Vorkurs Mathematik
12 Lineare Gleichungssysteme und das Gaußsche Eliminationsverfahren

Andreas Unterreiter

1. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 $a \cdot x = b$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ und

$$\mathbb{L} = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge a \cdot x = b\}.$$

$\mathbb{L}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$a \cdot x = b.$$

Die Anzahl der Elemente von $\mathbb{L}$ variiert in Abhängigkeit von a und b.

$\underline{0 \neq a.}$ In diesem Fall ergibt sich mit Schulmathematik die erwartete Gleichung

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}.$$

$\underline{0 = a \wedge 0 \neq b.}$ Die Gleichung hat die Form

$$0 \cdot x = b,$$

und da für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$0 \cdot x = 0,$$

gilt, aber $0 \neq b$ vorausgesetzt ist, kann es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot x = b$ geben. Es folgt

$$\mathbb{L} = 0.$$

$\underline{0 = a \wedge 0 = b.}$ In diesem Fall lautet die Gleichung

$$0 \cdot x = 0,$$

und diese Aussage ist *für alle* reellen x wahr. Es folgt

$$\mathbb{L} = \mathbb{R}.$$

Nun sollen einige Fragen zu $\mathbb{L}$ rigoros beantwortet werden.

<u>Wieviele Elemente kann $\mathbb{L}$ haben?</u> Unabhängig von a oder b gilt

$$\#(\mathbb{L}) = 0 \quad \vee \quad \#(\mathbb{L}) = 1 \quad \vee \quad \#(\mathbb{L}) = +\infty,$$

so dass die Gleichung

$$a \cdot x = b,$$

entweder keine oder genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.

Wann ist $-\dfrac{b}{a}$ eine Lösung von $a \cdot x = b$? Dies ist genau dann der Fall, wenn $0 \neq a$ oder $0 = a = b$ gilt. Im zweiten Fall ist jedes reelle x Lösung von $a \cdot x = b$, also ist im Speziellen auch

$$-\frac{b}{a} = -\frac{0}{0} = -0 = 0,$$

Lösung von $a \cdot x = b$.

Wann ist $a \cdot x = b$ eindeutig lösbar? Dies ist genau dann der Fall, wenn $\#(\mathbb{L}) = 1$ und dies ist äquivalent zu $0 \neq a$. In diesem Fall ist $-\dfrac{b}{a}$ die eindeutige Lösung von $a \cdot x = b$.

Wann ist $a \cdot x = b$ nicht lösbar? Die Gleichung $a \cdot x = b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\#(\mathbb{L}) = 0$ und dies ist äquivalent zu $0 = a \wedge 0 \neq b$.

Wann hat $a \cdot x = b$ unendlich viele Lösungen? Dies ist genau dann der Fall, wenn $\#(\mathbb{L}) = +\infty$ und dies ist äquivalent zu $0 = a \wedge 0 = b$. In diesem Fall gilt $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Wann ist $a \cdot x = b$ lösbar? Hier ist $0 \neq \mathbb{L}$ gemeint und im Hinblick auf bereits Bekanntes ist dies genau dann der Fall, wenn $\#(\mathbb{L}) = 1$ oder $\#(\mathbb{L}) = +\infty$. Also liegt Lösbarkeit genau dann vor, wenn $0 \neq a$ oder $0 = a \wedge 0 = b$ gilt.

Wann ist $a \cdot x = b$ nicht-eindeutig lösbar? Die Frage zielt auf jene Fälle ab, in denen $a \cdot x = b$ lösbar ist, aber mehr als eine - also mindestens zwei - Lösungen hat. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn $\mathbb{L}$ *unendlich* viele Elemente hat. Äquivalent hierzu ist $0 = a \wedge 0 = b$.

Wann ist $a \cdot x = b$ *nicht* eindeutig lösbar? Anders als im vorherigen Fall zielt die Frage auf $\neg(\#(\mathbb{L}) = 1)$ ab. Also ist $a \cdot x = b$ entweder gar nicht lösbar oder $a \cdot x = b$ hat mindestens zwei Lösungen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\#(\mathbb{L}) = 0$ oder $\#(\mathbb{L}) = +\infty$. Äquivalent hierzu ist $0 = a$.

2 Intermezzo: Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Das Gaußsche Eliminationsverfahren besteht in sukzessiven Manipulationen von Matrizen, um an geeigneten Stellen Nullen zu erzeugen. Dabei wird die Lösungsmenge des korrespondierenden linearen Gleichungssystems nicht verändert. Am Ende wird eine Matrix erhalten, deren korrespondierendes lineares Gleichungssystem einfach zu lösen ist.

Im Rahmen des Vorkurses wird eine obere Dreiecksform angestrebt.

Die im Vorkurs zum Einsatz kommenden Manipulationen sind:

1) Eine Zeile mit einer Zahl$\neq 0$ multiplizieren.
2) Zwei Zeilen vertauschen.
3) Zu einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile addieren.

Es gibt weitere Manipulationen, die hier nicht weiter besprochen werden.

Genauere Erklärungen werden nicht gegeben, es soll learning-by-doing erfolgen.

3 3×4 System - 1

Es sollen all jene $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ ermittelt werden, für die

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2 & \cdot & x & + & & & y & - & 2 & \cdot & z & + & 3 & \cdot & u & = & 1 \\ 3 & \cdot & x & + & 2 & \cdot & y & - & & & z & + & 2 & \cdot & u & = & 4 \\ 3 & \cdot & x & + & 3 & \cdot & y & + & 3 & \cdot & z & - & 3 & \cdot & u & = & 5 \end{array}$$

gilt. Die Menge all jener (x, y, z, u) wird mit $\mathbb{L}$ bezeichnet. Zur Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens ist es erforderlich, die Subtraktionen durch Additionen zu ersetzen und jede Variable mit einem Koeffizienten zu versehen.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 2 & \cdot & x & + & 1 & \cdot & y & + & (-2) & \cdot & z & + & 3 & \cdot & u & = & 1 \\ 3 & \cdot & x & + & 2 & \cdot & y & + & (-1) & \cdot & z & + & 2 & \cdot & u & = & 4 \\ 3 & \cdot & x & + & 3 & \cdot & y & + & 3 & \cdot & z & + & (-3) & \cdot & u & = & 5 \end{array}$$

Im nächsten Schritt wird dieses lineare Gleichungssystem als Matrix geschrieben. In der ersten Spalte stehen die Koeffizienten von x, in der zweiten Spalte stehen die Koeffizienten von y, in der dritten Spalte stehen die Koeffizienten von z und in der vierten Spalte stehen die Koeffizienten von u.

