Integralrechnung

Andreas Unterreiter

21. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Mittelwertsatz der Integralrechnung

<u>**Satz - MWSIR**</u>

$$\begin{array}{ll} & f : D \to B \text{ reelle Funktion} \\ \wedge & a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b \\ \wedge & f \text{ stetig auf } [a|b] \\ \Rightarrow & \\ & \exists \xi : \xi \in \,]a|b[\, \wedge f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f \end{array}$$

Unter den hier getroffenen Voraussetzungen heisst

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f,$$

Mittelwert von f auf $[a|b]$. Mit dieser Sprechweise besagt der Mittelwertsatz der Integralrechnung, dass unter den gegebenen Voraussetzungen der Mittelwert von f auf $[a|b]$ von f in (mindestens) einer Stelle $\xi \in \,]a|b[$ angenommen wird.

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis) Mit $f = \sin$ und $a = 0$ und $b = \pi$ folgt aus dem MWSIR,

$$\exists \xi : \xi \in \,]0|\pi[\, \wedge \sin \xi = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \sin .$$

Aus

$$\int_0^\pi \sin = 2,$$

folgt

$$\sin\xi = \frac{2}{\pi}.$$

Diese Gleichung kann mit arcsin nach ξ aufgelöst werden. Es ergibt sich

$$\xi = \arcsin(2/\pi).$$

Wegen $\mathsf{ran}\arcsin = [-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}]$ stellt sich die Frage, ob $\arcsin(2/\pi) \in]0|\pi[$. Da $0 < 2/\pi$ gilt folgt

$$\arcsin(2/\pi) \in]0|\frac{\pi}{2}[,$$

und somit auch $\arcsin(2/\pi) \in]0|\pi[$. Bemerkenswerter Weise gilt auch

$$\pi - \xi = \pi - \arcsin(2/\pi) \in]0|\pi[,$$

so dass wegen $\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin(\pi - x) = \sin x$, auch

$$\sin(\pi - \xi) = \sin\xi = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \sin.$$

Damit nimmt die Funktion sin ihren Mittelwert auf $[0|\pi]$ in zwei Stellen - nämlich in $\arcsin(2/\pi)$ und in $\pi - \arcsin(2/\pi)$ - aus $]0|\pi[$ an. Eine weiterführende Diskussion zeigt, dass es keine weiteren Stellen in $]0|\pi[$ gibt, in denen die Sinusfunktion diesen Mittelwert annimmt. $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \sqrt{.}$ und $a = 0$ und $b = M$ mit $0 < M \in \mathbb{R}$ folgt für den Mittelwert von f auf $[0|M]$,

$$\frac{1}{M-0} \cdot \int_0^M \sqrt{.} = \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}\Big|_{x=0}^{s=M}\right) = \frac{2}{3 \cdot M}\left(M \cdot \sqrt{M} - 0 \cdot \sqrt{0}\right)$$
$$= \frac{2 \cdot \sqrt{M}}{3}.$$

Via MWSIR gilt

$$\exists \xi : \xi \in]0|M[\Rightarrow \sqrt{\xi} = \frac{2 \cdot \sqrt{M}}{3},$$

und aus dieser Gleichung kann ξ ohne Weiteres berechnet werden,

$$\xi = \frac{4 \cdot M}{9}.$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel Mit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4 - 3 \cdot x^2,$$

und $a = -M$ und $b = M$ und $M \in \,]0|+\infty[$ folgt für den Mittelwert von f auf $[-M|M]$,

$$\frac{1}{M-(-M)} \cdot \int_{-M}^{M} \left(4 - 3 \cdot x^2\right)\, dx = \frac{1}{2 \cdot M} \cdot \left(4 \cdot x - x^3\Big|_{x=-M}^{x=M}\right)$$
$$= \frac{1}{2 \cdot M} \cdot \left((4 \cdot M - M^3) - (4 \cdot (-M) - (-M)^3\right) = \frac{1}{2 \cdot M} \cdot \left(8 \cdot M - 2 \cdot M^3\right)$$
$$= 4 - 2 \cdot M^2,$$

