Potenzen. Wurzeln. Exponenten. Logarithmen.

Andreas Unterreiter

11. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 $(.\uparrow 2)$

$$(.\uparrow 2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow 2)\,(x) = x^2.$$

<u>dom ran</u>
dom $(.\uparrow 2) = \mathbb{R}$.
ran $(.\uparrow 2) = [0| + \infty[$.

<u>(un-)gerade</u>
$(.\uparrow 2)$ gerade.

<u>Periodizität</u>
$\neg((.\uparrow 2)$ ist T-periodisch$)$.

<u>Monotonie</u>
$\neg((.\uparrow 2)$ wachsend$)$.
$(.\uparrow 2)$ streng wachsend auf $[0| + \infty[$.

$\neg((.\uparrow 2)$ fallend$)$.
$(.\uparrow 2)$ streng fallend auf $]-\infty|0]$.

<u>konvex/konvex</u>
$(.\uparrow 2)$ konvex.

<u>Extrema</u>
$(.\uparrow 2)$ hat in 0 striktes globales Minimum $\wedge\ (.\uparrow 2)\,(0) = 0$.
$(.\uparrow 2)$ hat in x globales Minimum $\quad\Rightarrow\quad x = 0 \wedge x^2 = 0$.

$\neg((.\uparrow 2)$ hat in x globales Maximum$)$.

<u>Stetigkeit</u>
$(.\uparrow 2)$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
$(.\uparrow 2)$ beliebig oft differenzierbar.

$$(.\uparrow 2)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow 2)'\,(x) = 2 \cdot x.$$

$$(.\uparrow 2)'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow 2)''\,(x) = 2.$$

<u>Verhalten bei $\pm\infty$</u>

$$\lim_{x\uparrow+\infty} (.\uparrow 2)\,(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} (.\uparrow 2)'\,(x) = +\infty$$
$$\text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} (.\uparrow 2)''\,(x) = 2.$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} (.\uparrow 2)\,(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} (.\uparrow 2)'\,(x) = -\infty$$
$$\text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} (.\uparrow 2)''\,(x) = 2.$$

<u>Verhalten am Rand</u> - <u>Spezielle Stellen</u> -
<u>spezielle Eigenschaften</u>

$$(.\uparrow 2)\circ \mathsf{vzw} = (.\uparrow 2)\,, \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-x)^2 = x^2.$$

$$(.\uparrow 2)\circ |.| = (.\uparrow 2)\,, \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x|^2 = x^2.$$

$$|.|\circ (.\uparrow 2) = (.\uparrow 2)\,, \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 = |x^2|.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (1/x)^2 = 1/x^2.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x\cdot y)^2 = x^2\cdot y^2.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x/y)^2 = x^2/y^2.$$

2 $(.\uparrow 3)$

$$(.\uparrow 3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow 3)\,(x) = x^3.$$

<u>dom ran</u>
dom $(.\uparrow 3) = \mathbb{R}$.
ran $(.\uparrow 3) = \mathbb{R}$.

<u>(un-)gerade</u>
$(.\uparrow 3)$ ungerade.

<u>Periodizität</u>
$\neg((.\uparrow 3)$ ist T-periodisch).

<u>Monotonie</u>
$(.\uparrow 3)$ streng wachsend.

<u>konvex/konvex</u>
$\neg((.\uparrow 3)$ konvex).
$(.\uparrow 3)$ konvex auf $[0| + \infty[$.

$\neg((.\uparrow 3)$ konkav).
$(.\uparrow 3)$ konkav auf $]-\infty|0]$.

<u>Extrema</u>
$\neg((.\uparrow 3)$ hat in x globales Minimum).
$\neg((.\uparrow 3)$ hat in x globales Maximum).

<u>Stetigkeit</u>
$(.\uparrow 3)$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
$(.\uparrow 3)$ beliebig oft differenzierbar.

$$(.\uparrow 3)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow 3)'\,(x) = 3\cdot x^2.$$

$$(.\uparrow 3)'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow 3)''(x) = 6 \cdot x.$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} (.\uparrow 3)(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow +\infty} (.\uparrow 3)'(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow +\infty} (.\uparrow 3)''(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow -\infty} (.\uparrow 3)(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -\infty} (.\uparrow 3)'(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -\infty} (.\uparrow 3)''(x) = -\infty.$$

Verhalten am Rand - Spezielle Stellen - spezielle Eigenschaften

$$(.\uparrow 3) \circ \mathsf{vzw} = \mathsf{vzw} \circ (.\uparrow 3), \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-x)^3 = -x^3.$$

$$(.\uparrow 3) \circ |.| = |.| \circ (.\uparrow 2), \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x|^3 = |x^3|.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (1/x)^3 = 1/x^3.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x/y)^3 = x^3/y^3.$$

3 $(.\uparrow n)$, $3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade

$$(.\uparrow n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow n)(x) = x^n, \quad 3 \leq n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ ungerade}.$$

dom ran $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$

dom $(.\uparrow n) = \mathbb{R}$.
ran $(.\uparrow n) = \mathbb{R}$.

(un-)gerade $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$

$(.\uparrow n)$ ungerade.

Periodizität $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$

$\neg((.\uparrow n)$ ist T-periodisch$)$.

Monotonie $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$

$(.\uparrow n)$ streng wachsend.

konvex/konvex $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$

$\neg((.\uparrow n)$ konvex$)$.
$(.\uparrow n)$ konvex auf $[0| + \infty[$.

$\neg((. \uparrow n)$ konkav$)$.
$(. \uparrow n)$ konkav auf $]-\infty|0]$.

Extrema $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$
$\neg((. \uparrow n)$ hat in x globales Minimum$)$.
$\neg((. \uparrow n)$ hat in x globales Maximum$)$.

Stetigkeit $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$
$(. \uparrow n)$ stetig.

Differenzierbarkeit $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$
$(. \uparrow n)$ beliebig oft differenzierbar.

$$(. \uparrow n)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (. \uparrow n)'(x) = n \cdot x^{-1+n}.$$

$$(. \uparrow n)'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (. \uparrow n)''(x) = n \cdot (-1+n) \cdot x^{-2+n}.$$

Verhalten bei $\pm\infty$ $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} (. \uparrow n)(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow +\infty} (. \uparrow n)'(x) = +\infty$$
$$\text{und} \quad \lim_{x \uparrow +\infty} (. \uparrow n)''(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \downarrow -\infty} (. \uparrow n)(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \downarrow -\infty} (. \uparrow n)'(x) = +\infty$$
$$\text{und} \quad \lim_{x \downarrow -\infty} (. \uparrow n)''(x) = -\infty.$$

Verhalten am Rand - Spezielle Stellen -

spezielle Eigenschaften $(3 \leq n \in \mathbb{N}, n$ ungerade$)$

$$(. \uparrow n) \circ \mathsf{vzw} = \mathsf{vzw} \circ (. \uparrow n), \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-x)^n = -x^n.$$

$$(. \uparrow n) \circ |.| = |.| \circ (. \uparrow n), \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x|^n = |x^n|.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (1/x)^n = 1/x^n.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x/y)^n = x^n/y^n.$$

4 $(.\uparrow n)$, $4 \le n \in \mathbb{N}$, n gerade

$$(.\uparrow n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow n)\,(x) = x^n, \quad 4 \le n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ gerade}.$$

dom ran $(4 \le n \in \mathbb{N},\, n$ gerade$)$

dom $(.\uparrow n) = \mathbb{R}$.
ran $(.\uparrow n) = [0| + \infty[$.

(un-)gerade $(4 \le n \in \mathbb{N},\, n$ gerade$)$

$(.\uparrow n)$ gerade.

Periodizität $(4 \le n \in \mathbb{N},\, n$ gerade$)$

$\neg((.\uparrow n)$ ist T-periodisch$)$.

Monotonie $(4 \le n \in \mathbb{N},\, n$ gerade$)$

$\neg((.\uparrow n)$ wachsend$)$.
$(.\uparrow n)$ streng wachsend auf $[0| + \infty[$.

$\neg((.\uparrow n)$ fallend$)$.
$(.\uparrow n)$ streng fallend auf $]-\infty|0]$.

konvex/konvex $(4 \le n \in \mathbb{N},\, n$ gerade$)$

$(.\uparrow n)$ konvex.

Extrema $(4 \le n \in \mathbb{N},\, n$ gerade$)$

$(.\uparrow n)$ hat in 0 striktes globales Minimum $\wedge$ $(.\uparrow n)\,(0) = 0$.
$(.\uparrow n)$ hat in x globales Minimum $\quad\Rightarrow\quad x = 0 \wedge x^n = 0$.

$\neg((.\uparrow n)$ hat in x globales Maximum$)$.

Stetigkeit $(4 \le n \in \mathbb{N},\, n$ gerade$)$

$(.\uparrow n)$ stetig.