In der ersten Zeile stehen die Koeffizienten der ersten Gleichung und die erste rechte Seite, in der zweiten Zeile stehen die Koeffizienten der zweiten Gleichung und die zweite rechte Seite und in der dritten Zeile stehen die Koefiizienten der dritten Gleichung udn die dritte rechte Seite.

Es ergibt sich die Matrixversion des linearen Gleichungssystems.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Auf diese Matrix wird das Gaußsche Eliminationsverfahren angewendet. Ziel ist es, obere Dreiecksgestalt zu erreichen. Diese hat im vorliegenden Fall die Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right),$$

wobei jeder Stern $*$ für eine reelle Zahl steht.

Zur Erklärung, aber auch um eventuelle Rechenfehler aufzuspüren werden die Manipulationen notiert. Die Zeilen werden mit römischen Ziffern von oben nach unten durchnummeriert.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}+(-1)\cdot\mathrm{II}}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{I}}{\to}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & 5 & -5 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+3\cdot\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Bereits nach drei Schritten ist die angestrebte obere Dreiecksform erreicht. Das korrespondierende lineare Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} (-1) & \cdot & x & + & (-1) & \cdot & y & + & (-1) & \cdot & z & + & 1 & \cdot & u & = & -3 \\ 0 & \cdot & x & + & (-1) & \cdot & y & + & (-4) & \cdot & z & + & 5 & \cdot & u & = & -5 \\ 0 & \cdot & x & + & 0 & \cdot & y & + & 0 & \cdot & z & + & 0 & \cdot & u & = & -4 \end{array},$$

oder etwas lesbarer,

$$\begin{array}{ccccccccc} -x & - & y & - & z & + & u & = & -3 \\ & & -y & - & 4\cdot z & + & 5\cdot u & = & -5 \\ & & & & & & 0 & = & -4 \end{array}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist wegen der letzten Gleichung nicht lösbar. Da es die gleiche Lösungsmenge wie das ursprüngliche lineare Gleichungssystem hat, gilt

$$\mathbb{L} = 0.$$

4 3×3 System - 1

Es soll die Lösuungsmenge $\mathbb{L}$ des linearen Gleichungssystem korrespondierend zur Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right),$$

ermittelt werden. Die angestrebte obere Dreiecksform ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right) \overset{\text{II}+(-1)\cdot\text{I}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \end{array}\right) \overset{\text{III}+(-2)\cdot\text{I}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}+(-1)\cdot\text{II}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Die obere Dreiecksform ist erreicht. Das korrespondierende lineare Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2\cdot y & + & 3\cdot z & = & 4 \\ & & y & + & 4\cdot z & = & 7 \\ & & & & z & = & 1 \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann *von unten nach oben* aufgelöst werden. Die dritte Gleichung lautet

$$z = 1.$$

Wird diese Information in die zweite Gleichung eingesetzt, folgt

$$y + 4 \cdot 1 = 7,$$

woraus sich ohne viel Mühe

$$y = 3,$$

ergibt. Mit den bisherigen Ergebnissen folgt nun aus der ersten Gleichung,

$$x + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 4,$$

also

$$x + 3 = 4,$$

so dass

$$x = 1.$$

Damit ist

$$(1, 3, 1),$$

Lösung des linearen Gleichungssystems in oberer Dreiecksform. Dieses hat die gleiche Lösungsmenge wie das ursprüngliche lineare Gleichungssystem. Es folgt

$$\mathbb{L} = \{(1, 3, 1)\},$$

und das lineare Gleichungssystem ist somit eindeutig lösbar.

Probe Zur Überprüfung soll der Frage nachgegangen werden, ob das gefundene Tripel $(1, 3, 1)$ tatsächlich Lösung des ursprünglichen, der eingangs erwähntenn Matrixform entsprechenden, linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2\cdot y & + & (-3)\cdot z & = & 4 \\ x & + & 3\cdot y & + & z & = & 11 \\ 2\cdot x & + & 5\cdot y & - & 4\cdot z & = & 13 \end{array}$$

ist. Dazu wird entsprechend $\mathbb{L}$ in diesem System x durch -1, y durch 1 und z durch 1 ersetzt. Es folgen die Aussagen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1 & + & 2\cdot 3 & + & (-3)\cdot 1 & = & 4 \\ 1 & + & 3\cdot 3 & + & 1 & = & 11 \\ 2\cdot 1 & + & 5\cdot 3 & - & 4\cdot 1 & = & 13 \end{array},$$

also

$$\begin{array}{rcr} 1+6-3 & = & 4 \\ 1+9+1 & = & 11 \\ 2+15-4 & = & 13 \end{array}$$

Alle Aussagen sind wahr. Die Probe ist bestanden. $\square$(Probe)

Geometrische Interpretation: Drei Ebenen im Raum, die sich in einem Punkt schneiden.

