Vorkurs Mathematik
Reelle Funktionen - 1

Andreas Unterreiter

3. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

Im Rahmen des Vorkurses sind "reelle Funktionen" besonders oft Gegenstand der Betrachtungen.

$$f \text{ reelle Funktion} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ Funktion} \wedge \mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \wedge \mathsf{ran}\, f \subseteq \mathbb{R}.$$

$$f : D \to B \text{ reelle Funktion} \quad \Leftrightarrow \quad f : D \to B \wedge D \subseteq \mathbb{R} \wedge B \subseteq \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$f \text{ reelle Funktion} \quad \Rightarrow \quad f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f \text{ reelle Funktion}$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge \mathsf{ran}\, f \subseteq B \wedge B \subseteq \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f : \mathsf{dom}\, f \to B \text{ reelle Funktion}$$

$$f : D \to B \text{ reelle Funktion} \quad \Rightarrow \quad f \text{ reelle Funktion}$$

Es gilt

$$f : D \to \mathbb{R} \wedge D \subseteq \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f \text{ reelle Funktion}$$

$$f : I \to \mathbb{R} \wedge I \text{ reelles Intervall} \quad \Rightarrow \quad f \text{ reelle Funktion}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f \text{ reelle Funktion}$$

1.1 f reelle Funktion $\wedge$ f gerade / f ungerade

Es gilt

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & f \text{ gerade} \\
\Leftrightarrow & \\
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & \forall x : x \in \mathsf{dom}\, f \Rightarrow f(x) = f(-x)
\end{array}
$$

Es gilt

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & f \text{ ungerade} \\
\Leftrightarrow & \\
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & \forall x : x \in \mathsf{dom}\, f \Rightarrow f(x) = -f(-x)
\end{array}
$$

Mit Hilfe hier nicht weiter interessierender Aussagen der Mengenlehre kann gezeigt werden

$$f \text{ gerade} \vee f \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in \mathsf{dom}\, f \Rightarrow -x \in \mathsf{dom}\, f.$$

1.2 f reelle Funktion $\wedge$ f ist T periodisch

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f ist T periodisch

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge\ 0 < T \in \mathbb{R} \wedge \forall x : x \in \mathsf{dom}\, f \Rightarrow f(x) = f(x+T)$

Es gilt

f reelle Funktion

$\wedge$ f ist T periodisch

$\wedge$ $\forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow x \pm \nu \cdot T \in \mathsf{dom}\, f$

$\wedge$ $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$

$f(x) = f(x \pm n \cdot T)$

1.3 f reelle Funktion $\wedge$ f (streng) wachsend (auf E)

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f wachsend auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $E \subseteq \mathbb{R} \wedge \forall x, y : x \in E \wedge y \in E \wedge x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f wachsend

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f wachsend auf $\mathsf{dom}\, f$

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f streng wachsend auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $E \subseteq \mathbb{R} \wedge \forall x, y : x \in E \wedge y \in E \wedge x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f streng wachsend

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f streng wachsend auf $\mathsf{dom}\, f$

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f wachsend auf $E \quad \Rightarrow \quad E \subseteq \mathsf{dom}\, f$

f reelle Funktion $\wedge$ f streng wachsend auf $E \quad \Rightarrow \quad E \subseteq \mathsf{dom}\, f$

f reelle Funktion $\wedge$ f streng wachsend auf $E \quad \Rightarrow \quad f$ wachsend auf E

Gelegentlich ist es hilfreich, (streng) wachsende Funktionen in Zusammenhang mit Stetigkeit auf echten, reellen Intervallen zu untersuchen. Es gilt ist

---

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & a \in \mathbb{R} \wedge a < b \\
\wedge & f \text{ auf } [a|b[\text{ stetig} \\
\Rightarrow & \\
 & f \text{ auf }]a|b[\text{ wachsend} \Rightarrow f \text{ auf } [a|b[\text{ wachsend} \\
\wedge & f \text{ auf }]a|b[\text{ streng wachsend} \Rightarrow f \text{ auf } [a|b[\text{ streng wachsend}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & b \in \mathbb{R} \wedge a < b \\
\wedge & f \text{ auf }]a|b] \text{ stetig} \\
\Rightarrow & \\
 & f \text{ auf }]a|b[\text{ wachsend} \Rightarrow f \text{ auf }]a|b] \text{ wachsend} \\
\wedge & f \text{ auf }]a|b[\text{ streng wachsend} \Rightarrow f \text{ auf }]a|b] \text{ streng wachsend}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b \\
\wedge & f \text{ auf } [a|b] \text{ stetig} \\
\Rightarrow & \\
 & f \text{ auf }]a|b[\text{ wachsend} \Rightarrow f \text{ auf } [a|b] \text{ wachsend} \\
\wedge & f \text{ auf }]a|b[\text{ streng wachsend} \Rightarrow f \text{ auf } [a|b] \text{ streng wachsend.}
\end{array}
$$