Differenzierbarkeit $(4 \le n \in \mathbb{N},\, n$ gerade$)$

$(.\uparrow n)$ beliebig oft differenzierbar.

$$(.\uparrow n)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow n)'\,(x) = n \cdot x^{-1+n}.$$

$$(.\uparrow n)'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (.\uparrow n)''\,(x) = n \cdot (-1+n) \cdot x^{-2+n}.$$

Verhalten bei $\pm\infty$ $(4 \le n \in \mathbb{N},\, n$ gerade$)$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} (.\uparrow n)\,(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} (.\uparrow n)'\,(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\uparrow+\infty} (.\uparrow n)''\,(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} (.\uparrow n)\,(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} (.\uparrow n)'\,(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow-\infty} (.\uparrow n)''\,(x) = +\infty.$$

<u>Verhalten am Rand</u> - <u>Spezielle Stellen</u> -
<u>spezielle Eigenschaften ($4 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)</u>

$$(.\uparrow n) \circ \mathsf{vzw} = (.\uparrow n), \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-x)^n = x^n.$$

$$(.\uparrow n) \circ |.| = (.\uparrow n), \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x|^n = x^n.$$

$$|.| \circ (.\uparrow n) = (.\uparrow n), \quad \text{so dass} \quad \forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^n = |x^n|.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (1/x)^n = 1/x^n.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow (x/y)^n = x^n/y^n.$$

5 $\sqrt{.}$

$\sqrt{.}$ wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = (.\uparrow 2)$ und $I = [0| + \infty[$ und $J = (.\uparrow 2)[I] = [0| + \infty[= I$ gebildet. $(.\uparrow 2)$ ist stetig, $(.\uparrow 2)$ ist streng wachsend auf I. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus den Parametern $(.\uparrow 2)$ und $[0| + \infty[$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\sqrt{.},$$

bezeichnet wird. $\sqrt{.}$ ist die (reelle) Wurzelfunktion. Im Folgenden wird die Notation

$$\sqrt{.}(x) = \sqrt{x},$$

verwendet. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\sqrt{.} = ((.\uparrow 2) \downharpoonleft [0| + \infty[)^{-1}.$$

$$\sqrt{.} \text{ reelle Funktion,}$$

$$\sqrt{.} : [0| + \infty[\to [0| + \infty[\quad \text{bijektiv.}$$

$$\sqrt{.} \text{ streng wachsend,}$$

$$\forall x : x \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2} = x,$$

$$\forall y : y \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad (\sqrt{y})^2 = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von $(.\uparrow 2)$, aus $\forall x : x \in]0| + \infty[\Rightarrow 0 \neq (.\uparrow 2)'(x)$ und aus $(.\uparrow 2)[]0| + \infty[] =]0| + \infty[$ folgt

$$\sqrt{.} \text{ differenzierbar auf }]0| + \infty[,$$

$$\forall x : x \in]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \sqrt{.}'(x^2) \cdot (.\uparrow 2)'(x) = \sqrt{.}'(x^2) \cdot 2 \cdot x = 1,$$

$$\forall y : y \in]0|+\infty[\quad \Rightarrow \quad (.\uparrow 2)'(\sqrt{y}) \cdot \sqrt{.}'(y) = 2 \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{.}'(y) = 1.$$

Es folgt die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in]0|+\infty[\quad \Rightarrow \quad \sqrt{.}'(y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}.$$

<u>dom ran</u>
dom $(\sqrt{.}) = [0|+\infty[$.
ran $(\sqrt{.}) = [0|+\infty[$.

<u>(un-)gerade</u>
$\neg(\sqrt{.}$ ungerade).
$\neg(\sqrt{.}$ gerade).

<u>Periodizität</u>
$\neg(\sqrt{.}$ ist $T-$periodisch).

<u>Monotonie</u>
$\sqrt{.}$ streng wachsend.

<u>konvex/konkav</u>
$\sqrt{.}$ konkav.

<u>Extrema</u>
$\sqrt{.}$ hat in 0 striktes globales Minimum $\wedge\ \sqrt{0} = 0$.
$\sqrt{.}$ hat in x globales Minimum $\quad \Rightarrow \quad x = 0 \wedge \sqrt{x} = 0$.

$\neg(\sqrt{.}$ hat in x globales Maximum).

<u>Stetigkeit</u>
$\sqrt{.}$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
$\sqrt{.}$ beliiebig oft differenzierbar auf $]0|+\infty[$.

$$\sqrt{.}' :]0|+\infty[\to \mathbb{R}, \quad \sqrt{.}'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}},$$

$$\sqrt{.}'' :]0|+\infty[\to \mathbb{R} \quad \sqrt{.}''(x) = -\frac{1}{4 \cdot x \cdot \sqrt{x}}.$$

$\neg(\sqrt{.}$ differenzierbar in 0).

<u>Verhalten bei $\pm\infty$</u>

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \sqrt{x} = +\infty, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \sqrt{.}'(x) = 0, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \sqrt{.}''(x) = 0.$$

<u>Verhalten am Rand</u> Hier: bei 0.

$$\sqrt{0} = 0 = \lim_{x\downarrow 0} \sqrt{x}.$$

$$\lim_{x\downarrow 0}(\mathtt{dq}\sqrt{.})(0)(x) = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= +\infty = \lim_{x\downarrow 0}\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \lim_{x\downarrow 0}\sqrt{.}'(x).$$

$$\lim_{x\downarrow 0}\sqrt{.}''(x) = \lim_{x\downarrow 0} -\frac{1}{4\cdot x\cdot\sqrt{x}} = -\infty.$$

Spezielle Stellen -

spezielle Eigenschaften

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$\forall y : y \in [0| + \infty[\Rightarrow (\sqrt{y})^2 = y.$$

$$\forall x : x \in [0| + \infty[\Rightarrow \sqrt{1/x} = 1/\sqrt{x}.$$

$$\forall x, y : x \in [0| + \infty[\wedge y \in [0| + \infty[\Rightarrow \sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}.$$

$$\forall x, y : x \in [0| + \infty[\wedge y \in [0| + \infty[\Rightarrow \sqrt{x/y} = \sqrt{x}/\sqrt{y}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{|x\cdot y|} = \sqrt{|x|\cdot|y|} = \sqrt{|x|}\cdot\sqrt{|y|}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{|x/y|} = \sqrt{|x|/|y|} = \sqrt{|x|}/\sqrt{|y|}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 = y \Rightarrow 0 \le y \wedge |x| = \sqrt{y}.$$

6 $\sqrt[3]{.}$

$\sqrt[3]{.}$ wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = (. \uparrow 3)$ und $I = \mathbb{R}$ und $J = (. \uparrow 3)\,[\mathbb{R}] = \mathtt{ran}\ (. \uparrow 3) = \mathbb{R}$ gebildet. $(. \uparrow 3)$ ist stetig, $(. \uparrow 3)$ ist streng wachsend. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonright I)^{-1} = (. \uparrow 3)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus dem Parameter $(. \uparrow 3)$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\sqrt[3]{.},$$

bezeichnet wird. $\sqrt[3]{.}$ ist die (reelle) Kubikwurzelfunktion. Im Folgenden wird die Notation

$$\sqrt[3]{.}(x) = \sqrt[3]{x},$$

verwendet. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\sqrt[3]{.} = (. \uparrow 3)^{-1},$$

$$\sqrt[3]{.} \text{ reelle Funktion,}$$

$$\sqrt[3]{.} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{bijektiv.}$$

$$\sqrt[3]{.} \text{ streng wachsend,}$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x^3} = x,$$
$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von $(.\uparrow 3)$, aus $\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow 0 \neq (.\uparrow 3)'(x)$ und folgt nach zweimaligem Einsatz von **UKS - D** - einmal auf $A = \rbrack 0| + \infty \lbrack$ mit $B = (.\uparrow 3)[A] = \rbrack 0| + \infty \lbrack$, dann auf $A = \rbrack - \infty | 0 \lbrack$ und $B = (.\uparrow 3)[A] = \rbrack - \infty | 0 \lbrack$ -,

$$\sqrt[3]{.} \text{ differenzierbar auf } \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{.}'(x^3) \cdot (.\uparrow 3)'(x) = \sqrt[3]{.}'(x^3) \cdot 3 \cdot x^2 = 1,$$
$$\forall y : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad (.\uparrow 3)'\left(\sqrt[3]{y}\right) \cdot \sqrt[3]{.}'(y) = 3 \cdot \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{.}'(y) = 1.$$

Es folgt die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{.}'(y) = \frac{1}{3 \cdot \left(\sqrt[3]{y}\right)^2}.$$

dom ran
dom $(\sqrt[3]{.}) = \mathbb{R}$.
ran $(\sqrt[3]{.}) = \mathbb{R}$.

(un-)gerade
$\sqrt[3]{.}$ ungerade.

Periodizität
$\neg(\sqrt[3]{.}$ ist $T-$periodisch).

Monotonie
$\sqrt[3]{.}$ streng wachsend.

konvex/konkav
$\neg(\sqrt[3]{.}$ konvex).
$\sqrt[3]{.}$ konvex auf $\rbrack - \infty | 0 \rbrack$.

$\neg(\sqrt[3]{.}$ konkav).
$\sqrt[3]{.}$ konkav auf $\lbrack 0| + \infty \lbrack$.

Extrema
$\neg(\sqrt[3]{.}$ hat in x globales Minimum).
$\neg(\sqrt[3]{.}$ hat in x globales Maximum).