5 3×4 System - 2

Die angestrebte obere Dreiecksform von

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right),$$

ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right) \overset{\text{II}+(-2)\cdot\text{I}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right) \overset{\text{III}+(-5)\cdot\text{I}}{\rightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

und obwohl hier die obere Dreiecksform erreicht ist, wird noch eine Manipulation getätigt, um die letzte Zeile, die offensichtlich gleich der zweiten Zeile ist, in eine Nullzeile überzuführen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{III}+(-1)\cdot\text{II}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Matrix korrespondiert zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\cdot y & - & 2\cdot z & + & 3\cdot u & = & 2 \\ & & & & z & - & 2\cdot u & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Die dritte Zeile liefert keine Information. Die zweite Zeile enthält zwei Unbekannte, für die keine weiteren Informationen vorliegen. Jede der beiden Variablen kann durch die andere dargestellt werden, so dass stets eine Variable frei gewählt werden kann, um die andere fest zu legen. Hier soll u frei gewählt werden. Um zu betonen, dass u jeden Wert in $\mathbb{R}$ annehmen kann, wird an Stelle von u eine neue Variable t verwendet. Per definitionem gilt dann $t \in \mathbb{R}$,

$$u = t,$$

und aus der zweiten Gleichung folgt

$$z - 2\cdot u = z - 2\cdot t = 1,$$

so dass

$$z = 1 + 2\cdot t.$$

Die bisherigen Informationen über z und u werden nun in der ersten Gleichung

$$x + 2\cdot y - 2\cdot z + 3\cdot u = 2,$$

verwendet. Es folgt

$$x + 2\cdot y - 2\cdot(1 + 2\cdot t) + 3\cdot t = 2,$$

also auch

$$x + 2\cdot y = 2 + 2 + 4\cdot t - 3\cdot t = 4 + t.$$

Neuerlich kann eine der beiden Unbekannten x oder y frei gewählt werden. Entscheidet man sich für y und bezeichnet y mit einer neuen Variablen s, so folgt

$$y = s,$$

und somit aus der bereits umgeformten ersten Gleichung,

$$x + 2\cdot y = x + 2\cdot s = 4 + t,$$

also

$$x = 4 + t - 2\cdot s.$$

Zusammenfassend gilt für alle t, s mit $t \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$, dass

$$(x, y, z, u) = (4 + t - 2\cdot s, s, 1 + 2\cdot t, t),$$

eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist. Durch Trennen der Konstanten von den Termen, die t oder s erhalten, erhält man

$$\begin{aligned}(x,y,z,u) &= (4+t-2\cdot s, s, 1+2\cdot t, t)\\ &= (4,0,1,0)+(t-2\cdot s, s, 2\cdot t, t)\\ &= (4,0,1,0)+(t,0,2\cdot t,t)+(-2\cdot s, s, 0, 0)\\ &= (4,0,1,0)+t\cdot(1,0,2,1)+(-2\cdot s, s,0,0)\\ &= (4,0,1,0)+t\cdot(1,0,2,1)+s\cdot(-2,1,0,0).\end{aligned}$$

Die Gleichung

$$(x,y,z,u) = (4,0,1,0)+t\cdot(1,0,2,1)+s\cdot(-2,1,0,0).$$

ist so zu verstehen: Für jede Wahl von $t \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ ergibt sich ein Quadrupel (x,y,z,u), das Lösung des linearen Gleichungssystems ist.

So liefert etwa die spezielle Wahl $t =$ und $s = 0$ die Lösung

$$(4,0,1,0),$$

die Wahl $t = 1$ und $s = 0$ liefert die Lösung

$$(4,0,1,0)+1\cdot(1,0,2,1) = (4,0,1,0)+(1,0,2,1) = (5,0,3,1),$$

die Wahl $t = 0$ und $s = 1$ liefert die Lösung

$$(4,0,1,0)+1\cdot(-2,1,0,0) = (4,0,1,0)+(-2,1,0,0) = (2,1,1,0),$$

die Wahl $t = 1$ und $s = -1$ liefert die Lösung

$$\begin{aligned}&(4,0,1,0)+1\cdot(1,0,2,1)+(-1)\cdot(-2,1,0,0)\\ &\qquad = (4,0,1,0)+(1,0,2,1)+(2,-1,0,0) = (7,-1,3,1).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathbb{L} = \{(4,0,1,0)+t\cdot(1,0,2,1)+s\cdot(-2,1,0,0) : t\in\mathbb{R}\wedge s\in\mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{L}$ ist unendlich. Die Elemente von $\mathbb{L}$ werden durch zwei verschiedene (gebundene) Variablen fest gelegt. Man spricht von einem zweidimensionelen Lösungsraum.

Probe Die erhaltenen Lösungsmenge $\mathbb{L}$ besteht aus Quadrupeln der Form

$$(4,0,1,0)+t\cdot 1,0,2,1)+s\cdot(-2,1,0,0),$$

mit $t\in\mathbb{R}$ und $s\in\mathbb{R}$. In diesem Term erscheinen die drei Quadrupeln

$$(4,0,1,0,\quad ((1,0,2,1),\quad (-2,1,0,0).$$

Das Quadrupel $(4, 0, 1, 0)$ wird mit keiner Variablen multipliziert und heisst partikuläre Lösung des linearen Gleichungssystems. Die beiden anderen Quadrupel $(1, 0, 2, 1)$ und $(-2, 1, 0, 0)$ werden mit t oder s multipliziert und heissen Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems. Damit ist gemeint: werden die vier Koordinaten dieser Quadrupel in die linke Seite des linearen Gleichungssystems für x, y, z, u eingesetzt so ergibt sich ein Term, der$= 0$ ist.

Mit diesen Zusatzinformationen aus der hier nicht weiter vertieften Theorie linearer Gleichungssysteme gibt es drei Proben.

Probe.1 Partikuläre Lösung in lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\cdot y & - & 2\cdot z & + & 3\cdot u & = & 2 \\ 2\cdot x & + & 4\cdot y & - & 3\cdot z & + & 4\cdot u & = & 5 \\ 5\cdot x & + & 10\cdot y & - & 8\cdot z & + & 11\cdot u & = & 12 \end{array}$$

mit $(x, y, z, u) = (4, 0, 1, 0)$ ergibt

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & + & 2\cdot 0 & - & 2\cdot 1 & + & 3\cdot 0 & = & 2 \\ 2\cdot 4 & + & 4\cdot 0 & - & 3\cdot 1 & + & 4\cdot 0 & = & 5 \\ 5\cdot 4 & + & 10\cdot 0 & - & 8\cdot 1 & + & 11\cdot 0 & = & 12 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcl} 4-2 & = & 2 \\ 8-3 & = & 5 \\ 20-8 & = & 12 \end{array}$$

und da diese Aussagen wahr sind, ist Probe.1 bestanden.

