Vorkurs Mathematik
Einige Begriffe der Mengenlehre

Andreas Unterreiter

27. Juni 2020

In diesem Kapitel geht es in loser Abfolge um Notationen und Definitionen der Mengenlehre. Wichtigstes Ziel ist es, " f Funktion" mengentheoretisch zu definieren.

$\boxed{\cap \textbf{ und } \cup}$ Wiederholdend seien hier

$$\text{"}x \cap y \text{ binärer Durchschnitt von } x \text{ und } y\text{"} \wedge \boxed{x \cap y = \{\omega : \omega \in x \wedge \omega \in y\}}$$

und

$$\text{"}x \cup y \text{ binäre Vereinigung von } x \text{ und } y\text{"} \wedge \boxed{x \cup y = \{\omega : \omega \in x \vee \omega \in y\}}$$

festgestellt.

$\boxed{\bigcap \textbf{ und } \bigcup}$

$$\text{"}\bigcap x \text{ Durchschnitt von } x\text{"} \wedge \boxed{\bigcap x = \{\omega : \forall p : p \in x \Rightarrow \omega \in p\}}$$

$$\text{"}\bigcup x \text{ Vereinigung von } x\text{"} \wedge \boxed{\bigcup x = \{\omega : \exists p : p \in x \wedge \omega \in p\}}$$

$\boxed{\setminus \textbf{ und } \Delta}$

$$\text{"}x \setminus y \text{ Klassen-Differenz von } x \text{ und } y\text{"} \wedge \boxed{x \setminus y = \{\omega : \omega \in x \wedge \omega \notin y\}}$$

Es gilt

$$(x \setminus y) \setminus z = x \setminus (y \cup z),$$

$$x \setminus (y \setminus z) = (x \setminus y) \cup (x \cap z).$$

$$x \setminus y = y \setminus x \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

“ $x\Delta y$ symmetrische Klassen-Differenz von x und y” $\wedge$ $\boxed{x\Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)}$

Es gilt

$$x\Delta y = y\Delta x,$$

$$x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z,$$

$$x\Delta y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

$\boxed{\{x\} \textbf{ und } \{x,y\}}$

“ $\{x\}$ Singelton x” $\wedge$ $\boxed{\{x\} = \{\omega : \omega = x\}}$

“ $\{x,y\}$ ungeordnetes Paar von x und y” $\wedge$ $\boxed{\{x,y\} = \{\omega : \omega = x \vee \omega = y\}}$

Es gilt

$$\{x,y\} = \{y,x\},$$

$$\{x,y\} = \{x\} \cup \{y\}.$$

$\boxed{\textbf{geordnetes Paar}}$ Geordnete Paare sind spezielle Klassen.

“ (x,y) geordnetes Paar von x und y”

Es gilt

$$(x,y) \text{ Menge} \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ Menge} \wedge y \text{ Menge}$$

sowie

$$x \text{ Menge} \wedge y \text{ Menge} \wedge (x,y) = (u,v)$$
$$\Rightarrow \quad x = u \wedge y = v \wedge u \text{ Menge} \wedge v \text{ Menge}.$$

Auf Grund der allgemein gültigen Ersetzungsregel gilt natürlich

$$x = u \wedge y = v \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (u,v).$$

Auch gilt

$$x \text{ Menge} \wedge y \text{ Menge} \wedge (x,y) = (y,x) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

und somit

$$x \text{ Menge} \wedge y \text{ Menge} \wedge x \neq y \quad \Rightarrow \quad (x,y) \neq (y,x)$$

$\boxed{\mathsf{dom}\, M}$

$$\text{“}\mathsf{dom}\, M \text{ Definitions-Bereich von } M\text{”} \wedge \boxed{\mathsf{dom}\, M = \{\omega : \exists q : (\omega, q) \in M\}}$$

Es gilt

$$M \subseteq N \quad \Rightarrow \quad \mathsf{dom}\, M \subseteq \mathsf{dom}\, N,$$
$$\mathsf{dom}\, (M \cup N) = (\mathsf{dom}\, M) \cup (\mathsf{dom}\, N),$$
$$\mathsf{dom}\, (M \cap N) \subseteq (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{dom}\, N).$$

$\boxed{\mathsf{ran}\, M}$

$$\text{“}\mathsf{ran}\, M \text{ Bild-Bereich von } M\text{”} \wedge \boxed{\mathsf{ran}\, M = \{\omega : \exists p : (p, \omega) \in M\}}$$