Stetigkeit
$\sqrt[3]{.}$ stetig.

Differenzierbarkeit
$\sqrt[3]{.}$ beliiebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\sqrt[3]{.}' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \sqrt[3]{.}'(x) = \frac{1}{3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^2},$$

$$\sqrt[3]{.}'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \sqrt[3]{.}''(x) = -\frac{2}{9 \cdot x \cdot (\sqrt[3]{x})^2}.$$

$\neg(\sqrt[3]{.}$ differenzierbar in 0).

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \sqrt[3]{.}'(x) = 0, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \sqrt[3]{.}''(x) = 0.$$

$$\lim_{x \downarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} \sqrt[3]{.}'(x) = 0, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} \sqrt[3]{.}''(x) = 0.$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen Hier: bei 0, wegen fehlender Differenzierbarkeit.

$$\sqrt[3]{0} = 0 = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} (\mathtt{dq}\sqrt[3]{.})(0)(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} \\ &= +\infty = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3 \cdot (\sqrt[3]{x})^2} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{.}'(x).\end{aligned}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \sqrt[3]{.}''(x) = \lim_{x \downarrow 0} -\frac{2}{9 \cdot x \cdot (\sqrt[3]{x})^2} = -\infty.$$

$$\lim_{x \uparrow 0} \sqrt[3]{.}''(x) = \lim_{x \uparrow 0} -\frac{2}{9 \cdot x \cdot (\sqrt[3]{x})^2} = +\infty.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} = x.$$

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \Rightarrow (\sqrt[3]{y})^3 = y.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{1/x} = 1/\sqrt[3]{x}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{x/y} = \sqrt[3]{x}/\sqrt[3]{y}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^3 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

7 $\sqrt[n]{.}$, $3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade

$\sqrt[n]{.}$ wird für $3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade, mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = (. \uparrow n)$ und $I = \mathbb{R}$ und $J = (. \uparrow n)\,[\mathbb{R}] = \mathsf{ran}\,(. \uparrow n) = \mathbb{R}$ gebildet. Für $3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade, ist $(. \uparrow n)$ stetig und streng wachsend. Somit treffen für $3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade, die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonright I)^{-1} = (. \uparrow n)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht hier für $n \in \mathbb{N}$ und $3 \leq n$ und n ungerade aus $(. \uparrow n)$ und $\mathbb{R}$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g für jedes der genannten n eine Funktion, die mit

$$\sqrt[n]{.},$$

in Abhängigkeit von n mit $3 \leq n \in \mathbb{N}$, *n ungerade*, bezeichnet wird. $\sqrt[n]{.}$ ist die (reelle) n-te Wurzelfunktion. Im Folgenden wird die Notation

$$\sqrt[n]{.}(x) = \sqrt[n]{x},$$

verwendet. Aus **UKS - S** folgen für $3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade, auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\sqrt[n]{.} = (. \uparrow n)^{-1},$$

$$\sqrt[n]{.} \text{ reelle Funktion},$$

$$\sqrt[n]{.} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{bijektiv.}$$

$$\sqrt[n]{.} \text{ streng wachsend},$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} = x,$$

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (\sqrt[n]{y})^n = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von $(. \uparrow n)$, aus $\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow 0 \neq (. \uparrow n)'(x)$ folgt nach zweimaligem Einsatz von **UKS - D** - einmal auf $A =]0| + \infty[$ mit $B = (. \uparrow n)\,[A] =]0| + \infty[$, dann auf $A =] - \infty|0[$ und $B = (. \uparrow n)\,[A] =] - \infty|0[$ -,

$$\sqrt[n]{.} \text{ differenzierbar auf } \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{.}'(x^n) \cdot (. \uparrow n)'(x) = \sqrt[n]{.}'(x^n) \cdot n \cdot x^{-1+n} = 1,$$

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad (. \uparrow n)'(\sqrt[n]{y}) \cdot \sqrt[n]{.}'(y) = n \cdot (\sqrt[n]{y})^{-1+n} \cdot \sqrt[n]{.}'(y) = 1.$$

Es folgt die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{.}'(y) = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{y})^{-1+n}}.$$

<u>$\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ $(3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade$)$</u>
$\mathsf{dom}\,(\sqrt[n]{.}) = \mathbb{R}$.
$\mathsf{ran}\,(\sqrt[n]{.}) = \mathbb{R}$.

<u>(un-)gerade ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)</u>
$\sqrt[n]{.}$ ungerade.

<u>Periodizität ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)</u>
$\neg(\sqrt[n]{.}$ ist $T-$periodisch).

<u>Monotonie ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)</u>
$\sqrt[n]{.}$ streng wachsend.

<u>konvex/konkav ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)</u>
$\neg(\sqrt[n]{.}$ konvex).
$\sqrt[n]{.}$ konvex auf $]-\infty|0]$.

$\neg(\sqrt[n]{.}$ konkav).
$\sqrt[n]{.}$ konkav auf $[0|+\infty[$.

<u>Extrema ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)</u>
$\neg(\sqrt[n]{.}$ hat in x globales Minimum).
$\neg(\sqrt[n]{.}$ hat in x globales Maximum).

<u>Stetigkeit ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)</u>
$\sqrt[n]{.}$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)</u>
$\sqrt[n]{.}$ beliiebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\sqrt[n]{.}' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{.}'(x) = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{-1+n}},$$

$$\sqrt[n]{.}'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad \sqrt[n]{.}''(x) = -\frac{-1+n}{n^2 \cdot x \cdot (\sqrt[n]{x})^{-1+n}}.$$

$\neg(\sqrt[n]{.}$ differenzierbar in 0).

<u>Verhalten bei $\pm\infty$ ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)</u>

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \sqrt[n]{.}'(x) = 0, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \sqrt[n]{.}''(x) = 0.$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \sqrt[n]{.}'(x) = 0, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \sqrt[n]{.}''(x) = 0.$$

<u>Verhalten am Rand</u> -

<u>Spezielle Stellen ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)</u> Hier: bei 0, wegen fehlender Differenzierbarkeit.

$$\sqrt[n]{0} = 0 = \lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x}.$$

$$\lim_{x\to 0}(\mathtt{dq}\,\sqrt[n]{.})(0)(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{x}}{(\sqrt[n]{x})^n} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{-1+n}}$$
$$= +\infty = \lim_{x\to 0} \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{-1+n}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[n]{.}'(x).$$

$$\lim_{x\downarrow 0}\sqrt[n]{.}''(x) = \lim_{x\downarrow 0} -\frac{-1+n}{n^2\cdot x\cdot(\sqrt[n]{x})^{-1+n}} = -\infty.$$
$$\lim_{x\uparrow 0}\sqrt[n]{.}''(x) = \lim_{x\uparrow 0} -\frac{-1+n}{n^2\cdot x\cdot(\sqrt[n]{x})^{-1+n}} = +\infty.$$

spezielle Eigenschaften ($3 \leq n \in \mathbb{N}$, n ungerade)

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} = x.$$
$$\forall y : y \in \mathbb{R} \Rightarrow (\sqrt[n]{y})^n = y.$$
$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}.$$
$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{1/x} = 1/\sqrt[n]{x}.$$
$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{x\cdot y} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}.$$
$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}.$$
$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^n = y \Rightarrow x = \sqrt[n]{y}.$$

8 $\sqrt[n]{.}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade

$\sqrt[n]{.}$ wird für $2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade, mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = (.\uparrow n)$ und $I = [0|+\infty[$ und $J = (.\uparrow n)[I] = [0|+\infty[= I$ gebildet. Für $2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade ist $(.\uparrow n)$ stetig und streng wachsend auf I. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht hier für $n \in \mathbb{N}$ und $2 \leq n$ und n gerada aus $(.\uparrow n)$ und $\mathbb{R}$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g für jedes der genannten n eine Funktion, die mit

$$\sqrt[n]{.},$$

in Abhängigkeit von n mit $2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade, bezeichnet wird. $\sqrt[n]{.}$ ist die (reelle) n-te Wurzelfunktion. Im Folgenden wird die Notation

$$\sqrt[n]{.}(x) = \sqrt[n]{x},$$

verwendet. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\sqrt[n]{.} = ((.\uparrow n) \downharpoonleft [0|+\infty[)^{-1}.$$
$$\sqrt[n]{.} \text{ reelle Funktion,}$$
$$\sqrt[n]{.} : [0|+\infty[\to [0|+\infty[\quad \text{bijektiv.}$$
$$\sqrt[n]{.} \text{ streng wachsend,}$$
$$\forall x : x \in [0|+\infty[\quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{x^n} = x,$$

$$\forall y : y \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad (\sqrt[n]{y})^n = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von $(. \uparrow n)$, aus $\forall x : x \in]0| + \infty[\Rightarrow 0 \neq (. \uparrow n)'(x)$ und aus $(. \uparrow n)[]0| + \infty[] =]0| + \infty[$ folgt

$$\sqrt[n]{.} \text{ differenzierbar auf }]0| + \infty[,$$

$$\forall x : x \in]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{.}'(x^n) \cdot (. \uparrow n)'(x) = \sqrt[n]{.}'(x^n) \cdot n \cdot x^{-1+n} = 1,$$

$$\forall y : y \in]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad (. \uparrow n)'(\sqrt[n]{y}) \cdot \sqrt[n]{.}'(y) = n \cdot (\sqrt[n]{y})^{-1+n} \cdot \sqrt[n]{.}'(y) = 1.$$

Es folgt die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{.}'(y) = \frac{1}{n \cdot \left(\sqrt[n]{y}\right)^{-1+n}}.$$

<u>$\mathsf{dom\,ran}$ $(2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)</u>
$\mathsf{dom}(\sqrt[n]{.}) = [0| + \infty[$.
$\mathsf{ran}(\sqrt[n]{.}) = [0| + \infty[$.