Probe.2 Erste Lösung homogenes lineares Gleichungssystem in homogenes lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\cdot y & - & 2\cdot z & + & 3\cdot u & = & 0 \\ 2\cdot x & + & 4\cdot y & - & 3\cdot z & + & 4\cdot u & = & 0 \\ 5\cdot x & + & 10\cdot y & - & 8\cdot z & + & 11\cdot u & = & 0 \end{array}$$

mit $(x, y, z, u) = (1, 0, 2, 1)$ ergibt

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2\cdot 0 & - & 2\cdot 2 & + & 3\cdot 1 & = & 0 \\ 2\cdot 1 & + & 4\cdot 0 & - & 3\cdot 2 & + & 4\cdot 1 & = & 0 \\ 5\cdot 1 & + & 10\cdot 0 & - & 8\cdot 2 & + & 11\cdot 1 & = & 0 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcl} 1-4+3 & = & 0 \\ 2-6+4 & = & 0 \\ 5-16+11 & = & 0 \end{array}$$

und da diese Aussagen wahr sind, ist Probe.2 bestanden.

Probe.3 Zweite Lösung homogenes lineares Gleichungssystem in homogenes lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2\cdot y & - & 2\cdot z & + & 3\cdot u & = & 0 \\ 2\cdot x & + & 4\cdot y & - & 3\cdot z & + & 4\cdot u & = & 0 \\ 5\cdot x & + & 10\cdot y & - & 8\cdot z & + & 11\cdot u & = & 0 \end{array}$$

mit $(x, y, z, u) = (-2, 1, 0, 0)$ ergibt

$$\begin{array}{ccccccccc} -2 & + & 2\cdot 1 & - & 2\cdot 0 & + & 3\cdot 0 & = & 0 \\ 2\cdot(-2) & + & 4\cdot 1 & - & 3\cdot 0 & + & 4\cdot 0 & = & 0 \\ 5\cdot(-2) & + & 10\cdot 1 & - & 8\cdot 0 & + & 11\cdot 0 & = & 0 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{ccc} -2+2 & = & 0 \\ -4+4 & = & 0 \\ -10+10 & = & 0 \end{array}$$

und da diese Aussagen wahr sind, ist Probe.3 bestanden. □(Probe)

6 Intermezzo: Probe bestanden. Ergebnis dennoch falsch.

Es gehört zu den Launen des "ex falsoo quodlibet", dass falsche Schlussfolgerungen zu richtigen Teilresultaten führen können, aber das Gesamtergebnis dennoch falsch ist. Besonders beachtenswert sind jene Fälle, in denen die Probe nur die Überprüfung der richtigen Teilresultate erlaubt.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+(-1)\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \boxed{\textbf{Achtung.Falsch.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}+(-5)\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Dritte Gleichung:

$$z - 2\cdot u = 1,$$

liefert mit

$$u = t,$$

und $t \in \mathbb{R}$,

$$z = 1 + 2 \cdot t.$$

Zweite Gleichung:

$$y - \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{2} \cdot u \overset{\textbf{Achtung.Fehler.}}{=} 1,$$

liefert

$$y - \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot t = 1,$$

also

$$y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot t.$$

Erste Gleichung:

$$x + 2 \cdot y - 2 \cdot z + 3 \cdot u = 2,$$

liefert

$$x + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot t \right) - 2 \cdot (1 + 2 \cdot t) + 3 \cdot t = 2,$$

also

$$x = 1.$$

Es folgt

$$(x, y, z, u) = (1, \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot t, 1 + 2 \cdot t, t) = (1, \frac{3}{2}, 1, 0) + t \cdot (0, \frac{1}{2}, 2, 1),$$

und somit

$$\mathbb{L} = \left\{ (1, \frac{3}{2}, 1, 0) + t \cdot (0, \frac{1}{2}, 2, 1) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

<u>Probe.1</u> Partikuläre Lösung in lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2 \cdot y & - & 2 \cdot z & + & 3 \cdot u & = & 2 \\ 2 \cdot x & + & 4 \cdot y & - & 3 \cdot z & + & 4 \cdot u & = & 5 \\ 5 \cdot x & + & 10 \cdot y & - & 8 \cdot z & + & 11 \cdot u & = & 12 \end{array}$$

mit $(x, y, z, u) = (1, \frac{3}{2}, 1, 0)$ ergibt

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 \cdot \frac{3}{2} & - & 2 \cdot 1 & + & 3 \cdot 0 & = & 2 \\ 2 \cdot 1 & + & 4 \cdot \frac{3}{2} & - & 3 \cdot 1 & + & 4 \cdot 0 & = & 5 \\ 5 \cdot 1 & + & 10 \cdot \frac{3}{2} & - & 8 \cdot 1 & + & 11 \cdot 0 & = & 12 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{ccc} 1 + 3 - 2 & = & 2 \\ 2 + 6 - 3 & = & 5 \\ 5 + 15 - 8 & = & 12 \end{array}$$

Probe.1 bestanden.

<u>Probe.2</u> Lösung homogenes lineares Gleichungssystem in homogenes lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2\cdot y & - & 2\cdot z & + & 3\cdot u & = & 0 \\ 2\cdot x & + & 4\cdot y & - & 3\cdot z & + & 4\cdot u & = & 0 \\ 5\cdot x & + & 10\cdot y & - & 8\cdot z & + & 11\cdot u & = & 0 \end{array}$$

mit $(x, y, z, u) = (0, \frac{1}{2}, 2, 1)$ ergibt

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 0 & + & 2\cdot \frac{1}{2} & - & 2\cdot 2 & + & 3\cdot 1 & = & 0 \\ 2\cdot 0 & + & 4\cdot \frac{1}{2} & - & 3\cdot 2 & + & 4\cdot 1 & = & 0 \\ 5\cdot 0 & + & 10\cdot \frac{1}{2} & - & 8\cdot 2 & + & 11\cdot 1 & = & 0 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcl} 1-4+3 & = & 0 \\ 2-6+4 & = & 0 \\ 5-16+11 & = & 0 \end{array}$$

Probe.2 bestanden. $\square$(Probe)

Obwohl beide Proben bestanden sind, ist $\mathbb{L}$ *nicht* die richtige Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems - so ist jedes hier gefundene Quadrupel (x, y, z, u) zwar Lösung des linearen Gleichungssystems, doch jedes dieser Quadrupel hat in der ersten Koordinate eine 1 stehen, während im vorherigen Kapitel gezeigt wurde, dass auch $(4, 0, 1, 0)$ Lösung des linearen Gleichungssystems ist. Damit kann das hier gefundene $\mathbb{L}$ nicht die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems sein.