der für $M \uparrow +\infty$ gegen $-\infty$ strebt. Via MWSIR gilt

$$\exists \xi : \xi \in \,]-M|M[\, \wedge 4 - 3 \cdot \xi^2 = 4 - 2 \cdot M^2,$$

und die Gleichung lässt genau zwei Werte für ξ zu, nämlich

$$\xi = \frac{\sqrt{2} \cdot M}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad \xi = -\frac{\sqrt{2} \cdot M}{\sqrt{3}},$$

die beide in $]-M|M[$ liegen. Also wird für alle $M \in \,]0|+\infty[$ der Mittelwert von f auf $[-M|M]$ von f in genau zwei Stellen angenommen. $\square$(Beispiel)

2 (Signierte) Flächenberechung im $\mathbb{R}^2$

Satz - fg2

$f : D \to B$ reelle Funktion $\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ f stetig auf $[a|b]$ $\wedge$ g stetig auf $[a|b]$

$\Rightarrow$

$\int_a^b f. - .g$ ist die von f und g auf $[a|b]$ eingeschlossene *signierte* Fläche, die positiv gewichtet wird, wo $g < f$ gilt und die negativ gewichtet wird, wo $f < g$ ist,

$\wedge$ $\int_a^b |f. - .g|$ ist die von f und g auf $[a|b]$ eingeschlossene Fläche.

Beispiel (ohne Beweis) Es soll die Fläche eines Kreises mit Radius r, $r \in\ ]0|+\infty[$, ermittelt werden. Der Mittelpunkt des Kreises ist gleich $(0,0)$. Die obere Berandungskurve ist

$$f(r) : [-r|r] \to \mathbb{R}, \quad f(r)(x) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

die untere Berandungskurve ist

$$g(r) : [-r|r] \to \mathbb{R}, \quad g(r)(x) = -\sqrt{r^2 - x^2},$$

so dass sich für die nun mit $A(r)$ bezeichnete Fläche via **Satz - fg2** die Gleichung

$$\begin{aligned} A(r) = \int_{-r}^{r} |f(r). - .g(r)| &= \int_{-r}^{r} \left| \sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right) \right| \, dx \\ &= \int_{-r}^{r} \left| 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \right| \, dx = 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \end{aligned}$$

ergibt. Recherchen ergeben die Aussage ...

Für alle $r \in \,]0| + \infty[\,$ gilt:

$$F(r) : [-r|r] \to \mathbb{R}, \quad F(r)(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \cdot \arcsin(x/r) \right),$$

ist eine Stammfunktion von

$$f(r) : [-r|r] \to \mathbb{R}, \quad f(r)(x) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

auf $[-r|r]$.

...die insofern bemerkenswert ist, als weder

$$h(r) : [-r|r] \to \mathbb{R} \quad h(r)(x) = x \cdot \sqrt{r^2 - x^2},$$

noch

$$\eta(r) : [-r|r] \to \mathbb{R}, \quad \eta(r)(x) = r^2 \cdot \arcsin(x/r),$$

differenzierbar sind - beide Funktionen sind weder in $-r$ noch in r differenzierbar -, doch deren Summenfunktion $h(r). + .\eta(r)$ ist trotzdem differenzierbar, im Speziellen differenzierbar in $-r$ und in r.

