowie

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f auf I differenzierbar

$\wedge$ $m \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow m \neq f(x)$

$\Rightarrow$

$\max\{m, f(.)\}$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow (\max\{m, f(.)\})'(x) = \begin{cases} f'(x) & , \quad m < f(x) \\ 0 & , \quad f(x) < m \end{cases}.$

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \sin$ und $m = 0$ gilt

$$\max\{0, \sin(.)\} = \begin{cases} \sin x & , \quad 0 < \sin x \\ 0 & . \quad \sin x \leq 0 \end{cases},$$

so dass

$$\mathsf{ran}\,(\max\{0, \sin(.)\}) = [0|1],$$

$\max\{0, \sin(.)\}$ stetig,

$$\forall n, x : n \in \mathbb{Z} \wedge (1 + 2 \cdot n) \cdot \pi \leq x \leq (2 + 2 \cdot n) \cdot \pi \Rightarrow$$
$$\max\{0, \sin(.)\} \text{ hat in } x \text{ globales Minimum mit } \max\{0, \sin(.)\}(x) = 0,$$

$$\forall n : n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\max\{0, \sin(.)\} \text{ hat in } \tfrac{1+4\cdot n}{2} \cdot \pi \text{ striktes globales Maximum}$$
$$\text{mit } \max\{0, \sin(.)\}(\tfrac{1+4\cdot n}{2} \cdot \pi) = 1,$$

$\max\{0, \sin(.)\}$ stetig,

$$\forall n : n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \max\{0, \sin(.)\} \text{ differenzierbar auf }]n \cdot \pi|(1 + n) \cdot \pi[,$$

und

$$\forall n, x : n \in \mathbb{Z} \wedge 2 \cdot n \cdot \pi < x < (1 + 2 \cdot n) \cdot \pi \Rightarrow (\max\{0, \sin(.)\})'(x) = \cos x,$$

und

$$\forall n, x : n \in \mathbb{Z} \wedge (-1 + 2 \cdot n) \cdot \pi < x < 2 \cdot n \cdot \pi \Rightarrow (\max\{0, \sin(.)\})'(x) = 0,$$

und $\forall n : n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \max\{0, \sin(.)\}$ nicht differenzierbar in $n \cdot \pi$. $\square$(Beispiel)

13.4 $\min\{f(.), g(.)\}$ und $\min\{M, f(.)\}$

Das Minimum zweier reeller Zahlen mit Hilfe der Funktion $[.]^-$ ermittelt werden.

Satz - $\min[.]^-$

$x \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

a) $\min\{x, y\} = x - [y - x]^-$.

b) $\min\{x, y\} = y - [x - y]^-$.

Beweis a) VS $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$

1: Aus VS folgt: $x \leq y \vee y < x$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \leq y$.

2.1: Aus 1.1.Fall folgt: $\min\{x, y\} = x$.

2.2: Aus 1.1.Fall und aus VS folgt: $0 \leq y - x$.

2.3: Aus VS folgt: $y - x \in \mathbb{R}$.

2.4: Aus VS folgt: $x - 0 = x$.

3: Aus 2.2 und aus 2.3 folgt: $[y - x]^- = 0$.

4: $\min\{x, y\} \stackrel{2.1}{=} x \stackrel{2.4}{=} x - 0 \stackrel{3}{=} x - [y - x]^-$.

...

`1.2.Fall` $\qquad y < x.$

`2.1:` Aus `1.2.Fall` folgt: $\qquad \min\{x, y\} = y.$

`2.2:` Aus `1.2.Fall` und aus VS folgt: $\qquad y - x < 0.$

`2.3:` Aus VS folgt: $\qquad y - x \in \mathbb{R}.$

`2.4:` Aus VS folgt: $\qquad x + (y - x) = y.$

`3:` Aus `2.2` und aus `2.3` folgt: $\qquad |y - x]^- = -(y - x).$

`4:` $\min\{x, y\} \stackrel{2.1}{=} y \stackrel{2.4}{=} x + (y - x) = x - (-(y - x))$
$\stackrel{3}{=} x - |y - x]^-.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\qquad \min\{x, y\} = x - |y - x]^-.$

`b)` VS $x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus VS folgt: $\qquad y \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}.$

`2:` Aus `1` folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\qquad \min\{y, x\} = y - [x - y]^-.$