7 3×5 System

Gelegentlich liegt ein lineares Gleichungssystem bereits in oberer Dreiecksform vor. Dann kann bis auf die Multiplikation mit einer Zahl$\neq 0$, um im der ersten Spalte mit Eintragung$\neq 0$ eine 1 zu erzeugen, sofort mit der Auflösung begonnen werden. Der Führungskoeffizient 1 erspart die Division bei der Auflösung.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 6 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

mit bereits vorliegender, angestrebter oberer Dreiecksform

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \end{array}\right)$$

wird durch Multiplikation der ersten Zeile mit $\frac{1}{2}$ in

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

übergeführt. Da bei dieser Matrix links von der trennenden geraden Linie fünf Spalten vorhanden sind, hat das korrespondierende lineare Gleichungssystem *fünf* Variable. Diese könnten wie bisher mit *unterschiedlichen* Buchstaben - etwa x, y, z, u, v - bezeichnet werden. Einfacher und auch systematisch auf eine noch (deutlich) grössere Anzahl von Variablen erweiterbar ist es, zu einer *indizierten* Bezeichnung der Variablen überzugehen. So sollen hier die Variablen mit x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bezeichnet werden. Die Indices sind die rechts von x stehende, tiefer gesetzten und kleiner geschriebenen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$.

In indizierter Schreibweise ist das korrespondierende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & \frac{3}{2} \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & + & x_4 & - & \frac{5}{2} \cdot x_5 & = & \frac{3}{2} \\ & & x_2 & - & 4 \cdot x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ & & & & & & x_4 & - & 3 \cdot x_5 & = & 2 \end{array}$$

Dritte Gleichung:

$$x_5 = t, \quad x_4 = 2 + 3 \cdot x_5 = 2 + 3 \cdot t.$$

Zweite Gleichung:

$$x_3 = s, \quad x_2 = 1 + 4 \cdot x_3 - x_4 = 1 + 4 \cdot s - (2 + 3 \cdot t) = -1 - 3 \cdot t + 4 \cdot s.$$

Erste Gleichung:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 - x_4 + \frac{5}{2} \cdot x_5 \\ = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-1 - 3 \cdot t + 4 \cdot s) - 3 \cdot s - (2 + 3 \cdot t) + \frac{5}{2} \cdot t \\ = -2 - 5 \cdot t + 3 \cdot s. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ = (-2 - 5 \cdot t + 3 \cdot s, -1 - 3 \cdot t + 4 \cdot s, s, 2 + 3 \cdot t, t) \\ = (-2, -1, 0, 2, 0) + t \cdot (-5, -3, 0, 3, 1) + s \cdot (3, 4, 1, 0, 0), \end{aligned}$$

und es gibt sich der unendliche, zweidimensionale Lösungsraum

$$\mathbb{L} = \{(-2, -1, 0, 2, 0) + t \cdot (-5, -3, 0, 3, 1) + s \cdot (3, 4, 1, 0, 0) : t \in \mathbb{R} \wedge s \in \mathbb{R}\}.$$

Probe.1 Partikuläre Lösung in lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & - & \frac{3}{2} \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & + & x_4 & - & \frac{5}{2} \cdot x_5 & = & \frac{3}{2} \\ & & x_2 & - & 4 \cdot x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ & & & & & & x_4 & - & 3 \cdot x_5 & = & 2 \end{array}$$

mit $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, -1, 0, 2.0)$ ergibt

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -2 & - & \frac{3}{2}\cdot(-1) & + & 3\cdot 0 & + & 2 & - & \frac{5}{2}\cdot 0 & = & \frac{3}{2} \\ & & -1 & - & 4\cdot 0 & + & 2 & & & = & 1 \\ & & & & & & 2 & - & 3\cdot 0 & = & 2 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{lcl} -2+\frac{3}{2}+2 & = & \frac{3}{2} \\ -1+2 & = & 1 \\ 2 & = & 2 \end{array}$$

Probe.1 bestanden.

<u>Probe.2</u> Erste Lösung homogenes lineares Gleichungssystem in homogenes lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & \frac{3}{2}\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & + & x_4 & - & \frac{5}{2}\cdot x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4\cdot x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & - & 3\cdot x_5 & = & 0 \end{array}$$

mit $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-5, -3, 0, 3, 1)$ ergibt

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -5 & - & \frac{3}{2}\cdot(-3) & + & 3\cdot 0 & + & 3 & - & \frac{5}{2}\cdot 1 & = & 0 \\ & & -3 & - & 4\cdot 0 & + & 3 & & & = & 0 \\ & & & & & & 3 & - & 3\cdot 1 & = & 0 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{lcl} -5+\frac{9}{2}+3-\frac{5}{2} & = & 0 \\ -3+3 & = & 0 \\ 3-3 & = & 0 \end{array}$$

Probe.2 bestanden.

<u>Probe.3</u> Zweite Lösung homogenes lineares Gleichungssystem in homogenes lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & \frac{3}{2}\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & + & x_4 & - & \frac{5}{2}\cdot x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4\cdot x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & - & 3\cdot x_5 & = & 0 \end{array}$$

mit $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 4, 1, 0, 0)$ ergibt

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3 & - & \frac{3}{2}\cdot 4 & + & 3\cdot 1 & + & 0 & - & \frac{5}{2}\cdot 0 & = & 0 \\ & & 4 & - & 4\cdot 1 & + & 0 & & & = & 0 \\ & & & & & & 0 & - & 3\cdot 0 & = & 0 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{lcl} 3-6+3 & = & 0 \\ 4-4 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Probe.3 bestanden. □(Probe)

8 3×3 System - 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{II}+(-3)\cdot\text{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}+(-5)\cdot\text{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{array}\right) \overset{\text{III}+(-1)\cdot\text{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Dritte Gleichung des korrespondierenden linearen Gleichungssystems:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -3.$$

Lineares Gleichungssystem nicht lösbar.

$$\mathbb{L} = 0.$$

Keine Probe durch Einsetzen möglich.