1.4 f reelle Funktion $\wedge$ f (streng) fallend (auf E)

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f fallend auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $E \subseteq \mathbb{R} \wedge \forall x, y : x \in E \wedge y \in E \wedge x < y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$.

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f fallend

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f fallend auf $\mathsf{dom}\, f$

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f streng fallend auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $E \subseteq \mathbb{R} \wedge \forall x, y : x \in E \wedge y \in E \wedge x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f streng fallend

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f streng fallend auf $\mathsf{dom}\, f$

Es gilt

f reelle Funktion $\wedge$ f fallend auf $E \quad \Rightarrow \quad E \subseteq \mathsf{dom}\, f$

f reelle Funktion $\wedge$ f streng fallend auf $E \quad \Rightarrow \quad E \subseteq \mathsf{dom}\, f$

f reelle Funktion $\wedge$ f streng fallend auf $E \quad \Rightarrow \quad f$ fallend auf E

Gelegentlich ist es hilfreich, (streng) fallende Funktionen in Zusammenhang mit Stetigkeit auf echten, reellen Intervallen zu untersuchen. Es gilt ist

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad a \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge \quad f$ auf $[a|b[$ stetig

$\Rightarrow$

f auf $]a|b[$ fallend $\Rightarrow f$ auf $[a|b[$ fallend

$\wedge \quad f$ auf $]a|b[$ streng fallend $\Rightarrow f$ auf $[a|b[$ streng fallend

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge \quad f$ auf $]a|b]$ stetig

$\Rightarrow$

f auf $]a|b[$ fallend $\Rightarrow f$ auf $]a|b]$ fallend

$\wedge \quad f$ auf $]a|b[$ streng fallend $\Rightarrow f$ auf $]a|b]$ streng fallend

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge \quad f$ auf $[a|b]$ stetig

$\Rightarrow$

f auf $]a|b[$ fallend $\Rightarrow f$ auf $[a|b]$ fallend

$\wedge \quad f$ auf $]a|b[$ streng fallend $\Rightarrow f$ auf $[a|b]$ streng fallend.

1.5 f reelle Funktion $\wedge$ f konvex (auf E) $\wedge$ $(\mathsf{dq}f)(x)$

Aus der Schulmathematik sind vermutlich die Begriffe

"rechtsdrehend" und "linksdrehend"

bekannt. Im Vorkurs sprechen wir von "konkav" an Stelle von "rechtsdrehend" und von "konvex" an Stelle von "linksdrehend".

Vorbereitend soll die

"Differenzenquotientenfunktion $(\mathsf{dq}f)(x)$ von f in x"

definiert werden. Mathematisch sieht dies so aus:

$$(\mathsf{dq}f)(x) = \left\{\left(t, \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right) : x \neq t \in \mathsf{dom}\, f\right\}.$$

In den hier vorwiegend interessierenden Spezialfällen gilt

---

f reelle Funktion

$$\Rightarrow \quad (\mathsf{dq}f)(x) \text{ reelle Funktion} \wedge \mathsf{dom}\,((\mathsf{dq}f)(x)) \subseteq (\mathsf{dom}\, f) \setminus \{x\}$$

f reelle Funktion $\wedge\ x \in \mathsf{dom}\, f \quad \Rightarrow \quad \mathsf{dom}\,((\mathsf{dq}f)(x)) = \mathsf{dom}\, f \setminus \{x\}$

---

f reelle Funktion $\wedge\ x \in \mathsf{dom}\, f \wedge t \in \mathsf{dom}\, f \wedge x \neq t$

$$\Rightarrow \quad t \in \mathsf{dom}\,((\mathsf{dq}f)(x)) \wedge (\mathsf{dq}f)(x)(t) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

Für reelle Funktionen f kann "Konvexität" mit Hilfe von $(\mathsf{dq}f)(x)$ definiert werden

---

f reelle Funktion $\wedge$ f konvex auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge\ E \subseteq \mathsf{dom}\, f$

$\wedge\ \forall x : x \in E \Rightarrow (\mathsf{dq}f)(x)$ wachsend auf $E \setminus \{x\}$

Eine gleichwertige Darstellung besagt, dass eine reelle Funktion genau dann konvex auf E ist, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$ und die Funktion stets *unterhalb* der Verbindungsstrecke zweier Punkte verläuft. Mathematisch präziser liest sich diese Darstellung folgender Maßen.