Mit $F(r)$ folgt weiter

$$\begin{aligned} A(r) &= 2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \cdot \arcsin(x/r) \right) \Big|_{x=-r}^{x=r} \\ &= \left(r \cdot \sqrt{r^2 - r^2} + r^2 \cdot \arcsin(r/r) \right) - \left((-r) \cdot \sqrt{r^2 - (-r)^2} + r^2 \cdot \arcsin((-r)/r) \right) \\ &= \left(0 + r^2 \cdot \arcsin 1 \right) - (0 + r^2 \cdot \arcsin(-1)) = r^2 \cdot \frac{\pi}{2} - r^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = r^2 \cdot \pi. \end{aligned}$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Es soll die Fläche einer Ellipse mit Halbachsen a, b, $0 < a, b < +\infty$ in erster Hauptlage ermittelt verden. Die Ellipsengleichung ist in diesem Fall,

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1,$$

woraus sich durch Umstellen nach y die Aussagen

$$y = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \quad \vee \quad y = -b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2},$$

also auch

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \quad \vee \quad y = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2},$$

ergeben. Die obere Berandungskurve ist

$$f(a,b) : [-a|a] \to \mathbb{R}, \quad f(a,b)(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2},$$

die untere Berandungskurve ist

$$g(a,b) : [-a|a] \to \mathbb{R}, \quad g(a,b)(x) = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2},$$

so dass sich für die nun mit $A(a,b)$ bezeichnete Fläche via **Satz - fg2** die Gleichung

$$\begin{aligned} A(a,b) &= \int_{-a}^{a} |f(a,b). - ..g(a,b)| = \int_{-a}^{a} \left| \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} - \left(-\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \right) \right| \, dx \\ &= \int_{-a}^{a} \left| 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \right| \, dx = \int_{-a}^{a} 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \\ &\overset{s.o.}{=} 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = a \cdot b \cdot \pi, \end{aligned}$$

ergibt. □(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Es soll die Fläche einer Hyperbel mit Parametern a, b, $0 < a, b < +\infty$ in erster Hauptlage auf $[a|\lambda \cdot a]$ mit $1 < \lambda < +\infty$ ermittelt werden. Die Hyperbelgleichung ist in diesem Fall,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

woraus sich durch Umstelle nach y die Aussagen

$$y = b \cdot \sqrt{-1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad \vee \quad y = -b \cdot \sqrt{-1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

also auch

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{-a^2 + x^2} \quad \vee \quad y = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{-a^2 + x^2},$$

ergeben. Die obere Berandungskurve ist

$$f(a,b) : [a| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad \frac{f}{(}a,b)(x) = ba \cdot \sqrt{-a^2 + x^2},$$

die untere Berandungskurve ist

$$g(a,b) : [a| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(a,b)(x) = -\frac{b}{a} \cdot \sqrt{-a^2 + x^2},$$

so dass sich für die mit $A(a,b)(\lambda)$ bezeichnete Fläche via **Satz - fg2** die Gleichung

$$\begin{aligned}
A(a,b)(\lambda) &= \int_a^{\lambda\cdot a} |f(a,b).-.g(a,b)| \\
&= \int_a^{\lambda\cdot a} \left| \frac{b}{a} \cdot \sqrt{-a^2+x^2} - \left(-\frac{b}{a} \cdot \sqrt{-a^2+x^2} \right) \right| \, dx \\
&= \int_a^{\lambda\cdot a} \left| 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{-a^2+x^2} \right| \, dx = \int_a^{\lambda\cdot a} 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{-a^2+x^2} \, dx \\
&= \frac{2 \cdot b}{a} \cdot \int_a^{\lambda\cdot a} \sqrt{-a^2+x^2} \, dx
\end{aligned}$$

ergibt. Recherchen fördern die Aussage ...

> Für alle $a \in\,]0|+\infty[$ gilt:
>
> $$F(a) : [a|+\infty[\to \mathbb{R},$$
> $$F(a)(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{-a^2+x^2} - a^2 \cdot \operatorname{Arcosh}(x/a) \right)$$
>
> ist eine Stammfunktion von
>
> $$f(a) : [a|+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(a)(x) = \sqrt{-a^2+x^2},$$
>
> auf $[a|+\infty[$.