Geometrische Interpretation: Drei Ebenen im Raum, die sich nicht schneiden, da zwei von den drei Ebenen parallel, doch ungleich sind.

9 3×3 System - 3

In

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

könnte in der ersten Zeile in der ersten Spalte eine 1 durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ hergestellt werden. Danach müsste aber mit Brüchen weitergerechnet werden. Besser ist es, von der ersten Zeile die zweite Zeile zu subtrahieren und dann die erste Zeile mit -1 zu multiplizieren. Auf diese Weise steht in der ersten Zeile in der ersten Spalte eine 1 und alle Eintragungen bleiben ganz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}+(-1)\cdot\mathrm{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -4 & 9 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \overset{(-1)\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{II}+(-3)\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & -1 & -10 & 28 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+(-5)\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & -1 & -10 & 28 \\ 0 & -1 & -17 & 49 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)\cdot\mathrm{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & -1 & -17 & 49 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{7}\cdot\mathrm{III}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Dritte Gleichung:

$$x_3 = -3.$$

Zweite Gleichung:

$$x_2 + 10 \cdot x_3 = -28,$$

also

$$x_2 + 10 \cdot (-3) = -28,$$

so dass

$$x_2 = 2.$$

Erste Gleichung:

$$x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 = -9,$$

also

$$x_1 + 2 + 4 \cdot (-3) = -9,$$

so dass

$$x_1 = 1.$$

Demnach

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -3),$$

und

$$\mathbb{L} = \{(1, 2, -3)\},$$

so dass lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

Probe.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 \cdot x_1 & + & x_2 & - & 2 \cdot x_3 & = & 10 \\ 3 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & 1 \\ 5 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & = & 4 \end{array}$$

mit

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -3),$$

ergibt

$$\begin{array}{ccccccc} 2\cdot 1 & + & 2 & - & 2\cdot(-3) & = & 10 \\ 3\cdot 1 & + & 2\cdot 2 & + & 2\cdot(-3) & = & 1 \\ 5\cdot 1 & + & 4\cdot 2 & + & 3\cdot(-3) & = & 4 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcr} 2+2+6 & = & 10 \\ 3+4-6 & = & 1 \\ 5+8-9 & = & 4 \end{array}$$

Probe bestanden.

Geometrische Interpretation: Drei Ebenen im Raum, die sich in einem Punkt schneiden.

10 3×3 System - 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+(-2)\cdot\mathrm{I}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right)$$
$$\overset{\mathrm{III}+(-4)\cdot\mathrm{I}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}+(-1)\cdot\mathrm{II}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\overset{-\frac{1}{5}\cdot\mathrm{II}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dritte Gleichung:

$$0 = 0.$$

Keine Information.

Zweite Gleichung:

$$x_2 - 2 \cdot x_3 = 1,$$

also

$$x_3 = t,$$

$$x_2 = 2 + 2 \cdot t.$$

Erste Gleichung:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 = 6,$$

also

$$x_1 + 2 \cdot (2 + 2 \cdot t) - 3 \cdot t = 6,$$

so dass
$$x_1 = 2 - t.$$
Es folgt
$$(x_1, x_2, x_3) = (2 - t, 1 + 2 \cdot t, t) = (2, 1, 0) + t \cdot (-1, 2, 1),$$
und
$$\mathbb{L} = \{(2, 2, 0) + t \cdot (-1, 2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$
ist ein unendlicher, eindimensionaler Lösungsraum.

Probe.1 Partikuläre Lösung in lineares Gleichungssystem einsetzen.
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2 \cdot x_2 & - & 3 \cdot x_3 & = & 6 \\ 2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 4 \cdot x_3 & = & 2 \\ 4 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & - & 2 \cdot x_3 & = & 14 \end{array}$$
mit $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 0)$ ergibt
$$\begin{array}{ccccccc} 2 & + & 2 \cdot 2 & - & 3 \cdot 0 & = & 6 \\ 2 \cdot 2 & - & 2 & + & 4 \cdot 0 & = & 2 \\ 4 \cdot 2 & + & 3 \cdot 2 & - & 2 \cdot 0 & = & 14 \end{array}$$
also
$$\begin{array}{ccc} 2 + 4 & = & 6 \\ 4 - 2 & = & 2 \\ 8 + 6 & = & 14 \end{array}$$
Probe.1 bestanden.

Probe.2 Lösung homogenes lineares Gleichungssystem in homogenes lineares Gleichungssystem einsetzen.
$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2 \cdot x_2 & - & 3 \cdot x_3 & = & 0 \\ 2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 4 \cdot x_3 & = & 0 \\ 4 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & - & 2 \cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$
mit $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, 1)$ ergibt
$$\begin{array}{ccccccc} -1 & + & 2 \cdot 2 & - & 3 \cdot 1 & = & 0 \\ 2 \cdot (-1) & - & 2 & + & 4 \cdot 1 & = & 0 \\ 4 \cdot (-1) & + & 3 \cdot 2 & - & 2 \cdot 1 & = & 0 \end{array}$$
also
$$\begin{array}{ccc} -1 + 4 - 3 & = & 0 \\ -2 - 2 + 4 & = & 0 \\ -4 + 6 - 2 & = & 0 \end{array}$$
Probe.2 bestanden $\square$(Probe)

Geometrische Interpretation: Drei Ebenen im Raum, die ein Ebenenbüschel bilden, die sich also in einer Geraden schneiden.