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ konvex auf } E$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & f \text{ reelle Funktion} \wedge E \subseteq \mathsf{dom}\, f \\ & \quad \wedge \forall x, t, y : x \in E \wedge t \in E \wedge y \in E \wedge x \leq t \leq y \wedge x < y \\ & \quad \Rightarrow \quad f(t) \leq \tfrac{y-t}{y-x} \cdot f(x) + \tfrac{t-x}{y-x} \cdot f(y) \end{aligned}$$

Ähnlich wie in den Teil-Abschnitten über über (streng) wachsende oder (streng) fallende Funktionen kommt auch bei konvexen Funktionen dem Fall $E = \mathsf{dom}\, f$ spezielle Bedeutung zu.

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ konvex} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ konvex auf } \mathsf{dom}\, f$$

Im Zusammenhang mit Konvexität sind echte reelle Intervalle von besonderem Interesse. Ist f zusätzlich auf diesem Intervall differenzierbar, gilt

---

f reelle Funktion $\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ f konvex auf I

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ f' wachsend auf I

Falls f auf dem echten reellen Intervall I sogar zweimal differenzierbar ist, gilt der möglicherweise aus der Schulmathematik vertraute Satz

---

f reelle Funktion $\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f zweimal differenzierbar auf I

$\wedge$ f konvex auf I

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f zweimal differenzierbar auf I

$\wedge$ $\forall x : x \in I \Rightarrow 0 \leq f''(x)$

Gelegentlich ist es hilfreich, konvexe Funktionen in Zusammenhang mit Stetigkeit auf echten, reellen Intervallen zu untersuchen. Es gilt ist

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad a \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge \quad f$ auf $[a|b[$ stetig

$\Rightarrow$

f auf $]a|b[$ konvex $\Rightarrow f$ auf $[a|b[$ konvex

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge \quad f$ auf $]a|b]$ stetig

$\Rightarrow$

f auf $]a|b[$ konvex $\Rightarrow f$ auf $]a|b]$ konvex

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge \quad f$ auf $[a|b]$ stetig

$\Rightarrow$

f auf $]a|b[$ konvex $\Rightarrow f$ auf $[a|b]$ konvex.

1.6 f reelle Funktion $\wedge$ f konkav (auf E)

Für reelle Funktionen f kann "Konkavität" mit Hilfe von $(\mathsf{dq}f)(x)$ definiert werden

---

$$
\begin{aligned}
& f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ konkav auf } E \\
\Leftrightarrow & \\
& f \text{ reelle Funktion} \wedge E \subseteq \mathsf{dom}\, f \\
& \qquad \wedge \forall x : x \in E \Rightarrow (\mathsf{dq}f)(x) \text{ fallend auf } E \setminus \{x\}
\end{aligned}
$$

Eine gleichwertige Darstellung besagt, dass eine reelle Funktion genau dann konkav auf E ist, wenn $E \subseteq \mathsf{dom}\, f$ und die Funktion stets *oberhalb* der Verbindungsstrecke zweier Punkte verläuft. Mathematisch präziser liest sich diese Darstellung folgender Maßen.

$$
\begin{aligned}
& f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ konkav auf } E \\
\Leftrightarrow & \\
& f \text{ reelle Funktion} \wedge E \subseteq \mathsf{dom}\, f \\
& \qquad \wedge \forall x, t, y : x \in E \wedge t \in E \wedge y \in E \wedge x \leq t \leq y \wedge x < y \\
& \qquad\qquad \Rightarrow \quad \tfrac{y-t}{y-x} \cdot f(x) + \tfrac{t-x}{y-x} \cdot f(y) \leq f(t)
\end{aligned}
$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ konvex} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ konvex auf } \mathsf{dom}\, f$$

Im Zusammenhang mit Konkavität sind echte reelle Intervalle von besonderem Interesse. Ist f zusätzlich auf diesem Intervall differenzierbar, gilt

---

$\quad f$ reelle Funktion $\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad f$ konvex auf I

$\Leftrightarrow$

$\quad f$ reelle Funktion $\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ differenzierbar auf I