... zu Tage, die insofern bemerkenswert ist, als weder

$$h(a) : [a|+\infty[\to \mathbb{R} \quad h(a)(x) = x \cdot \sqrt{-a^2+x^2},$$

noch

$$\eta(a) : [a|+\infty[\to \mathbb{R}, \quad \eta(a)(x) = a^2 \cdot \operatorname{Arcosh}(x/r),$$

differenzierbar sind - beide Funktionen sind nicht differenzierbar in a -, doch deren Differenzfunktion $h(a).-.\eta(a)$ ist trotzdem differenzierbar, im Speziellen differenzierbar in a.

Mit $F(a)$ folgt weiter

$$
\begin{aligned}
A(a,b)(\lambda) &= \frac{2\cdot b}{a}\cdot\int_a^{\lambda\cdot a}\sqrt{-a^2+x^2}\,dx \\
&= \frac{2\cdot b}{a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Big(x\cdot\sqrt{-a^2+x^2}-a^2\cdot\operatorname{Arcosh}(x/a)\Big)\Big|_{x=a}^{x=\lambda\cdot a} \\
&= \frac{b}{a}\cdot\Big(\lambda\cdot a\cdot\sqrt{-a^2+\lambda^2\cdot a^2}-a^2\cdot\operatorname{Arcosh}(\lambda\cdot a/a)\Big) \\
&\quad -\frac{b}{a}\cdot\Big(a\cdot\sqrt{-a^2+a^2}-a^2\cdot\operatorname{Arcosh}(a/a)\Big) \\
&= \frac{b}{a}\cdot\Big(\lambda\cdot a\cdot a\cdot\sqrt{-1+\lambda^2}-a^2\cdot\operatorname{Arcosh}\lambda\Big)-\frac{b}{a}\cdot\big(0-a^2\cdot\operatorname{Arcosh}1\big) \\
&= a\cdot b\cdot\Big(\lambda\cdot\sqrt{-1+\lambda^2}-\operatorname{Arcosh}\lambda\Big)-\frac{b}{a}\cdot\big(-a^2\cdot 0\big) \\
&= a\cdot b\cdot\Big(\lambda\cdot\sqrt{-1+\lambda^2}-\operatorname{Arcosh}\lambda\Big).
\end{aligned}
$$

□(Beispiel)

Im Spezialfall $g = \mathsf{zo}$ ergibt sich aus **Satz - fg2** der aus der Schulmathematik vertraute

Satz - f2

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ f stetig auf $[a|b]$

$\Rightarrow$

$\int_a^b f$ ist die von f und x-Achse auf $[a|b]$ eingeschlossene *signierte* Fläche, die positiv gewichtet wird, wo $0 < f$ gilt und die negativ gewichtet wird, wo $f < 0$ ist,

$\wedge$ $\int_a^b |f|$ ist die von f und der x-Achse auf $[a|b]$ eingeschlossene Fläche.

Beispiel Mit $f = \sin$ und $a = 0$ und $b = 2\cdot\pi$ ergibt sich aus **Satz - f2** für die von sin und der x-Achse auf $[0|2\cdot\pi\ ]$ eineschlossene siginierte Fläche,

$$\int_0^{2\cdot\pi}\sin = 0,$$

während die via **Satz - f2** ermittelte Fläche, die von sin und der x-Achse auf $[0|2\cdot\pi]$ eingeschlossene Fläche gleich

$$\int_0^{2\cdot\pi} |\sin| = 4,$$

ist. □(Beispiel)

3 Länge gekrümmter Linien

Satz - lgl

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ f differenzierbar auf $[a|b]$

$\wedge$ f' stetig auf $[a|b]$

$\Rightarrow$

Die Länge von $(f \downharpoonleft [a|b])$ ist gleich

$$\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}.$$

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = (. \uparrow 2)$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist via

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\cdot x,$$

die Länge von $(f \downharpoonleft [a|b])$ gleich

$$\int_a^b \sqrt{1+(f')^2} = \int_a^b \sqrt{1+(2\cdot x)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+4\cdot x^2}\,dx$$
$$= \int_a^b \sqrt{4\cdot\left(\frac{1}{4}+x^2\right)} = \int_a^b 2\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\,dx = 2\cdot\int_a^b \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\,dx.$$

Recherchen ergeben

Für alle $r \in \left]0|+\infty\right[$ gilt:

$$F(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(r)(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{r^2 + x^2} + r^2 \cdot \operatorname{Arsinh}(x/r)\right)$$

ist eine Stammfunktion von

$$f(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(r)(x) = \sqrt{r^2 + x^2},$$

auf $\mathbb{R}$.