<u>(un-)gerade $(2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)</u>
$\neg(\sqrt[n]{.}$ ungerade).
$\neg(\sqrt[n]{.}$ gerade).

<u>Periodizität $(2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)</u>
$\neg(\sqrt[n]{.}$ ist $T-$periodisch).

<u>Monotonie $(2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)</u>
$\sqrt[n]{.}$ streng wachsend.

<u>konvex/konkav $(2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)</u>
$\sqrt[n]{.}$ konkav.

<u>Extrema $(2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)</u>
$\sqrt[n]{.}$ hat in 0 striktes globales Minimum $\wedge \sqrt[n]{0} = 0$.
$\sqrt[n]{.}$ hat in x globales Minimum $\quad \Rightarrow \quad x = 0 \wedge \sqrt[n]{x} = 0$.

$\neg(\sqrt[n]{.}$ hat in x globales Maximum).

<u>Stetigkeit $(2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)</u>
$\sqrt[n]{.}$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit $(2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)</u>
$\sqrt[n]{.}$ beliiebig oft differenzierbar auf $]0| + \infty[$.

$$\sqrt[n]{.}' :]0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{.}'(x) = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{-1+n}},$$

$$\sqrt[n]{.}'' :]0| + \infty[\to \mathbb{R} \quad \sqrt[n]{.}''(x) = -\frac{-1+n}{n^2 \cdot x \cdot (\sqrt[n]{x})^{-1+n}}.$$

$\neg(\sqrt[n]{\cdot}$ differenzierbar in 0).

Verhalten bei $\pm\infty$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\uparrow+\infty} \sqrt[n]{\cdot}'(x) = 0, \qquad \lim_{x\uparrow+\infty} \sqrt[n]{\cdot}''(x) = 0.$$

Verhalten am Rand ($2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade) Hier: bei 0.

$$\sqrt[n]{0} = 0 = \lim_{x\downarrow 0} \sqrt[n]{x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}(\mathtt{dq}\,\sqrt[n]{\cdot})(0)(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x}}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1+n}} \\ &= +\infty = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{n \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1+n}} = \lim_{x\downarrow 0} \sqrt[n]{\cdot}'(x).\end{aligned}$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \sqrt[n]{\cdot}''(x) = \lim_{x\downarrow 0} -\frac{-1+n}{n^2 \cdot x \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-1+n}} = -\infty.$$

Spezielle Stellen -

spezielle Eigenschaften ($2 \leq n \in \mathbb{N}$, n gerade)

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{x^n} = |x|.$$

$$\forall y : y \in [0| + \infty[\Rightarrow \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y.$$

$$\forall x : x \in [0| + \infty[\Rightarrow \sqrt[n]{1/x} = 1/\sqrt[n]{x}.$$

$$\forall x, y : x \in [0| + \infty[\wedge y \in [0| + \infty[\Rightarrow \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

$$\forall x, y : x \in [0| + \infty[\wedge y \in [0| + \infty[\Rightarrow \sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x}/\sqrt[n]{y}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{|x \cdot y|} = \sqrt[n]{|x| \cdot |y|} = \sqrt[n]{|x|} \cdot \sqrt[n]{|y|}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{|x/y|} = \sqrt[n]{|x|/|y|} = \sqrt[n]{|x|}/\sqrt[n]{|y|}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^n = y \Rightarrow 0 \leq y \wedge |x| = \sqrt[n]{y}.$$

9 exp

Eine mahtematisch fundiertere Besprechung der Exponentialfunktion erfolgt im Zusammenhang mit Grenzwerten und unendlicher Summation. Diese beiden Themen werden nicht immer im Vorkurs besprochen. Es gilt

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

genauer

$$\exp : \mathbb{R} \to \,]0| + \infty[\text{ bijektiv}$$

<u>dom ran</u>
dom $(\exp) = \mathbb{R}$.
ran $(\exp) = \,]0| + \infty[$.

<u>(un-)gerade</u>
$\neg$(exp ungerade).
$\neg$(exp gerade).

<u>Periodizität</u>
$\neg$(exp ist T-periodisch).

<u>Monotonie</u>
exp streng wachsend.

<u>konvex/konkav</u>
exp konvex.

<u>Extrema</u>
$\neg$(exp hat in x globales Minimum).
$\neg$(exp hat in x globales Maximim).

<u>Stetigkeit</u>
exp stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
exp beliebig oft differenzierbar.

$$\exp' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp x, \quad \text{also} \quad \exp' = \exp .$$

$$\exp'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp''(x) = \exp x, \quad \text{also} \quad \exp'' = \exp .$$

<u>Verhalten bei $\pm\infty$</u>

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \exp x = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \exp' x = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \exp'' x = +\infty,$$

$$\lim_{x \uparrow -\infty} \exp x = 0, \quad \lim_{x \uparrow -\infty} \exp' x = 0, \quad \lim_{x \uparrow -\infty} \exp'' x = 0.$$

<u>Verhalten am Rand</u> -

Spezielle Stellen

$$\exp 0 = 1, \quad \exp 1 = e.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp(x + y) = (\exp x) \cdot (\exp y).$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{x \uparrow +\infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0 \wedge \lim_{x \uparrow +\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty.$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{x \downarrow -\infty} x^n \cdot \exp x = 0.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots.$$

10 ln

ln wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = \exp$ und $I = \mathbb{R}$ und $J = \exp[\mathbb{R}] = \mathsf{ran}\,(\exp) =]0| + \infty[$ gebildet. exp ist stetig und streng wachsend. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonright I)^{-1} = \exp^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus dem Parameter exp ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\ln,$$

bezeichnet wird. ln ist die natürliche Logarithmusfunktion. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\ln = \exp^{-1},$$

$$\ln \text{ reelle Funktion},$$

$$\ln :]0| + \infty[\to \mathbb{R} \quad \text{bijektiv}.$$

$$\ln \text{ streng wachsend},$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \ln(\exp x) = x,$$

$$\forall y : y \in]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \exp(\ln y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von exp, aus $\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \neq \exp x = \exp' x$ folgt via **UKS - D**,

$$\ln \text{ differenzierbar},$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \ln'(\exp x) \cdot \exp' x = \ln'(\exp x) \cdot \exp x = 1,$$

$$\forall y : y \in]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \exp'(\ln y) \cdot \ln' y = \exp(\ln y) \cdot \ln' y = 1.$$

Es folgt via

$$\forall y : y \in \,]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \exp(\ln y) = y,$$

die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in \,]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \ln' y = \frac{1}{y}.$$

<u>dom ran</u>
dom $(\ln) = \,]0| + \infty[$.
ran $(\ln) = \mathbb{R}$.

<u>(un-)gerade</u>
$\neg$(ln ungerade).
$\neg$(ln gerade).

<u>Periodizität</u>
$\neg$(ln ist T-periodisch).

<u>Monotonie</u>
ln streng wachsend.

<u>konvex/konkav</u>
ln konkav.

<u>Extrema</u>
$\neg$(ln hat in x globales Minimum).
$\neg$(ln hat in x globale Maximum).

<u>Stetigkeit</u>
ln stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
ln beliebig oft differenzierbar.

$$\ln' : \,]0| + \infty[\,\to \mathbb{R}, \quad \ln' x = \frac{1}{x}.$$

$$\ln'' : \,]0| + \infty[\,\to \mathbb{R}, \quad \ln'' x = -\frac{1}{x^1}.$$

<u>Verhalten bei $\pm\infty$</u>

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \ln' x = 0, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \ln'' x = 0.$$

<u>Verhalten am Rand</u>

$$\lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} \ln' x = +\infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} \ln'' x = -\infty.$$

Spezielle Stellen

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x, y : x \in \left]0\right| + \infty\left[\wedge y \in \right]0\left| + \infty\right[\Rightarrow \ln(x \cdot y) = (\ln x) + (\ln y).$$

$$\forall x, y : x \in \left]0\right| + \infty\left[\wedge y \in \right]0\left| + \infty\right[\Rightarrow \ln(x/y) = (\ln x) - (\ln y).$$

$$\forall x : x \in \left]0\right| + \infty\left[\Rightarrow \ln(1/x) = -\ln x.\right.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \ln(|x \cdot y|) = (\ln |x|) + (\ln |y|).$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \ln(|x/y|) = (\ln |x|) - (\ln |y|).$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \ln(1/|x|) = -\ln |x|.$$

$$\forall x : x \in \left]0\right| + \infty\left[\Rightarrow \right.$$
$$\ln x = 2 \cdot \left(\frac{-1+x}{1+x} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-1+x}{1+x} \right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-1+x}{1+x} \right)^5 + \ldots \right).$$

11 (. ^ .)