$\wedge \quad f'$ fallend auf I

Falls f auf dem echten reellen Intervall I sogar zweimal differenzierbar ist, gilt der möglicherweise aus der Schulmathematik vertraute Satz

---

$\quad f$ reelle Funktion $\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ zweimal differenzierbar auf I

$\wedge \quad f$ konkav auf I

$\Leftrightarrow$

$\quad f$ reelle Funktion $\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ zweimal differenzierbar auf I

$\wedge \quad \forall x : x \in I \Rightarrow f''(x) \leq 0$

Gelegentlich ist es hilfreich, konkave Funktionen in Zusammenhang mit Stetigkeit auf echten, reellen Intervallen zu untersuchen. Es gilt ist

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad a \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge \quad f$ auf $[a|b[$ stetig

$\Rightarrow$

f auf $]a|b[$ konkav $\Rightarrow f$ auf $[a|b[$ konkav

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge \quad f$ auf $]a|b]$ stetig

$\Rightarrow$

f auf $]a|b[$ konkav $\Rightarrow f$ auf $]a|b]$ konkav

---

f reelle Funktion

$\wedge \quad a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge \quad f$ auf $[a|b]$ stetig

$\Rightarrow$

f auf $]a|b[$ konkav $\Rightarrow f$ auf $[a|b]$ konkav.

1.7 f reelle Funktion $\wedge$ x Wendepunkt von f

Ist f eine reelle Funktion, so sind Wendepunkte genau jene Punkte aus dem Definitions-Bereich von f, in denen das Verhalten von Konvexität auf Konkavität oder von Konkavität auf Konvexität wechselt. Jede dieser beiden Möglichkeiten soll im Vorkurs eine eigene Bezeichnung erhalten.

---

f reelle Funktion $\wedge$ x ist $\pm$-Wendepunkt von f

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $x \in \mathsf{dom}\, f \wedge \exists u, o : u < x < o$
$\wedge$ f konvex auf $]u|x] \cap \mathsf{dom}\, f$ $\wedge$ f konkav auf $[x|o[\cap \mathsf{dom}\, f$

---

f reelle Funktion $\wedge$ x ist $\mp$-Wendepunkt von f

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $x \in \mathsf{dom}\, f \wedge \exists u, o : u < x < o$
$\wedge$ f konkav auf $]u|x] \cap \mathsf{dom}\, f$ $\wedge$ f konvex auf $[x|o[\cap \mathsf{dom}\, f$

---

f reelle Funktion $\wedge$ x ist Wendepunkt von f

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion
$\wedge$ (x ist $\pm$-Wendepunkt von f $\vee$ x ist $\mp$-Wendepunkt von f)

Überlegenswerte, doch in der Praxis eher selten interessierende Spezialfälle liegen vor, wenn

$$]-\infty|x] \cap \mathsf{dom}\, f = \{x\} \text{ oder } [x|+\infty[\cap \mathsf{dom}\, f = \{x\}$$

gilt.

1.8 f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x Maximum auf E

"Lokale Maxima" werden im Vorkurs abweichend vom Schulstoff behandelt.

Statt auf den "lokalen " Charakter von Maxima einzugehen, wird die Menge, in der das Maximum von f zu suchen ist, betont. So wird vom "Maximum auf E" einer reellen Funktion f gesprochen.

---

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x Maximum auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $x \in E \wedge \forall p : p \in E \Rightarrow f(p) \leq f(x)$

---

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x globales Maximum

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x Maximum auf $\mathsf{dom}\, f$

---

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x striktes Maximum auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $x \in E \cap \mathsf{dom}\, f \wedge \forall p : x \neq p \in E \Rightarrow f(p) < f(x)$

---

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x globales striktes Maximum

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x striktes Maximum auf $\mathsf{dom}\, f$

Mit hier nicht weiter verfügbarer mengentheoretischer Raffinesse kann man sich von

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ hat in } x \text{ (striktes) Maximum auf } E \\ \Rightarrow \quad x \in \mathsf{dom}\, f \wedge E \subseteq \mathsf{dom}\, f,$$

und von

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ hat in } x \text{ (striktes) globales Maximum} \\ \Rightarrow \quad x \in \mathsf{dom}\, f,$$

überzeugen. Wesentlich direkter ist der Nachweis von

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ hat in } x \text{ striktes Maximum auf } E \\ \Rightarrow \quad f \text{ hat in } x \text{ Maximum auf } E,$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ hat in } x \text{ globales striktes Maximum} \\ \Rightarrow \quad f \text{ hat in } x \text{ globales Maximum.}$$

1.9 f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x Minimum auf E

“Lokale Minima” werden im Vorkurs abweichend vom Schulstoff behandelt.