`3:` Es gilt: $\qquad \min\{x, y\} = \min\{y, x\}.$

`4:` Aus `3` und aus `2` folgt: $\qquad \min\{x, y\} = y - [x - y]^-.$

$\square$

Nun kann mit Hilfe von $[.]^-$ jene Funktion angegeben werden, die jedem geeigneten x das Minimum von $f(x)$ und $g(x)$ reeller Funktionen f, g zuordnet.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\Rightarrow$

$\min\{f(.), g(.)\} = f. - .([.]^- \circ (g. - .f))$

$\wedge$ $\min\{f(.), g(.)\}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(\min\{f(.), g(.)\}) = (\mathsf{dom}\,f) \cap (\mathsf{dom}\,g)$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\min\{f(.), g(.)\}) = \{\min\{f(\omega), g(\omega)\} : \omega \in (\mathsf{dom}\,f) \wedge (\mathsf{dom}\,g)\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(\min\{f(.), g(.)\}) \Rightarrow$

$$\min\{f(.), g(.)\}(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & , \quad f(x) \leq g(x) \\ g(x) & , \quad g(x) \leq f(x) \end{cases} .$$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\Rightarrow$

$\min\{f(.), g(.)\} : D \cap C \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\min\{f(.), g(.)\} : D \cap C \to \mathbb{R},$

$$\min\{f(.), g(.)\}(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & , \quad f(x) \leq g(x) \\ g(x) & , \quad g(x) \leq f(x) \end{cases}$$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\min\{f(.), g(.)\}) = \{\min\{f(\omega), g(\omega)\} : \omega \in D \cap C\}.$

Auf Grund der Gleichung $\min\{f(.), g(.)\} = f.-.([.]^{-} \circ (g.-.f))$ ist $\min\{f(.), g(.)\}$ uaf jenen echten reellen Intervallen stetig, auf denen die reellen Funktionen f, g stetig sind.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ g stetig auf I

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $\min\{f(.), g(.)\}$ stetig auf I.

Ähnlich folgt mit Hilfe der Gleichung $\min\{f(.), g(.)\} = f. - .([.]^{-} \circ (g. - .f))$ ein erwartetes Resultat über die Differenzierbarkeit. Zur Erinnerung: $[.]^{-}$ nicht differenzierbar in 0.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ g differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow f(x) \neq g(x)$

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\wedge$ $\min\{f(.), g(.)\}$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow$

$$\begin{aligned}(\min\{f(.), g(.)\})'(x) &= f'(x) - ([.]^{-})'(f(x) - g(x)) \cdot (g'(x) - f'(x)) \\ &= \begin{cases} f'(x) & , \quad f(x) < g(x) \\ g'(x) & , \quad g(x) < f(x) \end{cases}.\end{aligned}$$

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f : D \to B$ reelle Funktion und $g = (-1) \cdot .f$ gilt $g : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$$g : D \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -f(x),$$

so dass

$$\forall x : x \in D \Rightarrow \min\{f(.), (-1) \cdot .f(.)\} = \begin{cases} f(x) & , \quad f(x) \leq -f(x) \\ -f(x) & , \quad -f(x) \leq f(x), \end{cases},$$

also

$$\forall x : x \in D \Rightarrow \min\{f(.), (-1) \cdot .f(.)\} = \begin{cases} f(x) & , \quad f(x) \leq 0 \\ -f(x) & , \quad 0 \leq f(x), \end{cases},$$

und es ist unschwer

$$\min\{f(.), (-1) \cdot .f(.)\} = (-1) \cdot .(|.| \circ f),$$

also

$$\min\{f(.), (-1) \cdot .f(.)\} : D \to \mathbb{R}, \quad \min\{f(.), (-1) \cdot .f(.)\}(x) = -|f(x)|,$$

mit

$$\mathsf{ran}\,(\min\{f(.), (-1) \cdot .f(.)\}) = \{-|f(\omega)| : \omega \in D\},$$

zu erkennen. $\square$(Beispiel)

Ein Spezialfall liegt vor, wenn eine reelle Funktion f mit einer konstanten Funktion $M^{on}\mathbb{R}$ mit $M \in \mathbb{R}$ verglichen wird. Dann gilt

$$\forall x : x \in \mathsf{dom}\, f \Rightarrow \min\{f(.), M^{on}\mathbb{R}(.)\}(x) = \begin{cases} M & , \quad M \leq f(x) \\ f(x) & , \quad f(x) \leq M \end{cases},$$

so dass die "Höchstausgabe" gleich M ist. In etwas gefälligerer Notation ergibt sich

---

f reelle Funktion

$\wedge$ $M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\min\{M, f(.)\} = M^{on}\mathbb{R}. - .[.]^{-} \circ (f. - .M^{on}\mathbb{R})$