Die namenlose Funktion (. ^ .) wird für die Vorstellung von Potenz- und Exponentialfunktionen verwendet. Es handelt sich um eine Funktion, die von zwei Variablen abhängt und somit *keine* reelle Funktion ist.

$$(.\,\hat{}\,.) := \{((x, y), z) : x \in \left]0\right| + \infty\left[\wedge y \in \mathbb{R} \wedge z = \exp(y \cdot \ln x)\right\}.$$

Es gilt

$$(.\,\hat{}\,.) : \left]0\right| + \infty\left[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \right.$$

und es wird die Notation

$$(.\,\hat{}\,.)\,((x, y)) = (x\,\hat{}\,y)\,,$$

verwendet, so dass

$$(.\,\hat{}\,.) : \left]0\right| + \infty\left[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x\,\hat{}\,y) = \exp(y \cdot \ln x).\right.$$

Ohne allzu viel Mühe kann

$$\mathsf{dom}\ (.\,\hat{}\,.) = \left]0\right| + \infty\left[\times \mathbb{R}, \right.$$

$$\mathsf{ran}\ (.\,\hat{}\,.) = \left]0\right| + \infty\left[, \right.$$

nachgewiesen werden. Auch gilt:

$$\forall x, n : x \in \,]0| + \infty[\, \wedge n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x \wedge n) = x^n.$$

$$\forall x, n : x \in \,]0| + \infty[\, \wedge 2 \leq n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(x \wedge \frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{x}.$$

$$\forall x : x \in \,]0| + \infty[\, \Rightarrow (x \wedge -1) = \frac{1}{x}.$$

$$\forall x : x \in \,]0| + \infty[\, \wedge n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x \wedge -n) = \frac{1}{(x \wedge n)} = \frac{1}{x^n}.$$

<u>BeweisSkizze</u>

Zunächst gilt für alle $x \in \,]0| + \infty[$,

$$(x \wedge 0) = \exp(0 \cdot \ln x) = \exp 0 = 1 = x^0,$$

so dass

$$0 \in E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \forall x : x \in \,]0| + \infty[\, \Rightarrow (x \wedge \omega) = x^\omega\}.$$

Klarer Weise gilt $E \subseteq \mathbb{N}$. Falls $\lambda \in E$, dann $\lambda \in \mathbb{N}$, somit $1 + \lambda \in \mathbb{N}$ und $1 + \lambda$ Menge und $\forall x : x \in \,]0| + \infty[$ gilt $(x \wedge \lambda) = x^\lambda$. Für diese x gilt auch

$$\begin{aligned}(x \wedge 1 + \lambda) &= \exp((1 + \lambda) \cdot \ln x) = \exp(\ln x + \lambda \cdot \ln x) \\ &= (\exp(\ln x)) \cdot (\exp(\lambda \cdot x)) = x \cdot (x \wedge \lambda) = x \cdot x^\lambda = x^{1+\lambda}.\end{aligned}$$

Damit $1 + \lambda \in E$ und nun via **vollständiger Induktion** $E = \mathbb{N}$, so dass

$$\forall x, n : x \in \,]0| + \infty[\, \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \wedge n) = x^n.$$

Für alle $x \in \,]0| + \infty[$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x \wedge -y) = \exp(-y \cdot \ln x) = \frac{1}{\exp(y \cdot \ln x)} = \frac{1}{(x \wedge y)},$$

so dass für alle $x \in \,]0| + \infty[$ und alle $n \in \mathbb{N}$,

$$(x \wedge -n) = \frac{1}{(x \wedge n)} = \frac{1}{x^n} = x^{-n}.$$

Hieruas und aus dem bisher Gezeigten folgt nun mit wenig Mühe

$$\forall x, n : x \in \,]0| + \infty[\, \wedge n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x \wedge n) = x^n.$$

$\square$(BeweisSkizze)

$$\forall x, y : x \in \,]0| + \infty[\, \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{1}{x} \wedge y\right) = (x \wedge -y) = \frac{1}{(x \wedge y)}.$$

<u>Beweis</u>

Für alle $x \in \,]0|+\infty[$ und alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(\frac{1}{x} \wedge y\right) = \exp\left(y \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \exp(y \cdot (-\ln x) = \exp(-y \cdot \ln x)$$
$$= \frac{1}{\exp(y \cdot \ln x)} = \frac{1}{(x \wedge y)},$$

sowie

$$(x \wedge -y) = \exp((-y) \cdot \ln x) = \exp(-y \cdot \ln x) = \frac{1}{\exp(y \cdot \ln x)} = \frac{1}{(x \wedge y)},$$

□(Beweis)

$$\forall x : x \in \,]0|+\infty[\, \Rightarrow (x \wedge 0) = 1.$$

<u>Beweis</u>

Für alle $x \in \,]0|+\infty[$ gilt

$$(x \wedge 0) = \exp(0 \cdot \ln x) = \exp 0 = 1.$$

□(Beweis)

$$\forall x : x \in \,]0|+\infty[\, \Rightarrow (x \wedge 1) = x.$$

<u>Beweis</u>

Für alle $x \in \,]0|+\infty[$ gilt

$$(x \wedge 1) = \exp(1 \cdot \ln x) = \exp(\ln x) = x.$$

□(Beweis)

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \Rightarrow (1 \wedge y) = 1.$$

<u>Beweis</u>

Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1 \wedge y) = \exp(y \cdot \ln 1) = \exp(y \cdot 0) = \exp 0 = 1.$$

□(Beweis)

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \Rightarrow (e \wedge y) = \exp y.$$

<u>Beweis</u>

Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(e \wedge y) = \exp(y \cdot \ln e) = \exp(y \cdot 1) = \exp y.$$

$\square$(Beweis)

$$\begin{aligned}&\forall x, u, y : x \in \left]0\right| + \infty\left[\wedge u \in \right]0| + \infty\left[\wedge y \in \mathbb{R}\right.\\ &\qquad \Rightarrow \quad x \cdot u \in \left]0\right| + \infty\left[\wedge (x \cdot u \wedge y) = (x \wedge y) \cdot (u \wedge y)\right..\end{aligned}$$

<u>Beweis</u>

Für alle $x, u \in \left]0\right| + \infty[$ und alle $y \in \mathbb{R}$ gilt klarer Weise $x \cdot u \in \left]0\right| + \infty[$ und

$$\begin{aligned}(x \cdot u \wedge y) &= \exp(y \cdot \ln(x \cdot u)) = \exp(y \cdot ((\ln x) + (\ln u))) = \exp((y \cdot \ln x) + (y \cdot \ln u))\\ &= \exp(y \cdot \ln x) \cdot \exp(y \cdot \ln u) = (x \wedge y) \cdot (u \wedge y).\end{aligned}$$

$\square$(Beweis)

$$\begin{aligned}&\forall x, u, y : x \in \left]0\right| + \infty\left[\wedge u \in \right]0| + \infty\left[\wedge y \in \mathbb{R}\right.\\ &\qquad \Rightarrow \quad \frac{x}{u} \in \left]0\right| + \infty\left[\wedge \left(\frac{x}{u} \wedge y\right) = \frac{(x \wedge y)}{(u \wedge y)}\right..\end{aligned}$$

<u>Beweis</u>

Für alle $x, u \in \left]0\right| + \infty[$ und alle $y \in \mathbb{R}$ gilt klarer Weise $\frac{x}{u} \in \left]0\right| + \infty[$ und

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{u} \wedge y\right) &= \exp\left(y \cdot \ln\left(\frac{x}{u}\right)\right) = \exp(y \cdot ((\ln x) - (\ln u)))\\ &= \exp((y \cdot \ln x) - (y \cdot \ln u)) = \exp((y \cdot \ln x) + (-y \cdot \ln u))\\ &= \exp(y \cdot \ln x) \cdot \exp(-y \cdot \ln u) = (x \wedge y) \cdot \exp((-y) \cdot \ln x)\\ &= (x \wedge y) \cdot (u \wedge -y) = (x \wedge y) \cdot \frac{1}{(u \wedge y)} = \frac{(x \wedge y)}{(u \wedge y)}.\end{aligned}$$

$\square$(Beweis)

$$\forall x, y, z : x \in \left]0\right| + \infty\left[\wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \wedge y) \cdot (x \wedge z) = (x \wedge y + z)\right..$$

<u>Beweis</u>

Für $x \in \left]0\right| + \infty[$ und $y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \cdot (x \wedge z) &= \exp(y \cdot \ln x) \cdot \exp(z \cdot \ln x) = \exp((y \cdot \ln x) + (z \cdot \ln x))\\ &= \exp((y + z) \cdot \ln x) = (x \wedge y + z).\end{aligned}$$

$\square$(Beweis)

$$\forall x, y, z : x \in \left]0\right| + \infty\left[\wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{(x \wedge y)}{(x \wedge z)} = (x \wedge y - z)\right..$$