Mit $F(1/2)$ folgt nun für die gesuchte Länge

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} = 2 \cdot \int_a^b \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2}\, dx \\
= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{Arsinh}(x/(1/2))\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} \\
= \left(b \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{Arsinh}(2 \cdot b)\right) \\
- \left(a \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{Arsinh}(2 \cdot a))\right) \\
= \left(b \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} + \frac{1}{4} \cdot \operatorname{Arsinh}(2 \cdot b)\right) - \left(a \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + a^2} + \frac{1}{4} \cdot \operatorname{Arsinh}(2 \cdot a))\right) \\
= \left(b \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + b^2} - a \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + a^2}\right) + \frac{1}{4} \cdot (\operatorname{Arsinh}(2 \cdot b) - \operatorname{Arsinh}(2 \cdot a)))\,.
\end{aligned}$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Es soll die Länge der Kreislinie mit Radius r, $r \in \left]0|+\infty\right[$ bestimmt werden. Die Kreislinie soll die Berandung des Kreises mit Radius r und Mittelpunkt $(0, 0)$ sein. Es bietet sich an, die Länge der halben Kreislinie zu berechnen. Die Funktion der oberen halben Kreislinie ist

$$f(r) : \left[-r|r\right] \to \mathbb{R}, \quad f(r)(x) = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Jedoch ist diese Funktion *nicht* differenzierbar auf $\left[-r|r\right]$, so dass **Satz - lgl** nicht angewendet werden kann. Die Länge der halben Kreislinie wird durch Grenzwertbildung ermittelt. Für jedes m mit $0 < m < r$ ist die Funktion $f(r)$ differenzierbar auf $\left[-m|m\right]$ und $f(r)'$ ist dort stetig,

$$f(r)' : \left]-r|r\right[\to \mathbb{R}, \quad f(r)'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Die Länge von $(f(r) \downharpoonleft [-m|m])$ kann somit mit **Satz - lgl** bestimmt werden:

$$\text{Länge von } (f(r) \downharpoonleft [-m|m]) \text{ gleich } \quad \int_{-m}^{m} \sqrt{1 + (f(r)')^2}$$

$$= \int_{-m}^{m} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-m}^{m} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_{-m}^{m} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-m}^{m} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

Erfolgreiche Recherchen ergeben

Für alle $r \in]0| + \infty[$ gilt: $$F(r) :]-r|r[\to \mathbb{R}, \quad F(r)(x) = \arcsin(x/r)$$ ist eine Stammfunktion von $$f(r) :]-r|r[\to \mathbb{R}, \quad f(r)(x) = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$ auf $]-r|r[$.

Es folgt hieraus via $[-m|m] \subseteq]-r|r[$,

$$\text{Länge von } (f(r) \downharpoonleft [-m|m]) \text{ gleich } \quad \int_{-m}^{m} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$r \cdot \int_{-m}^{m} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r \cdot \left(\arcsin(x/r)\Big|_{x=-m}^{x=m}\right) = r \cdot \arcsin(m/r) - r \cdot \arcsin(-m/r)$$

$$= r \cdot \arcsin(m/r) - r \cdot (-\arcsin(m/r)) = 2 \cdot r \cdot \arcsin(m/r).$$