Es gilt

$$M \subseteq N \quad \Rightarrow \quad \mathsf{ran}\, M \subseteq \mathsf{ran}\, N,$$
$$\mathsf{ran}\, (M \cup N) = (\mathsf{ran}\, M) \cup (\mathsf{ran}\, N),$$
$$\mathsf{ran}\, (M \cap N) \subseteq (\mathsf{ran}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, N).$$

$\boxed{M[A]}$

$$\text{“}M[A] \text{ Bild von } A \text{ unter } M\text{”} \wedge \boxed{M[A] = \{\omega : \exists a : a \in A \wedge (a, \omega) \in M\}}$$

Es gilt

$$M[A] \subseteq \mathsf{ran}\, M,$$
$$M[\mathsf{dom}\, M] = \mathsf{ran}\, M,$$
$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad M[A] \subseteq M[B],$$
$$M \subseteq N \quad \Rightarrow \quad M[A] \subseteq N[A].$$

$\boxed{(M \downharpoonleft E)}$

$$\text{“}(M \downharpoonleft E) \text{ Einschränkung von } M \text{ auf } E\text{”}$$
$$\wedge \boxed{(M \downharpoonleft E) = \{(x, y) : x \in E \wedge (x, y) \in M\}}$$

Es gilt

$$(M \downharpoonleft E) \subseteq M,$$
$$\mathsf{dom}\, (M \downharpoonleft E) = E \cap \mathsf{dom}\, M,$$
$$\mathsf{ran}\, (M \downharpoonleft E) = M[E],$$

$$E \subseteq D \quad \Rightarrow \quad (M \downharpoonleft E) \subseteq (M \downharpoonleft D),$$

$$M \subseteq N \quad \Rightarrow \quad (M \downharpoonleft E) \subseteq (N \downharpoonleft E).$$

$\boxed{M^{-1}}$

$$\text{“}M^{-1} \text{ Relation invers zu } M\text{”} \wedge \boxed{M^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in M\}}$$

Es gilt

$$\mathsf{dom}\,(M^{-1}) = \mathsf{ran}\,M,$$

$$\mathsf{ran}\,(M^{-1}) = \mathsf{dom}\,M,$$

$$M \subseteq N \quad \Rightarrow \quad M^{-1} \subseteq N^{-1},$$

$$(M^{-1})^{-1} \subseteq M.$$

$\boxed{M^{-1}[A]}$

$$\text{“}M^{-1}[A] \text{ Urbild von } A \text{ unter } M\text{”} \wedge \boxed{M^{-1}[A] = \{\omega : \exists a : a \in A \wedge (\omega, a) \in M\}}$$

Es gilt

$$M^{-1}[A] \text{ Bild von } A \text{ unter } M^{-1},$$

$$M^{-1}[A] \subseteq \mathsf{dom}\,M,$$

$$M^{-1}[\mathsf{ran}\,M] = \mathsf{dom}\,M,$$

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad M^{-1}[A] \subseteq M^{-1}[B],$$

$$M \subseteq N \quad \Rightarrow \quad M^{-1}[A] \subseteq N^{-1}[A].$$

$\boxed{M \circ N}$

$$\text{“}M \circ N \text{ Komposition von } M \text{ und } N\text{”}$$
$$\wedge \boxed{M \circ N = \{(x,y) : \exists \omega : (x,\omega) \in N \wedge (\omega, y) \in M\}}$$

Es gilt

$$\mathsf{dom}\,(M \circ N) \subseteq \mathsf{dom}\,N,$$

$$\mathsf{dom}\,(M \circ N) = N^{-1}[\mathsf{dom}\,M],$$

$$\mathsf{ran}\,(M \circ N) \subseteq \mathsf{ran}\,M,$$

$$\mathsf{ran}\,(M \circ N) = M[\mathsf{ran}\,N],$$

$$M \circ (N \circ P) = (M \circ N) \circ P,$$

$$M \subseteq P \quad \Rightarrow \quad M \circ N \subseteq P \circ N,$$

$$N \subseteq P \quad \Rightarrow \quad M \circ N \subseteq M \circ P.$$

$\boxed{M(p)}$

$$\text{“}\,M(p) \text{ Wert von } M \text{ in } p\text{”} \wedge \boxed{M(p) = \bigcap M[\{p\}]}$$

Hier ist bemerkenswert, dass der Wert von M in p auf jeden Fall eine Klasse ist.