Beweis
Für $x \in \,]0|+\infty[$ und $y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{(x \wedge y)}{(x \wedge z)} &= \frac{\exp(y \cdot \ln x)}{\exp(z \cdot \ln x)} = \exp(y \cdot \ln x) \cdot \frac{1}{\exp(z \cdot \ln x)} \\ &= \exp(y \cdot \ln x) \cdot \exp(-z \cdot \ln x) = \exp(y \cdot \ln x) \cdot \exp((-z) \cdot \ln x) \\ &= \exp((y \cdot \ln x) + ((-z) \cdot \ln x)) = \exp((y + (-z)) \cdot \ln x) = \exp((y - z) \cdot \ln x \\ &= (x \wedge y - z)\,.\end{aligned}$$

□(Beweis)

$$\forall x, y, z : x \in \,]0|+\infty[\, \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \Rightarrow ((x \wedge y) \wedge z) = (x \wedge y \cdot z)\,.$$

Beweis
Für alle $x \in \,]0|+\infty[$ und $y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}((x \wedge y) \wedge z) &= \exp(z \cdot \ln(x \wedge y)) = \exp(z \cdot \ln(\exp(y \cdot \ln x))) \\ &= \exp(z \cdot (y \cdot \ln x)) = \exp((z \cdot y) \cdot \ln z) = \exp((y \cdot z) \cdot \ln x) \\ &= (x \wedge y \cdot z)\,.\end{aligned}$$

□(Beweis)

12 $(. \wedge \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(. \wedge \alpha) = \{(x, (x \wedge \alpha)) : x \in \,]0|+\infty[\},$$

so dass mit der Notation

$$(. \wedge \alpha)\,(x) = (x \wedge \alpha)\,,$$

die Aussage

$$(. \wedge \alpha) : \,]0|+\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad (. \wedge \alpha)\,(x) = (x \wedge \alpha)\,,$$

gilt. Auch gilt

$$\forall \alpha : 0 \neq \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (. \wedge \alpha) : \,]0|+\infty[\, \to \,]0|+\infty[\quad \text{bijektiv.}$$

Offenbar gilt

$$(. \wedge 0) = 1^{on}]0|+\infty[.$$

dom ran , $\alpha \in \mathbb{R}$
dom $(. \wedge \alpha) = \,]0|+\infty[$.

$0 \neq \alpha \quad \Rightarrow \quad$ ran $(. \wedge \alpha) = \,]0|+\infty[$.
ran $(. \wedge 0) = \{1\}$.

(un-)gerade, $\alpha \in \mathbb{R}$
$\neg((. \wedge \alpha)$ ungerade$)$
$\neg((. \wedge \alpha)$ gerade$)$

Periodizität, $\alpha \in \mathbb{R}$
$0 \neq \alpha \quad \Rightarrow \quad \neg((. \wedge \alpha)$ ist T-periodisch$)$.
$0 \neq T \quad \Rightarrow \quad (. \wedge 0)$ ist T-periodisch.

Monotonie, $\alpha \in \mathbb{R}$
$0 < \alpha \quad \Rightarrow \quad (. \wedge \alpha)$ streng wachsend.
$0 \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad (. \wedge \alpha)$ wachsend.
$\alpha \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (. \wedge \alpha)$ fallend.
$\alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad (. \wedge \alpha)$ streng fallend.

konvex/konkav, $\alpha \in \mathbb{R}$
$1 \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad (. \wedge \alpha)$ konvex.
$0 \leq \alpha \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (. \wedge \alpha)$ konkav.
$\alpha \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (. \wedge \alpha)$ konvex.

Extrema, $\alpha \in \mathbb{R}$
$0 \neq \alpha \quad \Rightarrow \quad \neg((. \wedge \alpha)$ hat in x globales Minimum$)$
$0 \neq \alpha \quad \Rightarrow \quad \neg((. \wedge \alpha)$ hat in x globales Maximum$)$

$\forall x : x \in \left]0\right| + \infty\left[\quad \Rightarrow \quad (. \wedge 0)\right.$ hat in x globales Minimum $\wedge\ (x \wedge 0) = 1$.
$\neg((. \wedge 0)$ hat in x striktes globales Minimum$)$
$\forall x : x \in \left]0\right| + \infty\left[\quad \Rightarrow \quad (. \wedge 0)\right.$ hat in x globales Maximum $\wedge\ (x \wedge 0) = 1$.
$\neg((. \wedge 0)$ hat in x striktes globales Maximum$)$

Stetigkeit, $\alpha \in \mathbb{R}$
$(. \wedge \alpha)$ stetig.

Differenzierbarkeit, $\alpha \in \mathbb{R}$
$(. \wedge \alpha)$ beliebig oft differenzierbar. Aus

$$\forall x : x \in \left]0\right| + \infty\left[\Rightarrow (. \wedge \alpha)\,(x) = \exp(\alpha \cdot \ln x),\right.$$

folgt

$$\begin{aligned} &\forall x : x \in \left]0\right| + \infty\left[\right. \\ &\qquad \Rightarrow (. \wedge \alpha)'\,(x) = \alpha \cdot \ln'(x) \cdot \exp(\alpha \cdot \ln x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot \exp(\alpha \cdot \ln x) \\ &\qquad = \alpha \cdot \exp(\ln(1/x)) \cdot \exp(\alpha \cdot \ln x) = \alpha \cdot \exp((\ln(1/x)) + (\alpha \cdot \ln x)) \\ &\quad = \alpha \cdot \exp((-\ln x) + (\alpha \cdot \ln x)) = \alpha \cdot \exp((-1 + \alpha) \cdot \ln x) = \alpha \cdot (x \wedge -1 + \alpha)\,, \end{aligned}$$

und in einem zweiten Schritt ähnlich

$$\forall x : x \in \left]0\right| + \infty\left[\Rightarrow (. \wedge \alpha)''\,(x) = (-1 + \alpha) \cdot \alpha \cdot (x \wedge -2 + \alpha)\,.\right.$$

Es gilt

$$(. \wedge \alpha)' : \left]0\right| + \infty\left[\to \mathbb{R}, \quad (. \wedge \alpha)'(x) = \alpha \cdot (x \wedge -1 + \alpha)\,.$$

$$(. \wedge \alpha)'' : \left]0\right| + \infty\left[\to \mathbb{R}, \quad (. \wedge \alpha)''(x) = \alpha \cdot (-1 + \alpha) \cdot (x \wedge -2 + \alpha)\,.$$

Spezialfälle:

$$(. \wedge 0)' : \left]0\right| + \infty\left[\to \mathbb{R}, \quad (. \wedge 0)'(x) = 0.$$

$$(. \wedge 0)'' : \left]0\right| + \infty\left[\to \mathbb{R}, \quad (. \wedge 0)''(x) = 0.$$

und

$$(. \wedge 1)' : \left]0\right| + \infty\left[\to \mathbb{R}, \quad (. \wedge 1)'(x) = 1.$$

$$(. \wedge 1)'' : \left]0\right| + \infty\left[\to \mathbb{R}, \quad (. \wedge 1)''(x) = 0.$$

<u>Verhalten bei $\pm\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$</u>

Via

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{y\uparrow+\infty} \exp y = +\infty, \quad \lim_{y\downarrow-\infty} \exp y = 0,$$

ergibt sich

$$\lim_{x\uparrow+\infty} (x \wedge \alpha) = \lim_{x\uparrow+\infty} \exp(\alpha \cdot \ln x) = \begin{cases} +\infty & , \quad 0 < \alpha \\ 1 & , \quad 0 = \alpha \\ 0 & , \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

und ähnlich mit ein wenig mehr Aufwand,

$$\lim_{x\uparrow+\infty} (. \wedge \alpha)'(x) = \lim_{x\uparrow+\infty} \alpha \cdot (x \wedge -1 + \alpha) = \begin{cases} +\infty & , \quad 1 < \alpha \\ 1 & , \quad 1 = \alpha \\ 0 & , \quad \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} (. \wedge \alpha)''(x) = \lim_{x\uparrow+\infty} \alpha \cdot (-1 + \alpha) \cdot (x \wedge -2 + \alpha) = \begin{cases} +\infty & , \quad 2 < \alpha \\ 2 & , \quad 2 = \alpha \\ 0 & , \quad \alpha < 2 \end{cases}$$

<u>Verhalten am Rand, $\alpha \in \mathbb{R}$</u>

Via

$$\lim_{x\downarrow 0} \ln x = .\infty, \quad \lim_{y\uparrow+\infty} \exp y = +\infty, \quad \lim_{y\downarrow-\infty} \exp y = 0,$$

ergibt sich

$$\lim_{x\downarrow 0} (x \wedge \alpha) = \lim_{x\downarrow 0} \exp(\alpha \cdot \ln x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < \alpha \\ 1 & , \quad 0 = \alpha \\ +\infty & , \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

und ähnlich mit ein wenig mehr Aufwand

$$\lim_{x\downarrow 0}(.\wedge\alpha)'(x)=\lim_{x\downarrow 0}\alpha\cdot(x\wedge -1+\alpha)=\begin{cases}0 & , \quad 1<\alpha\\ 1 & , \quad 1=\alpha\\ +\infty & , \quad 0<\alpha<1\\ 0 & , \quad 0=\alpha\\ -\infty & , \quad \alpha<0,\end{cases}$$

$$\lim_{x\downarrow 0}(.\wedge\alpha)''(x)=\lim_{x\downarrow 0}\alpha\cdot(-1+\alpha)\cdot(x\wedge -2+\alpha)=\begin{cases}0 & , \quad 2<\alpha\\ 2 & , \quad 2=\alpha\\ +\infty & , \quad 1<\alpha<2\\ 0 & , \quad 1=\alpha\\ -\infty & , \quad 0<\alpha<1\\ 0 & , \quad 0=\alpha\\ +\infty & , \quad \alpha<0,\end{cases}$$