Statt auf den “lokalen ” Charakter von Minima einzugehen, wird die Menge, in der das Minimum von f zu suchen ist, betont. So wird vom “Minimum auf E” einer reellen Funktion f gesprochen.

---

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x Minimum auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge\ x \in E \wedge \forall p : p \in E \Rightarrow f(x) \leq f(p)$

---

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x globales Minimum

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x Minimum auf $\mathsf{dom}\, f$

---

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x striktes Minimum auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge\ x \in E \cap \mathsf{dom}\, f \wedge \forall p : x \neq p \in E \Rightarrow f(x) < f(p)$

---

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x globales striktes Minimum

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f hat in x strktes Minimum auf $\mathsf{dom}\, f$

Mit hier nicht weiter verfügbarer mengentheoretischer Raffinesse kann man sich von

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ hat in } x \text{ (striktes) Minimum auf } E \quad \Rightarrow \quad x \in \mathsf{dom}\, f \wedge E \subseteq \mathsf{dom}\, f,$$

und von

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ hat in } x \text{ (striktes) globales Minimum} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathsf{dom}\, f,$$

überzeugen. Wesentlich direkter ist der Nachweis von

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ hat in } x \text{ striktes Minimum auf } E \quad \Rightarrow \quad f \text{ hat in } x \text{ Minimum auf } E,$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ hat in } x \text{ globales striktes Minimum} \quad \Rightarrow \quad f \text{ hat in } x \text{ globales Minimum.}$$

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

2.1 f reelle Funktion $\wedge$ f stetig auf E

Die "Limes-Defintion" der Stetigkeit einer reellen Funktion f in x wird im Vorkurs eher selten benötigt und hier eigentlich nur der Vollständigkeit halber angegeben. Statt dessen wird im Vorkurs auf einen regelkonformen Umgang mit Stetigkeit Wert gelegt. Für einige ausgewählte reelle Funktionen wird gesagt, auf welchen reellen Intervallen sie stetig sind. Danach werden Regeln angegeben, wie aus einer - oder mehreren - auf reellen Intervallen stetigen reellen Funktion(en) weitere derartige Funktionen herstellbar sind. Wird das Grundwissen stetiger reeller Funktionen mit diesen Regeln kombiniert, sollte die Stetigkeitsfrage für die allermeisten Funktionen, denen man im Grundstudium begegnet, geklärt sein.

---

f reelle Funktion $\wedge$ f stetig in x

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $x \in \mathsf{dom}\, f \wedge \lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$

---

f reelle Funktion $\wedge$ f stetig auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $\forall x : x \in E \Rightarrow f$ stetig in x

---

f reelle Funktion $\wedge$ f stetig

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f stetig auf $\mathsf{dom}\, f$

Offenbar gilt

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ stetig auf } E \quad \Rightarrow \quad E \subseteq \mathsf{dom}\, f.$$

Gelegentlich ist es hilfreich, von "f unstetig in x" sprechen zu können. Dies geschieht im Vorkurs hauptschlich im Zusammenhang mit reellen Funktionen.

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ unstetig in } x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge x \in \mathsf{dom}\, f \wedge \lim_{t \to x} f(t) \neq f(x)$$

Offenbar gilt

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ unstetig in } x \wedge x \in E \quad \Rightarrow \quad \neg(f \text{ stetig auf } E).$$

Mit den folgenden Aussagen sind viele x, in denen eine reelle Frunktion f unstetig ist, identifizierbar. Die Notation "$t \uparrow x$" nach oben gerichtete Pfeil "$\uparrow$" bedeutet, dass sich t an x mit $t < x$ annähert, dass es sich also um den "linksseitigen Limes" handelt. Ähnlich bedeutet die Notation "$t \downarrow x$" mit nach unten gerichtetem Pfeil "$\downarrow$", dass sich t an x mit $x < t$ annähert, dass es sich also um den "rechtsseitigen Limes" handelt.