$\boxed{\text{injektiv}}$

$$M \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y, u : (x, y) \in M \wedge (u, y) \in M \Rightarrow x = u$$

Anschaulich gesprochen: M ist genau dann injektiv, wenn bei jedem geordneten Paar, das Element von M ist, die erste Koordinate durch die zweite Koordinate festgelegt ist.

$\boxed{\textbf{Relation}}$

$$r \text{ Relation} \quad \Leftrightarrow \quad \forall w : w \in r \Rightarrow \exists x, y : w = (x, y)$$

r ist also genau dann eine Relation, wenn r nur aus geordneten Paaren besteht. Es gilt

$$0 \text{ Relation},$$

$$(M \downharpoonleft E) \text{ Relation},$$

$$M^{-1} \text{ Relation},$$

$$M \circ N \text{ Relation}.$$

. Es gilt

$$s \subseteq r \wedge r \text{ Relation} \quad \Rightarrow \quad s \text{ Relation},$$

$$r \text{ Relation} \quad \Rightarrow \quad r \cap z \text{ Relation} \wedge z \cap r \text{ Relation} \wedge r \setminus z \text{ Relation}.$$

Es gilt

$$r \text{ Relation} \wedge s \text{ Relation} \quad \Rightarrow \quad r \cup s \text{ Relation} \wedge r \Delta s \text{ Relation}.$$

Es gilt unter Zugrundelegung eines Einverständnisses über den Umgang mit den beiden “...” ,

$$n \in \mathbb{N} \wedge (r_0 \text{ Relation} \wedge r_1 \text{ Relation} \wedge r_2 \text{ Relation} \wedge \ldots \wedge r_n \text{ Relation}) \quad \Rightarrow \quad r_0 \cup r_1 \cup r_2 \cup \ldots \cup r_n \text{ Relation.}$$

$\boxed{D \times B}$

"$D \times B$ binäres cartesisches Produkt von $D \times B$" $\wedge \boxed{D \times B = \{(x,y) : x \in D \wedge y \in B\}}$

Es gilt

$$D \subseteq E \quad \Rightarrow \quad D \times B \subseteq E \times B,$$

$$B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad D \times B \subseteq D \times C,$$

$$\mathsf{dom}\,(D \times B) \subseteq D,$$
$$\mathsf{ran}\,(D \times B) \subseteq B,$$
$$(D \times B)^{-1} = B \times D,$$

$$r \text{ Relation} \quad \Rightarrow \quad r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r),$$

$$r \subseteq D \times B \quad \Rightarrow \quad r \text{ Relation.}$$

Funktion

$$f \text{ Funktion} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ Relation} \wedge \forall x, y, u : (x,y) \in f \wedge (x,u) \in f \Rightarrow y = u$$

Anschaulich gesprochen: f ist genau dann eine Funktion, wenn f eine Relation ist und wenn bei jedem geordneten Paar, das Element von f ist, die zweite Koordinate durch die erste Koordinate festgelegt ist.

Es gilt

$$f \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad f = \{(x, f(x)) : x \in \mathsf{dom}\, f\}$$

$$f \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} = \{(f(x), x) : x \in \mathsf{dom}\, f\}$$

$$f \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad (f \downharpoonleft E) = \{(x, f(x)) : x \in E \cap \mathsf{dom}\, f\}$$

Es gilt

$$f \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{ran}\, f = \{f(x) : x \in \mathsf{dom}\, f\}$$

$$f \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad f[A] = \{f(a) : a \in A \cap \mathsf{dom}\, f\}$$

$$f \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}[A] = \{x : f(x) \in A \cap \mathsf{ran}\, f\}$$

Es gilt

$$f \text{ Funktion} \wedge g \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad f \circ g \text{ Funktion} \wedge (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

wobei hier die in der zweiten Konklusion auftretetende freie Variable "x" nicht in den Prämissen vorkommt, also eine beliebige Klasse sein kann. Es gilt

$$g \subseteq f \wedge f \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad g \text{ Funktion} \wedge \forall x : x \in \mathsf{dom}\, g \Rightarrow g(x) = f(x)$$

Es gilt

$$f \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad f \cap z \text{ Funktion} \wedge z \cap f \text{ Funktion} \wedge f \setminus z \text{ Funktion}$$

Es gilt

$$0 \text{ Funktion}$$

Es gilt

$$f \text{ Funktion} \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in E \cap \mathsf{dom}\, f \Rightarrow (f \downharpoonleft E)\,(x) = f(x)$$