<u>Spezielle Stellen, $\alpha\in\mathbb{R}$</u>

$$(1\wedge\alpha)=1.$$

<u>spezielle Eigenschaften, $\alpha\in\mathbb{R}$</u>

$$\forall x,y: x\in\,]0|+\infty[\,\wedge\, y\in\,]0|+\infty[\,\Rightarrow (x\cdot y\wedge\alpha)=(x\wedge\alpha)\cdot(y\wedge\alpha)\,.$$

$$\forall x: x\in\,]0|+\infty[\,\Rightarrow (x\wedge -\alpha)=\frac{1}{(x\wedge\alpha)}.$$

$$\forall x,\beta: x\in\,]0|+\infty[\,\wedge\,\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow (x\wedge\alpha)\cdot(x\wedge\beta)=(x\wedge\alpha+\beta)\,.$$

$$\forall x,\beta: x\in\,]0|+\infty[\,\wedge\,\beta\in\mathbb{R}\Rightarrow ((x\wedge\alpha)\wedge\beta)=(x\wedge\alpha\cdot\beta)\,.$$

$$0\neq\alpha\Rightarrow\forall x: x\in\,]0|+\infty[\,\Rightarrow\left(\left(x\wedge\frac{1}{\alpha}\right)\wedge\alpha\right)=\left((x\wedge\alpha)\wedge\frac{1}{\alpha}\right)=x.$$

$$0\neq\alpha\Rightarrow(.\wedge\alpha)^{-1}=\left(.\wedge\frac{1}{\alpha}\right).$$

13 $(a \wedge .)$, $0 < a \in \mathbb{R}$

Für $0 < a \in \mathbb{R}$ ist
$$(a \wedge .) = \{(x, (a \wedge x)) : x \in \mathbb{R}\},$$
so dass mit der Notation
$$(a \wedge .)\,(x) = (a \wedge x)\,,$$
die Aussage
$$(a \wedge .) : \mathbb{R} \to \,]0| + \infty[, \quad (a \wedge .)\,(x) = (a \wedge x)\,,$$
gilt. Auch gilt
$$\forall \alpha : 0 < a \in \mathbb{R} \wedge 1 \neq a \quad \Rightarrow \quad (a \wedge .) : \mathbb{R} \to \,]0| + \infty[\quad \text{bijektiv.}$$
Offenbar gilt
$$(1 \wedge .) = 1^{on}\mathbb{R},$$
und
$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (e \wedge .)\,(x) = (e \wedge x) = \exp(x \cdot \ln e) = \exp(x \cdot 1) = \exp x,$$
so dass
$$(e \wedge .) = \exp\,.$$

<u>$\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$, $0 < a \in \mathbb{R}$</u>
$\mathsf{dom}\ (a \wedge .) = \mathbb{R}$.

$1 \neq a \quad \Rightarrow \quad \mathsf{ran}\ (a \wedge .) = \,]0| + \infty[$
$\mathsf{ran}\ (1 \wedge .) = \{1\}$.

<u>(un-)gerade, $0 < a \in \mathbb{R}$</u>
$\neg((a \wedge .)$ ungerade)

$1 \neq a \quad \Rightarrow \quad \neg((a \wedge .)$ gerade)
$(1 \wedge .)$ gerade.

<u>Periodizität, $0 < a \in \mathbb{R}$</u>
$1 \neq a \quad \Rightarrow \quad \neg((a \wedge .)$ ist T-periodisch).

$0 < T \quad \Rightarrow \quad (1 \wedge .)$ ist T-periodisch.

<u>Monotonie, $0 < a \in \mathbb{R}$</u>
$1 < a \quad \Rightarrow \quad (a \wedge .)$ streng wachsend.
$1 \leq a \quad \Rightarrow \quad (a \wedge .)$ wachsend.
$a \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (a \wedge .)$ fallend.
$a < 1 \quad \Rightarrow \quad (a \wedge .)$ streng fallend.

<u>konvex/konkav, $0 < a \in \mathbb{R}$</u>

$(a \wedge .)$ konvex.

$1 \neq a \quad \Rightarrow \quad \neg((a \wedge .)$ konkav$)$.
$(1 \wedge .)$ konkav.

Extrema, $0 < a \in \mathbb{R}$
$1 \neq a \quad \Rightarrow \quad \neg((a \wedge .)$ hat in x globales Minimum$)$.
$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (1 \wedge .)$ hat in x globales Minimum $\wedge\ (1 \wedge x) = 1$.
$\neg((a \wedge .)$ hat in x striktes globales Minimum$)$.

$1 \neq a \quad \Rightarrow \quad \neg((a \wedge .)$ hat in x globales Maximum$)$.
$x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad (1 \wedge .)$ hat in x globales Maximum $\wedge\ (1 \wedge x) = 1$.
$\neg((a \wedge .)$ hat in x striktes globales Maximum$)$.

Stetigkeit, $0 < a \in \mathbb{R}$
$(a \wedge .)$ stetig.

Differenzierbarkeit, $0 < a \in \mathbb{R}$
$(a \wedge .)$ beliebig oft differenzierbar. Aus

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \wedge .)\,(x) = (a \wedge x) = \exp(x \cdot \ln a),$$

folgt

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \wedge .)'\,(x) = \ln a \cdot \exp(x \cdot \ln a) = \ln a \cdot (a \wedge x)\,,$$

und

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \wedge .)''\,(x) = (\ln a)^2 \cdot (a \wedge x)\,.$$

Es gilt

$$(a \wedge .)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a \wedge .)'(x) = \ln a \cdot (a \wedge x)\,,$$
$$(a \wedge .)'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a \wedge .)''\,(x) = (\ln a)^2 \cdot (a \wedge x)\,.$$

Spezialfälle

$$(1 \wedge .)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (1 \wedge .)'\,(x) = 0,$$
$$(1 \wedge .)'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (1 \wedge .)'' = 0.$$

und via $\ln e = 1$,

$$(e \wedge .)' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (e \wedge .)'\,(x) = (e \wedge x)\,,$$
$$(e \wedge .)'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (e \wedge .)''\,(x) = (e \wedge x)\,,$$

also

$$(e \wedge .) = (e \wedge .)' = (e \wedge .)''\,.$$

Verhalten bei $\pm\infty$, $0 < a \in \mathbb{R}$
Via

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \exp x = +\infty, \qquad \lim_{x \downarrow -\infty} \exp x = 0,$$

und

$$\begin{array}{rcc} 0 < \ln a & \Leftrightarrow & 1 < a, \\ 0 = \ln a & \Leftrightarrow & 1 = a \\ \ln a < 0 & \Leftrightarrow & 0 < a < 1 \end{array}$$

sich

$$\lim_{x\uparrow+\infty} (a \wedge x) = \lim_{x\uparrow+\infty} \exp(x \cdot \ln a) = \begin{cases} +\infty & , \quad 1 < a \\ 1 & , \quad 1 = a \\ 0 & , \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} (a \wedge .)'(x) = \lim_{x\uparrow+\infty} \ln a \cdot (a \wedge x)$$

$$= \lim_{x\uparrow+\infty} \ln a \cdot \exp(x \cdot \ln a) = \begin{cases} +\infty & , \quad 1 < a \\ 0 & , \quad 0 < a \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} (a \wedge .)''(x) = \lim_{x\uparrow+\infty} (\ln a)^2 \cdot (a \wedge x)$$

$$= \lim_{x\uparrow+\infty} (\ln a)^2 \cdot \exp(x \cdot \ln a) = \begin{cases} +\infty & , \quad 1 < a \\ 0 & , \quad 0 < a \leq 1 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x\downarrow-\infty} (a \wedge x) = \lim_{x\downarrow-\infty} \exp(x \cdot \ln a) = \begin{cases} 0 & , \quad 1 < a \\ 1 & , \quad 1 = a \\ +\infty & , \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} (a \wedge .)'(x) = \lim_{x\downarrow-\infty} \ln a \cdot (a \wedge x)$$

$$= \lim_{x\downarrow-\infty} \ln a \cdot \exp(x \cdot \ln a) = \begin{cases} 0 & , \quad 1 \leq a \\ -\infty & , \quad 0 < a \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} (a \wedge .)''(x) = \lim_{x\downarrow-\infty} (\ln a)^2 \cdot (a \wedge x)$$

$$= \lim_{x\downarrow-\infty} (\ln a)^2 \cdot \exp(x \cdot \ln a) = \begin{cases} 0 & , \quad 1 \leq a \\ +\infty & , \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