$\wedge$ $\min\{M, f(.)\}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(\min\{M, f(.)\}) = \mathsf{dom}\, f$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\min\{M, f(.)\}) = \{\min\{M, f(\omega)\} : \omega \in \mathsf{dom}\, f\}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\min\{M, f(.)\}) \subseteq [-\infty | M[$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(\min\{M, f(.)\}) \Rightarrow$

$$\min\{M, f(.)\}(x) = \min\{M, f(x)\} = \begin{cases} M & , \quad M \leq f(x) \\ f(x) & , \quad f(x) \leq M \end{cases}.$$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\min\{M, f(.)\} : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\min\{M, f(.)\} : D \to \mathbb{R}, \quad \min\{M, f(.)\}(x) = \begin{cases} M & , \quad M \leq f(x) \\ f(x) & , \quad f(x) \leq M \end{cases}$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\min\{M, f(.)\}) = \{\min\{M, f(\omega)\} : \omega \in D\}$.

Auch gilt

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\min\{M, f(.)\}$ stetig auf I.

---

sowie

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & I \text{ echtes reelles Intervall} \\
\wedge & f \text{ auf } I \text{ differenzierbar} \\
\wedge & M \in \mathbb{R} \\
\wedge & \forall x : x \in I \Rightarrow M \neq f(x) \\
\Rightarrow & \\
 & \min\{M, f(.)\} \text{ differenzierbar auf } I \\
\wedge & \forall x : x \in I \Rightarrow (\min\{M, f(.)\})'(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & , & M < f(x) \\ f'(x) & , & f(x) < M \end{array} \right. .
\end{array}
$$

<u>**Beispiel**</u> (ohne Beweis) Mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 + 3 \cdot x,$$

und $M = 1$ gilt

$$\min\{1, f(.x)\} = \left\{ \begin{array}{rcl} 2 + 3 \cdot x & , & 2 + 3 \cdot x \leq 1 \\ 1 & , & 1 \leq 2 + 3 \cdot x \end{array} \right. ,$$

also

$$\min\{1, f(.)\} = \left\{ \begin{array}{rcl} 2 + 3 \cdot x & , & x \leq -1/3 \\ 1 & ., & -1/3 \leq x \end{array} \right. ,$$

so dass

$$\mathsf{ran}\,(\min\{1, f(.)\}) =]-\infty|1],$$

$\min\{1, f(.)\}$ stetig,

$$\forall x : -\frac{1}{3} \leq x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\min\{1, f(.)\} \text{ hat in } x \text{ globales Maximum mit } \min\{1, f(.)\}(x) = 1,$$

$\min\{1, f(.)\}$ differenzierbar auf $]-\infty|-\frac{1}{3}[$,
$\min\{1, f(.)\}$ differenzierbar auf $]-\frac{1}{3}|+\infty[$ mit

$$(\min\{1, f(.)\})'(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & , & -1/3 < x \\ 3 & , & x < -1/3 \end{array} \right. ,$$

und $\min\{1, f(.)\}$ nicht differenzierbar in $-\frac{1}{3}$. $\square$(Beispiel)

13.5 $\max\{f(.),\min\{g(.),h(.)\}\}$ und $\max\{m,\min\{M,f(.)\}\}$

Die Konstruktionen der beiden vorherigen Teil-Abschnitte sind kombinierbar, um für reelle Funktionen ein "Abschneiden nach unten" und ein "Abschneiden nach oben" zu bewerkstelligen. Vereinfachend sei für reelle Funktionen f, g, h,

$$\max\{f(.),\min\{g(.),h(.)\}\} = \max\{f(.),\min\{g(.),h(.)\}(.)\}.$$

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ h reelle Funktion

$\Rightarrow$

$\max\{f(.),\min\{g(.),h(.)\}\}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{dom}\,(\max\{f(.),\min\{g(.),h(.)\}\}) = (\mathsf{dom}\,f)\cap((\mathsf{dom}\,g)\cap(\mathsf{dom}\,h))$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\max\{f(.),\min\{g(.),h(.)\}\})$
$= \{\max\{f(\omega),\min\{g(\omega),h(\omega)\}\} : \omega\in(\mathsf{dom}\,f)\cap((\mathsf{dom}\,g)\cap(\mathsf{dom}\,h))\}$

$\wedge$ $\forall x : x\in\mathsf{dom}\,(\max\{f(.),\min\{g(.),h(.)\}\}) \Rightarrow$