Es gilt

$$
\begin{array}{ll}
 & f \text{ Funktion} \\
\wedge & g \text{ Funktion} \\
\wedge & \forall x : x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) \Rightarrow f(x) = g(x) \\
 & \\
\Rightarrow & \\
 & f \cup g \text{ Funktion} \\
\wedge & \forall x : x \in \mathsf{dom}\, f \Rightarrow (f \cup g)(x) = f(x) \\
\wedge & \forall x : x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (f \cup g)(x) = f(x) \\
\wedge & \forall x : x \in (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g) \Rightarrow (f \cup g)(x) = g(x) \\
\wedge & \forall x : x \in \mathsf{dom}\, g \Rightarrow (f \cup g)(x) = g(x)
\end{array}
$$

Es gilt

f Funktion

$\wedge$ g Funktion

$\wedge$ $0 = (\mathsf{dom}\, f) \cap (\mathsf{dom}\, g)$

$\Rightarrow$

$f \cup g$ Funktion

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\, f \Rightarrow (f \cup g)(x) = f(x)$

$\wedge$ $\forall x : x \in \mathsf{dom}\, g \Rightarrow (f \cup g)(x) = g(x)$

Es gilt

f Funktion $\quad\Rightarrow\quad$ f^{-1} injektiv

f Relation $\wedge$ f^{-1} injektiv $\quad\Rightarrow\quad$ f Funktion

M^{-1} Funktion $\quad\Rightarrow\quad$ M injektiv

$\boxed{f : D \to B}$

$$f : D \to B \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ Funktion} \wedge D = \mathsf{dom}\, f \wedge \mathsf{ran}\, f \subseteq B$$

Es gilt

$$0 : 0 \to 0.$$

Es gilt

$$f : D \to B \quad \Rightarrow \quad f = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

$$f : D \to B \quad \Rightarrow \quad f \subseteq D \times B \wedge f^{-1} \subseteq B \times D$$

$$f : D \to B \quad \Rightarrow \quad f[A] \subseteq B \wedge f[D] = B \wedge f[A] = \{f(a) : a \in A \cap D\}$$

$$f : D \to B \quad \Rightarrow \quad (f \restriction E) : E \cap D \to B$$

$$f : D \to B \quad \Rightarrow \quad f^{-1}[A] \subseteq D \wedge f^{-1}[B] = D \wedge f^{-1}[A] = \{x : f(x) \in A \cap B\}$$

$$f : D \to B \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in D \Rightarrow f(x) \in B$$

Es gilt

$$f : D \to B \wedge g : E \to C \quad \Rightarrow \quad f \circ g : g^{-1}[D] \to f[C]$$

$$f : D \to B \wedge g : E \to C \quad \Rightarrow \quad f \circ g : g^{-1}[D] \to B$$

Es gilt

$$f : D \to B \wedge g : E \to C \wedge \mathsf{ran}\, g \subseteq D \quad \Rightarrow \quad f \circ g : E \to B$$

$$f : D \to B \wedge g : E \to C \wedge C \subseteq D \quad \Rightarrow \quad f \circ g : E \to B$$

$$f : D \to B \wedge g : E \to D \quad \Rightarrow \quad f \circ g : E \to B$$

$\boxed{f : D \to B \text{ injektiv}}$

$$f : D \to B \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f : D \to B \wedge f \text{ injektiv}.$$

Es gilt

$$f : D \to B \text{ injektiv} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : \mathsf{ran}\, f \to D \text{ injektiv}.$$

$$f : D \to B \text{ injektiv} \quad \Rightarrow \quad f : D \to \mathsf{ran}\, f \text{ bijektiv}.$$

$\boxed{f : D \to B \text{ bijektiv}}$

$$f : D \to B \text{ bijektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f : D \to B \text{ injektiv} \wedge B = \mathsf{ran}\, f.$$

Es gilt

$$f : D \to B \text{ bijektiv} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} : B \to D \text{ bijektiv}$$

$$f : D \to B \text{ bijektiv} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} \circ f = \mathsf{id}_D \wedge \forall x : x \in D \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

$$f : D \to B \text{ bijektiv} \quad \Rightarrow \quad f \circ f^{-1} = \mathsf{id}_B \wedge \forall t : t \in B \Rightarrow f(f^{-1}(t)) = (f \circ f^{-1})(t) = t.$$