11 5×5 System

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{II}+(-5)\cdot\mathrm{I}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -8 & 3 & -9 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}+(-2)\cdot\mathrm{I}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -8 & 3 & -9 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{IV}+(-1)\cdot\mathrm{I}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -8 & 3 & -9 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -1 & -8 \\ 2 & -1 & 4 & -5 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{V}+(-2)\cdot\mathrm{I}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -8 & 3 & -9 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Ab hier ändert sich die erste Spalte nicht mehr und die erste Zeile wird für die folgenden Manipulationen nicht mehr eingesetzt. Man kann also Schreibarbeit sparen und die erste Zeile und die erste Spalte streichen. Jedoch wird die Information der ersten Zeile zum Auflösen des linearen Gleichungssystems benötigt und sollte hier notiert werden.

$$\text{Erste Gleichung:} \qquad x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - x_4 + 2 \cdot x_5 = -1.$$

Die Variablen der verbleibenden 4×5 Matrix sind x_2, x_3, x_4, x_5.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -8 & 3 & -9 & 5 \\ 0 & -3 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -7 & -8 & 3 & -9 & 5 \\ -3 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & -8 \\ -5 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)\cdot\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 8 & -3 & 9 & -5 \\ -3 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & -8 \\ -5 & 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & -8 \\ -5 & 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 12 & 13 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & -8 \\ -5 & 0 & -3 & -1 & 5 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}+5\cdot\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 12 & 13 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 12 & 24 & 0 \end{array}\right)$$

Neuerlich können die erste Zeile und die erste Spalte gestrichen werden. Die hierdurch nicht weiter fortgeschriebene zweite Gleichung lautet

$$x_2 + 3 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = -1.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 12 & 13 & -1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 12 & 24 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 12 & 13 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -8 \\ 0 & 12 & 24 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)\cdot\mathrm{II}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 12 & 13 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 12 & 24 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 14 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 12 & 24 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{II}+(-5)\cdot\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 14 & 7 \\ 0 & -48 & -69 & -27 \\ 0 & 12 & 24 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+4\cdot\mathrm{III}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \\ 0 & 12 & 24 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{27}\cdot\mathrm{II}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 12 & 24 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{12}\cdot\mathrm{III}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 14 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 14 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Fünfte Gleichung:

$$x_5 = -1.$$

Vierte Gleichung:

$$x_4 + 2 \cdot x_5 = 0,$$

so dass

$$x_4 + 2 \cdot (-1) = 0,$$

also

$$x_4 = 2.$$

Dritte Gleichung:

$$x_3 + 9 \cdot x_4 + 14 \cdot x_5 = 7,$$

so dass

$$x_3 + 9 \cdot 2 + 14 \cdot (-1) = 7,$$

also

$$x_3 = 3.$$

Zweite Gleichung (siehe oben):

$$x_2 + 3 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = -1,$$

so dass

$$x_2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = -1,$$

also

$$x_2 = -2.$$

Erste Gleichung (siehe oben):

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - x_4 + 2 \cdot x_5 = -1,$$

so dass

$$x_1 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 - 2 + 2 \cdot (-1) = -1,$$

also

$$x_1 = 1.$$

Es folgt

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, -2, 3, 2, -1),$$

und somit

$$\mathbb{L} = \{(1, -2, 3, 2, -1)\}.$$

Probe.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
5 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & - & 2 \cdot x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & - & x_4 & + & 2 \cdot x_5 & = & -1 \\
2 \cdot x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & 2 \cdot x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2 \cdot x_2 & - & 3 \cdot x_3 & + & 2 \cdot x_4 & + & x_5 & = & -9 \\
2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 4 \cdot x_3 & - & 5 \cdot x_4 & + & 3 \cdot x_5 & = & 3
\end{array}$$

mit

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, -2, 3, 2, -1),$$

ergibt

$$\begin{array}{ccccccccccc}
5\cdot 1 & + & 3\cdot(-2) & + & 2\cdot 3 & - & 2\cdot 2 & + & (-1) & = & 0\\
1 & + & 2\cdot(-2) & + & 2\cdot 3 & - & 2 & + & 2\cdot(-1) & = & -1\\
2\cdot 1 & + & (-2) & & & + & 2 & + & 2\cdot(-1) & = & 0\\
1 & + & 2\cdot(-2) & - & 3\cdot 3 & + & 2\cdot 2 & + & (-1) & = & -9\\
2\cdot 1 & - & (-2) & + & 4\cdot 3 & - & 5\cdot 2 & + & 3\cdot(-1) & = & 3
\end{array}$$

also

$$\begin{array}{ccc}
5-6+6-4-1 & = & 0\\
1-4+6-2-2 & = & -1\\
2-2+2-2 & = & 0\\
1-4-9+4-1 & = & -9\\
2+2+12-10-3 & = & 3
\end{array}$$

Probe bestanden. $\square$(Probe)

12 2×2 System - 1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1\\ 5 & 7 & 3\end{array}\right) \overset{5\cdot\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 15 & 5\\ 5 & 7 & 3\end{array}\right) \overset{(-2)\cdot\mathrm{II}}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 15 & 5\\ -10 & -14 & -6\end{array}\right)$$
$$\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 15 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{array}\right) \overset{\frac{1}{5}\cdot\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{array}\right)$$

Zweite Gleichung:

$$x_2 = -1.$$

Erste Gleichung:

$$2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 = 1,$$

so dass

$$2\cdot x_1 + 3\cdot(-1) = 1,$$

also

$$x_1 = 2.$$

Es folgt

$$(x_1, x_2) = (2, -1),$$

und somit

$$\mathbb{L} = \{(2, -1)\}.$$

Probe.

$$\begin{array}{ccccc}
2\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & = & 1\\
5\cdot x_1 & + & 7\cdot x_2 & = & 3
\end{array}$$

mit

$$(x_1, x_2) = (2, -1),$$

ergibt

$$\begin{array}{rcrcl} 2 \cdot 2 & + & 3 \cdot (-1) & = & 1 \\ 5 \cdot 2 & + & 7 \cdot (-1) & = & 3 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{rcl} 4 - 3 & = & 1 \\ 10 - 7 & = & 3 \end{array}$$

Probe bestanden. □(Probe)

Geometrische Interpretation: Zwei Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.