$\max\{f(.),\min\{g(.),h(.)\}\}(x)$

$$= \max\{f(x),\min\{g(x),h(x)\}\} = \begin{cases} g(x) & , \quad f(x)\le g(x)\le h(x) \\ h(x) & , \quad f(x)\le h(x)\le g(x) \\ f(x) & , \quad g(x)\le f(x)\le h(x) \\ h(x) & , \quad g(x)\le h(x)\le f(x) \\ f(x) & , \quad h(x)\le f(x)\le g(x) \\ g(x) & , \quad h(x)\le g(x)\le f(x) \end{cases}.$$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\wedge$ $h : E \to W$ reelle Funktion

$\Rightarrow$

$\max\{f(.), \min\{g(.), h(.)\}\} : D \cap (C \cap E) \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\max\{f(.), \min\{g(.), h(.)\}\} : D \cap (C \cap E) \to \mathbb{R}$,

$$\max\{f(.), \min\{g(.), h(.)\}\}(x) = (\max\{f(.), \min\{g(.), h(.)\}\})(x) = \begin{cases} g(x) & , \ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ h(x) & , \ f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ f(x) & , \ g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ h(x) & , \ g(x) \leq h(x) \leq f(x) \\ f(x) & , \ h(x) \leq f(x) \leq g(x) \\ g(x) & , \ h(x) \leq g(x) \leq f(x) \end{cases},$$

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\max\{f(.), \min\{g(.), h(.)\}\}) = \{\max\{f(\omega), \min\{g(\omega), h(\omega)\}\} : \omega \in D \cap (C \cap E)\}$.

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ h reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ g stetig auf I

$\wedge$ h stetig auf I

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap ((\mathsf{dom}\, g) \cap (\mathsf{dom}\, h))$

$\wedge$ $\max\{f(.), \min\{g(.), h(.)\}\}$ stetig auf I.

Beweis (ohne Beweis) Mit $f = \mathsf{sgn}$ und $g = \mathsf{rez}$ und $h = |.|$ gilt mit Hilfe vorherigen Satzes:

$$\max\{\mathsf{sgn}\,,\min\{\mathsf{rez},|.|\}\} \text{ stetig auf }]-\infty|0[,$$

$$\max\{\mathsf{sgn}\,,\min\{\mathsf{rez},|.|\}\} \text{ stetig auf }]0|+\infty[.$$

□(Beispiel)

---

f reelle Funktion

$\wedge$ g reelle Funktion

$\wedge$ h reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ g differenzierbar auf I

$\wedge$ h differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow f(x) \neq g(x) \wedge g(x) \neq h(x) \wedge h(x) \neq f(x).$

$\Rightarrow$

$I \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \cap ((\mathsf{dom}\, g) \cap (\mathsf{dom}\, h))$

$\wedge$ $\max\{f(.), \min\{g(.), h(.)\}\}$ differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow$

$$(\max\{f(.), \min\{g(.), h(.)\}\})'(x) = \begin{cases} g'(x) & , \quad f(x) < g(x) < h(x) \\ h'(x) & , \quad f(x) < h(x) < g(x) \\ f'(x) & , \quad g(x) < f(x) < h(x) \\ h'(x) & , \quad g(x) < h(x) < f(x) \\ f'(x) & , \quad h(x) < f(x) < g(x) \\ g'(x) & , \quad h(x) < g(x) < f(x) \end{cases}$$

Ein Spezialfall liegt vor, wenn zwei der drei beteiligten reellen Funktionen konstant sind. Vereinfachend notiert sei

$$\max\{m, \min\{M, f(.)\}\} = \max\{m^{on}\mathbb{R}(.), \min\{M^{on}\mathbb{R}(.), f(.)\}\}.$$

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad m \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}$ reelle Funktion

$\wedge \quad \mathsf{dom}\,(\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}) = \mathsf{dom}\, f$

$\wedge \quad \mathsf{ran}\,(\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}) = \{\max\{m, \min\{M, f(\omega)\}\} : \omega \in \mathsf{dom}\, f\}$

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad m \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad M \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad m \leq M$

$\Rightarrow$

$\mathsf{ran}\,(\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}) \subseteq [m|M]$

$\wedge \quad \forall x : x \in \mathsf{dom}\,(\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}) \Rightarrow$

$$\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}(x) = \begin{cases} m & , \quad f(x) \leq m \\ f(x) & , \quad m \leq f(x) \leq M \\ M & , \quad M \leq f(x) \end{cases}.$$

---

f reelle Funktion

$\wedge$ $m \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $M \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $M \leq m$