<u>Verhalten am Rand</u> -

<u>Spezielle Stellen, $0 < a \in \mathbb{R}$</u>

$$(a \wedge 0) = 1, \quad (a \wedge 1) = a.$$

<u>spezielle Eigenschaften, $0 < a \in \mathbb{R}$</u>

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \wedge x + y) = (a \wedge x) \cdot (a \wedge y) .$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (a \wedge -x) = \left(\frac{1}{a} \wedge x\right) = \frac{1}{(a \wedge x)}.$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow ((a \wedge x) \wedge y) = (a \wedge x \cdot y) .$$

$$\forall x, b : x \in \mathbb{R} \wedge 0 < b \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < a \cdot b \in \mathbb{R} \wedge (a \wedge x) \cdot (b \wedge x) = (a \cdot b \wedge x) .$$

14 $\log_a$, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$

$\log_a$ wird für $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$, mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = (a \wedge .)$ und $I = \mathbb{R}$ und $J = (a \wedge .)[\mathbb{R}] = \mathsf{ran}\ (a \wedge .) =]0| + \infty[$ gebildet. Für $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$, ist $(a \wedge .)$ stetig und streng monoton, und zwar streng wachsend für $1 < a$ und streng fallend für $0 < a < 1$. Somit treffen für $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$, die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonleft I)^{-1} = (a \wedge .)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht hier für $a \in \mathbb{R}$ und $0 < a \neq 1$ aus $(a \wedge .)$ und $\mathbb{R}$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g für jedes der genannten a eine Funktion, die mit

$$\log_a,$$

in Abhängigkeit von a mit $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$, bezeichnet wird. $\log_a$ ist die (reelle) Logarithmusfunktion zur Basis a. Aus **UKS - S** folgen für $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$, auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\log_a = (a \wedge .)^{-1},$$

$$\log_a \text{ reelle Funktion,}$$

$$\log_a :]0| + \infty[\to \mathbb{R} \quad \text{bijektiv.}$$

$$1 < a \quad \Rightarrow \quad \log_a \text{ streng wachsend,}$$

$$0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a \text{ streng fallend,}$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \log_a (a \wedge x) = x,$$

$$\forall y : y \in]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad (a \wedge \log_a y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von $(a \wedge .)$, aus $\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \neq (a \wedge .)'(x) = \ln a \cdot (a \wedge x)$ für $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$, folgt

$$\log_a \text{ differenzierbar,}$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \log_a' (a \wedge x) \cdot (a \wedge .)' (x) = \log_a' (a \wedge x) \cdot \ln a \cdot (a \wedge x) = 1,$$

$$\forall y : y \in \left]0\right| + \infty\left[\Rightarrow \right.$$
$$(a \wedge .)' (\log_a y) \cdot \log_a'(y) = \ln a \cdot (a \wedge \log_a y) \cdot \log_a'(y) = \ln a \cdot y \cdot \log_a'(y) = 1.$$

Es folgt die vermutlich aus der Schulmathematik vertraute Aussage

$$\forall y : y \in \left]0\right| + \infty\left[\quad \Rightarrow \quad \log_a'(y) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{y}.\right.$$

Im Spezialfalle $a = e$ ergibt sich

$$\log_e = (e \wedge .)^{-1} = \exp^{-1} = \ln,$$

und in der Tat

$$\forall y : y \in \left]0\right| + \infty\left[\quad \Rightarrow \quad \log_e'(y) = \frac{1}{\ln e} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} = \ln' y.\right.$$

<u>$\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$</u>

$\mathsf{dom}\ \log_a = \left]0\right| + \infty\left[\right.$
$\mathsf{ran}\ \log_a = \mathbb{R}$.

<u>(un-)gerade, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$</u>
$\neg(\log_a$ ungerade).
$\neg(\log_a$ gerade).

<u>Periodizität, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$</u>
$\neg(\log_a$ ist T-periodisch).

<u>Monotonie, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$</u>
$1 < a \quad \Rightarrow \quad \log_a$ streng wachsend.
$0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a$ streng fallend.

<u>konvex/konkav, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$</u>
$1 < a \quad \Rightarrow \quad \log_a$ konkav.
$0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a$ konvex.

<u>Extrema, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$</u>
$\neg(\log_a$ hat in x globales Minimum).
$\neg(\log_a$ hat in x globales Maximum).

<u>Stetigkeit, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$</u>
$\log_a$ stetig.

<u>Differenzierbarkeit, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$</u>
$\log_a$ beliebig oft differenzierbar.

$$\log_a' : \left]0\right| + \infty\left[\to \mathbb{R}, \quad \log_a'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x},\right.$$

$$\log_a'' : \,]0|+\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad \log_a''(x) = -\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x^2},$$

Verhalten bei $\pm\infty$, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$

$$1 < a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \log_a x = +\infty,$$

$$0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \log_a x = -\infty.$$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \log_a'(x) = 0, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \log_a''(x) = 0.$$

Verhalten am Rand, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$

$$1 < a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \downarrow 0} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} \log_a'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} \log_a''(x) = -\infty,$$

$$0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \downarrow 0} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} \log_a'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} \log_a''(x) = +\infty.$$

Spezielle Stellen, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

spezielle Eigenschaften, $0 < a \in \mathbb{R}$, $1 \neq a$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_a (a \wedge x) = x,$$

$$\forall y : y \in \,]0|+\infty[\, \Rightarrow (a \wedge \log_a y) = y,$$

$$\forall x, y : x \in \,]0|+\infty[\, \wedge\, y \in \,]0|+\infty[\, \Rightarrow \log_a(x \cdot y) = (\log_a x) + (\log_a y),$$

$$\forall x : x \in \,]0|+\infty[\, \Rightarrow \log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x.$$

$$\forall x, y : x \in \,]0|+\infty[\, \wedge\, y \in \,]0|+\infty[\, \Rightarrow \log_a(x/y) = (\log_a x) - (\log_a y),$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \log_a(|x \cdot y|) = (\log_a |x|) + (\log_a |y|),$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \log_a \left(\frac{1}{|x|}\right) = -\log_a |x|,$$

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \log_a |x/y| = (\log_a |x|) - (\log_a |y|),$$

$$\forall b, x : 0 < b \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_a (b \wedge x) = x \cdot \log_a b.$$

⋆

Intermezzo
Für alle $y \in \,]0|+\infty[$ gilt

$$(a \wedge \log_a y) = y.$$

Setzt man $x = \log_a y$, so folgt

$$(a \wedge x) = y,$$

so dass diese Gleichung bei gegebenem y die Lösung

$$x = \log_a y$$

hat. Ohne dieses Wissen käme man vielleicht auf die Idee, die Gleichung

$$(a \wedge x) = y,$$

gemäß Definition als

$$\exp(x \cdot \ln a) = y,$$

zu schreiben und dann mit den bekannten Eigenschaften von ln und exp,

$$x \cdot \ln a = \ln(\exp(x \cdot \ln a)) = \ln y,$$

zo folgern, woraus

$$x = \frac{\ln y}{\ln a},$$

folgt. Definiert man mit dieser Überlegung

$$h = \left\{ \left(y, \frac{\ln y}{\ln a} \right) : y \in \left]0\right| + \infty\left[\right\},$$

so stellt man ohne große Mühe

$$h : \left]0\right| + \infty\left[\to \mathbb{R}, \quad h(y) = \frac{\ln y}{\ln a},\right.$$

fest. Auch gilt wegen $0 \neq \ln a \in \mathbb{R}$ - da nach VS $0 < a \in \mathbb{R}$ und $1 \neq a$ -

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow h\,(a \wedge x) = \frac{\ln\,(a \wedge x)}{\ln a} = \frac{\ln(\exp x \cdot \ln a)}{\ln a} = \frac{x \cdot \ln a}{\ln a} = x,$$

und

$$\forall y : y \in \left]0\right| + \infty\left[\Rightarrow\right.$$
$$(a \wedge h(y)) = \exp(h(y) \cdot \ln a) = \exp\left(\frac{\ln y}{\ln a} \cdot \ln a\right) = \exp(\ln y) = y,$$

so dass nun via **UKS - E** die Aussage

$$h = (a \wedge .)^{-1} = \log_a,$$

folgt und sich hieraus

$$\forall y : y \in \left]0\right| + \infty\left[\Rightarrow \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a},\right.$$

ergibt. $\square$(Intermezzo)

$\star$

$$\forall x,b : x \in \,]0|+\infty[\, \wedge\, 0 < b \in \mathbb{R} \wedge 1 \neq b \Rightarrow \\ \ln a \cdot \log_a x = \ln x = \ln b \cdot \log_b x,$$

$$\forall x,b : x \in \,]0|+\infty[\, \wedge\, 0 < b \in \mathbb{R} \wedge 1 \neq b \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \log_b x,$$

$$\forall x,y,b : x \in \,]0|+\infty[\, \wedge\, y \in \,]0|+\infty[\, \wedge\, 0 < b \in \mathbb{R} \wedge 1 \neq b \Rightarrow \\ \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}.$$

$$\forall x,b,c : x \in \,]0|+\infty[\, \wedge\, 0 < b,c \in \mathbb{R} \wedge 1 \neq b,c \Rightarrow \log_a x = \frac{\log_c b}{\log_c a} \cdot \log_b x.$$