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge x \in \mathsf{dom}\, f \wedge \lim_{t \uparrow x} f(t) \neq \lim_{t \downarrow x} f(t) \quad \Rightarrow \quad f \text{ unstetig in } x$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge \lim_{t \uparrow x} f(t) = +\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ unstetig in } x$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge \lim_{t \uparrow x} f(t) = -\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ unstetig in } x$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge \lim_{t \downarrow x} f(t) = +\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ unstetig in } x$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge \lim_{t \downarrow x} f(t) = -\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ unstetig in } x$$

2.2 f reelle Funktion $\wedge$ f differenzierbar auf E

Die “Limes-Defintion” der Differenzierbarkeit einer reellen Funktion f in x wird im Vorkurs eher selten benötigt und hier eigentlich nur der Vollständigkeit halber angegeben. Statt dessen wird im Vorkurs auf einen regelkonformen Umgang mit Differenzierbarkeit Wert gelegt. Für einige ausgewählte reelle Funktionen wird gesagt, auf welchen reellen Intervallen sie differenzierbar sind. Danach werden Regeln angegeben, wie aus einer - oder mehreren - auf reellen Intervallen differenzierbaren reellen Funktion(en) weitere derartige Funktionen herstellbar sind. Wird das Grundwissen differenzierbarer reeller Funktionen mit diesen Regeln kombiniert, sollte die Differenzierbarkeitsfrage für die allermeisten Funktionen, denen man im Grundstudium begegnet, geklärt sein.

---

f reelle Funktion $\wedge$ f differenzierbar in x

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $x \in \mathsf{dom}\, f \wedge \lim\limits_{t \to x} (\mathsf{dq} f)(x)(t) \in \mathbb{R}$

---

f reelle Funktion $\wedge$ f differenzierbar auf E

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ $\forall x : x \in E \Rightarrow f$ differenzierbar in x

---

f reelle Funktion $\wedge$ f differenzierbar

$\Leftrightarrow$

f reelle Funktion $\wedge$ f differenzierbar auf $\mathsf{dom}\, f$

Offenbar gilt

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ differenzierbar auf } E \quad \Rightarrow \quad E \subseteq \mathsf{dom}\, f.$$

Gelegentlich ist es hilfreich, von “ f nicht differenzierbar in x” sprechen zu können. Dies geschieht im Vorkurs hauptsc̈hlich im Zusammenhang mit reellen Funktionen.

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ nicht differenzierbar in } x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge x \in \mathsf{dom}\, f \wedge \lim_{t \to x} (\mathtt{dq} f)(x)(t) \notin \mathbb{R}$$

Offenbar gilt

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ nicht differenzierbar in } x \wedge x \in E \Rightarrow \neg(f \text{ differenzierbar auf } E).$$

Mit den folgenden Aussagen sind viele x, in denen eine reelle Funktion f nicht differenzierbar ist, identifizierbar. Zur Erhöhung der Lesbarkeit wird auf die explizite Darstellung von $(\mathtt{dq} f)(x)$ zurück gegriffen.

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge x \in \mathsf{dom}\, f \wedge \lim_{t \uparrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \neq \lim_{t \downarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \Rightarrow f \text{ nicht differenzierbar in } x$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge \lim_{t \uparrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ nicht differenzierbar in } x$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge \lim_{t \uparrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = -\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ nicht differenzierbar in } x$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge \lim_{t \downarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ nicht differenzierbar in } x$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge \lim_{t \downarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = -\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ nicht differenzierbar in } x$$

Es gilt

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ differenzierbar in } x \quad \Rightarrow \quad f \text{ stetig in } x,$$

also auch

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ unstetig in } x \quad \Rightarrow \quad f \text{ nicht differenzierbar in } x.$$

Für reelle Funktionen ist die "Ableitungsfunktion" einfach darstellbar.

f reelle Funktion

$\Rightarrow$

$$f' = \Big\{\omega : \exists x : f \text{ in } x \text{ differenzierbar} \wedge \omega = \Big(x, \lim_{t\to x}(\mathsf{dq}f)(x)(t)\Big)\Big\},$$

so dass

$$f' \text{ reelle Funktion},$$

und

$$f' : \{x : f \text{ differenzierbar in } x\} \to \mathbb{R},$$

$$f'(x) = \lim_{t\to x}(\mathsf{dq}f)(x)(t) = \lim_{x\neq t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Es folgt

$$f \text{ reelle Funktion} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{dom}\,(f') \subseteq \mathsf{dom}\, f$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ differenzierbar auf } E \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ reelle Funktion} \wedge E \subseteq \mathsf{dom}\,(f')$$

$$f \text{ reelle Funktion} \wedge f \text{ differenzierbar} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ reelle Funktion} \wedge \mathsf{dom}\,(f') = \mathsf{dom}\, f$$