$\Rightarrow$

$\mathsf{ran}\,(\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}) \subseteq \{m\}$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\,(\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}) \Rightarrow \max\{m, \min\{M, f(.)\}\}(x) = m.$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $m \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\max\{m, \min\{M, f(.)\}\} : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion

$\wedge$ $\mathsf{ran}\,(\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}) = \{\max\{m, \min\{M, f(\omega)\}\} : \omega \in D\}.$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $m \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $M \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $m \leq M$

$\Rightarrow$

$\max\{m, \min\{M, f(.)\}\} : D \to \mathbb{R}$

$$(\max\{m, \min\{M, f(.)\}\})(x) = \begin{cases} m & , \quad f(x) \leq m \\ f(x) & , \quad m \leq f(x) \leq M \\ M & , \quad M \leq f(x) \end{cases}.$$

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $m \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $M \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $M \leq m$

$\Rightarrow$

$$\max\{m, \min\{M, f(.)\}\} : D \to \mathbb{R}, \quad (\max\{m, \min\{M, f(.)\}\})(x) = m.$$

In Bezug auf Stetigkeit gilt

---

f reelle Funktion

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f stetig auf I

$\wedge$ $m \in \mathbb{R}$

$\wedge$ $M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}$ stetig auf I.

Bei der Differenzierbarkeit von $\max\{m, \min\{M, f(.)\}\}$ ist zwischen $m < M$ und $M \le m$ zu unterscheiden.

$\quad f$ eelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad m \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad M \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad m < M$

$\wedge \quad \forall x : x \in I \Rightarrow m \ne f(x) \wedge M \ne f(x)$

$\Rightarrow$

$\quad \max\{m, \min\{M, f(.)\}\}$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad \forall x : x \in I \Rightarrow$

$$(\max\{m, \min\{M, f(.)\}\})'(x) = \begin{cases} 0 & , \quad f(x) < m \\ f'(x) & , \quad m < f(x) < M \\ 0 & , \quad M < f(x) \end{cases} .$$

$\quad f$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad I \subseteq \mathsf{dom}\, f$

$\wedge \quad m \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad M \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad M \le m$

$\Rightarrow$

$\quad \max\{m, \min\{M, f(.)\}\}$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad \forall x : x \in I \Rightarrow (\max\{m, \min\{M, f(.)\}\})'(x) = 0.$

Beispiel (ohne Beweis) Mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 7 - x^2,$$

und $m = -1$ und $M = 1$ gilt

$$\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$(\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\})(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \leq -2 \cdot \sqrt{2} \\ 7 - x^2 & , \quad -2 \cdot \sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{6} \\ 1 & , \quad -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6} \\ 7 - x^2 & , \quad \sqrt{6} \leq x \leq 2 \cdot \sqrt{2} \\ -1 & , \quad 2 \cdot \sqrt{2} \leq x \end{cases},$$

so dass $\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ stetig,

$$\mathsf{ran}\,(\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}) = [\,-1|1\,],$$

und $\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ differenzierbar auf $]\,-\infty|-2 \cdot \sqrt{2}\,[$,
$\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ differenzierbar auf $]\,-2 \cdot \sqrt{2}|-\sqrt{6}\,[$,
$\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ differenzierbar auf $]\,-\sqrt{6}|\sqrt{6}\,[$,
$\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ differenzierbar auf $]\sqrt{6}|2 \cdot \sqrt{2}\,[$.
$\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ differenzierbar auf $]2 \cdot \sqrt{2}|+\infty\,[$
und $\forall x : x \in \mathbb{R} \wedge -2 \cdot \sqrt{2} \neq x \wedge -\sqrt{6} \neq x \wedge \sqrt{6} \neq x \wedge 2 \cdot \sqrt{2} \neq x \Rightarrow$

$$(\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\})'(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -2 \cdot \sqrt{2} \\ -2 \cdot x & , \quad -2 \cdot \sqrt{2} < x < -\sqrt{6} \\ 0 & , \quad -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \\ -2 \cdot x & , \quad \sqrt{6} < x < 2 \cdot \sqrt{2} \\ 0 & , \quad 2 \cdot \sqrt{2} < x \end{cases},$$

und $\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ nicht differenzierbar in $-2 \cdot \sqrt{2}$,
$\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ nicht differenzierbar in $-\sqrt{6}$,
$\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ nicht differenzierbar in $\sqrt{6}$,
$\max\{-1, \min\{1, f(.)\}\}$ nicht differenzierbar in $2 \cdot \sqrt{2}$. $\square$(Beispiel)