Somit gilt

Länge Halbkreislinie Radius r gleich

$$\lim_{m \uparrow r} 2 \cdot r \cdot \arcsin(m/r) \overset{\text{arcsin stetig}}{=} 2 \cdot r \cdot \arcsin(r/r) = 2 \cdot r \cdot \arcsin 1$$

$$= 2 \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \cdot r,$$

und es folgt das aus der Schulmathematik vertraute Resultat, dass die Länge der Kreislinie mit Radius r gleich $2 \cdot \pi \cdot r$ ist. □(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Es soll die Länge der Ellipsenlinie einer Ellipse in erster Hauptlage mit Halbachsen a, b, $0 < a, b < +\infty$, ermittelt werden. Die Funktion der oberen halben Ellipsenlinie ist, wie bereits früher erörtert,

$$f(a,b) : [-a|a] \to \mathbb{R} \quad f(a,b)(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2},$$

und Ableitung

$$f(a,b)' : \,]-a|a[\, \to \mathbb{R}, \quad f(a,b)'(x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{a^2 - x^2}.$$

Wie bei der Berechnung der Länge der Halbkreislinie kann **Satz - lgl** wegen der fehlenden Differenzierbarkeit von $f(a,b)$ in $\pm a$ nicht unmittelbar eingesetzt werden. Die Berechnung gelingt aber neuerlich mit Hilfe einer Grenzwertbildung:

$$\begin{aligned}
\text{Länge halbe Ellipsenlinie Halbachsen } a \text{ und } b \text{ gleich} & \lim_{m \uparrow a} \int_{-m}^{m} \sqrt{1 + (f')^2} \\
&= \lim_{m \uparrow a} \int_{-m}^{m} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx \\
&= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx,
\end{aligned}$$

wobei man mit dem letzten Integral den Rahmen des Vorkurses verläßt - Integration einer nicht-stetigen Funktion über ein Intervall - und man für $a \neq b$ vergeblich nach einer Darstellung des Integrals mit Hilfe der im Vorkurs vorgestellten Funktionen sucht. Das in Frage stehende Integral kann mit einer Variablensubstitution in

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = & \left| \begin{array}{c} x = a \cdot t \\ dx = a\ dt \end{array} \right| \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{a^2 \cdot t^2}{a^2 - a^2 \cdot t^2}}\, a\ dt = a \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{t^2}{1 - \cdot t^2}}\, dt
\end{aligned}$$

übergeführt werden. □(Beispiel)

4 Volumen Rotationskörper

Satz - vrk

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ f stetig auf $[a|b]$

$\Rightarrow$

Das Volumen des Rotationskörpers mit Erzeugender $(f \downharpoonleft [a|b])$ bei Drehung um die x-Achse ist gleich

$$\pi \cdot \int_a^b f^2.$$

Beispiel (ohne Beweis) Ein Zylinder mit Radius r, $0 < r < +\infty$ und Höhe h, $0 < h < +\infty$, ist ein Rotationskörper mit Erzeugender $(r^{on}\mathbb{R} \downharpoonleft [0|h])$ bei Drehung um die x-Achse. Sein Volumen $\mathtt{V}(r,h)$ ist gemäss **Satz - vrk** gleich

$$\mathtt{V}(r,h) = \pi \cdot \int_0^h (r^{on}\mathbb{R})^2 = \pi \cdot \int_0^h r^2\ dx = \pi \cdot r^2 \cdot \int_0^h 1\ dx = \pi \cdot r^2 \cdot \left(x\Big|_{x=0}^{x=h}\right)$$
$$= \pi \cdot r^2 \cdot (h - 0) = \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Ein Kegel mit kreisrunder Grundfläche mit Radius r, $0 < r < +\infty$ und Höhe h, $0 < h < +\infty$, ist ein Rotationskörper mit Erzeugender $(f(r,h) \downharpoonleft [0|h])$,

$$f(r,h) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(r,h)(x) = \frac{r}{h} \cdot x,$$

bei Drehung um die x-Achse. Sein Volumen $\mathtt{V}(r,h)$ ist gemäss **Satz - vrk** gleich