13 2×2 System - 2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 5 \\ -6 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{3\cdot\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 12 & -6 & 15 \\ -6 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{2\cdot\mathrm{II}}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 12 & -6 & 15 \\ -12 & 6 & 2 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\to} \left(\begin{array}{cc|c} 12 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 17 \end{array}\right)$$

Lineares Gleichungssystem nicht lösbar.

$$\mathbb{L} = 0.$$

Keine Probe durch Einsetzen möglich.

Geometrische Interpretation: Zwei parallele Geraden in der Ebene, die sich nicht schneiden.

14 4×4 System

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 8 & 1 & 14 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & 9 & -7 & 1 & -13 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}+(-2)\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 8 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & -23 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & 9 & -7 & 1 & -13 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}+(-3)\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 8 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & -23 \\ 0 & 22 & -26 & -2 & -46 \\ 4 & 9 & -7 & 1 & -13 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}+(-4)\cdot\mathrm{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 8 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & -23 \\ 0 & 22 & -26 & -2 & -46 \\ 0 & 33 & -39 & -3 & -69 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}+(-2)\cdot\mathrm{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 8 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & -39 & -3 & -69 \end{array}\right) \overset{\mathrm{IV}+(-3)\cdot\mathrm{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & 8 & 1 & 14 \\ 0 & 11 & -13 & -1 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vierte Gleichung:

$$0 = 0.$$

Dritte Gleichung:

$$0 = 0.$$

Zweite Gleichung:

$$11 \cdot x_2 - 13 \cdot x_3 - x_4 = -23.$$

Eine der drei Variablen ist durch die anderen beiden Variablen festgelegt. Um Brüche zu vermeiden bietet es sich an, x_4 in Abhängigkeit von x_2 und x_3 darzustellen.

$$x_2 = s,$$

$$x_3 = t,$$

$$x_4 = 23 + 11 \cdot x_2 - 13 \cdot x_3 = 23 + 11 \cdot s - 13 \cdot t.$$

Erste Gleichung:

$$x_1 - 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + x_4 = 14,$$

so dass

$$x_1 - 6 \cdot s + 8 \cdot t + 23 + 11 \cdot s - 13 \cdot t = 14,$$

also

$$x_1 = -9 - 5 \cdot s + 5 \cdot t.$$

Es folgt

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9 - 5 \cdot s + 5 \cdot t, s, t, 23 + 11 \cdot s - 13 \cdot t)$$
$$(-9, 0, 0, 23) + t \cdot (5, 0, 1, -13) + s \cdot (-5, 1, 0, 11),$$

und somit ist

$$\mathbb{L} = \{(-9,0,0,23) + t \cdot (5,0,1,-13) + s \cdot (-5,1,0,11) : t \in \mathbb{R} \wedge s \in \mathbb{R}\},$$

ein unendlicher, zweidimensionaler Lösungsraum.

Probe.1 Partikuläre Lösung in lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 6 \cdot x_2 & + & 8 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 14 \\ 2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 3 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 3 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & - & 2 \cdot x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ 4 \cdot x_1 & + & 9 \cdot x_2 & - & 7 \cdot x_3 & + & x_4 & = & -13 \end{array}$$

mit $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9, 0, 0, 23)$ ergibt

$$\begin{array}{ccccccccc} -9 & - & 6 \cdot 0 & + & 8 \cdot 0 & + & 23 & = & 14 \\ 2 \cdot (-9) & - & 0 & + & 3 \cdot 0 & + & 23 & = & 5 \\ 3 \cdot (-9) & + & 4 \cdot 0 & - & 2 \cdot 0 & + & 23 & = & -4 \\ 4 \cdot (-9) & + & 9 \cdot 0 & - & 7 \cdot 0 & + & 23 & = & -13 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{ccc} -9 + 23 & = & 14 \\ -18 + 23 & = & 5 \\ -27 + 23 & = & -4 \\ -36 + 23 & = & -13 \end{array}$$

Probe.1 bestanden.

Probe.2 Erste Lösung homogenes lineares Gleichungssystem in homogenes lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 6 \cdot x_2 & + & 8 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 3 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & - & 2 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 4 \cdot x_1 & + & 9 \cdot x_2 & - & 7 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

mit $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, 0, 1, -13)$ ergibt

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & - & 6 \cdot 0 & + & 8 \cdot 1 & + & (-13) & = & 0 \\ 2 \cdot 5 & - & 0 & + & 3 \cdot 1 & + & (-13) & = & 0 \\ 3 \cdot 5 & + & 4 \cdot 0 & - & 2 \cdot 1 & + & (-13) & = & 0 \\ 4 \cdot 5 & + & 9 \cdot 0 & - & 7 \cdot 1 & + & (-13) & = & 0 \end{array}$$

also

$$\begin{array}{ccc} 5 + 8 - 13 & = & 0 \\ 10 + 3 - 13 & = & 0 \\ 15 - 2 - 13 & = & 0 \\ 20 - 7 - 13 & = & 0 \end{array}$$

Probe.2 bestanden.

Probe.3 Zweite Lösung homogenes lineares Gleichungssystem in homogenes lineares Gleichungssystem einsetzen.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 6 \cdot x_2 & + & 8 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2 \cdot x_1 & - & x_2 & + & 3 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & - & 2 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 4 \cdot x_1 & + & 9 \cdot x_2 & - & 7 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

mit $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5, 1, 0, 11)$ ergibt

$$\begin{array}{ccccccccc} -5 & - & 6 \cdot 1 & + & 8 \cdot 0 & + & 11 & = & 0 \\ 2 \cdot (-5) & - & 1 & + & 3 \cdot 0 & + & 11 & = & 0 \\ 3 \cdot (-5) & + & 4 \cdot 1 & - & 2 \cdot 0 & + & 11 & = & 0 \\ 4 \cdot (-5) & + & 9 \cdot 1 & - & 7 \cdot 0 & + & 11 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -5 - 6 + 11 & = & 0 \\ -10 - 1 + 11 & = & 0 \\ -15 + 4 + 11 & = & 0 \\ -20 + 9 + 11 & = & 0 \end{array}$$

Probe.3 bestanden. $\square$(Probe)