$$\mathtt{V}(r,h) = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2\ dx = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \int_0^h x^2\ dx = \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{x=0}^{x=h}\right)$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(h^3 - 0^3\right) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Eine Kugelschicht einer Kugel mit Radius r, $0 < r < +\infty$, mit orientierten Abständen a, b vom Mittelpunkt der Kugel, $-r < a < b < r$, ist ein Rotationskörper mit Erzeugender $(f(r) \downharpoonleft [a|b])$,

$$f(r) : [-r|r] \to \mathbb{R}, \quad f(r) = \sqrt{r^2 - x^2},$$

bei Drehung um die x-Achse. Sein Volumen $\mathtt{V}(r)(a,b)$ ist gemäß **Satz - vrk** gleich

$$\begin{aligned}
\mathtt{V}(r)(a,b) &= \pi \cdot \int_a^b \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, dx = \pi \cdot \int_a^b \left(r^2 - x^2\right) \, dx \\
&= \pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{x=a}^{x=b} \right) = \pi \cdot \left(r^2 \cdot b - \frac{1}{3} \cdot b^3 - r^2 \cdot a + \frac{1}{3} \cdot a^3 \right) \\
&= \pi \cdot \left(r^2 \cdot (b-a) - \frac{1}{3} \cdot \left(b^3 - a^3\right) \right) = \pi \cdot (b-a) \cdot \left(r^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(b^2 + b \cdot a + a^2\right) \right).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt via $b = r$, dass das Volumen einer Kugelkappe mit Radius r un orientiertem Abstand a vom Mittelpunkt der Kurve gleich

$$\mathtt{V}(r)(a,r) = \pi \cdot (r-a) \cdot \left(r^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(r^2 + r \cdot a + a^2\right) \right),$$

ist und im Fall $a = -r$, $b = r$ ergibt sich das Volumen einer Kugel mit Radius r,

$$\begin{aligned}
\mathtt{V}(r)(-r,r) &= \pi \cdot (r - (-r)) \cdot \left(r^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(r^2 + r \cdot (-r) + (-r)^2\right) \right) \\
&= \pi \cdot 2 \cdot r \cdot \left(r^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(r^2 - r^2 + r^2\right) \right) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(r^2 - \frac{1}{3} \cdot r^2 \right) \\
&= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{2}{3} \cdot r^2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3.
\end{aligned}$$

□(Beispiel)

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis) Das Volumen eines Torus mit äußerem Radius R, $0 < R < +\infty$ und Querschnittsradius r, $0 < r < R$, ist die *Differenz* der Volumina zweier Rotationskörper mit äußerer Erzeugender

$$f(R,r) : [-r|r] \to \mathbb{R}, \quad f(R,r)(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2},$$

und innerer Erzeugender

$$g(R,r) : [-r|r] \to \mathbb{R}, \quad g(R,r)(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2},$$

bei Drehung um die x-Achse. Das Volumen $\mathtt{V}(R,r)$ des Torus ist via **Satz - vrk** gleich

$$\mathtt{V}(R,r) = \left(\pi \cdot \int_{-r}^{r} f(R,r)^2\right) - \left(\pi \cdot \int_{-r}^{r} g(R,r)^2\right) = \pi \cdot \int_{-r}^{r} f(R,r)^2 - g(R,r)^2$$
$$= \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\right)\, dx$$
$$= \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(R^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - R^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2\right)\, dx$$
$$= \pi \cdot \int_{-r}^{r} 4 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4 \cdot \pi \cdot R \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$
$$\overset{s.o.}{=} 4 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2.$$

□(Beispiel)

5 Volumen, allgemeiner

Satz - vaz

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

$\wedge$ $G : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $\forall z : z \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$G(z) = \text{Fläche von } \{(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x,y,z) \in \Omega\}$$

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ G stetig auf $[a|b]$

$\Rightarrow$

Das Volumen von Ω zwischen $z = a$ und $z = b$ ist

$$\int_a^b G.$$

Beispiel (ohne Beweis) Das Volumen der Kugelschicht einer Kugel $\Omega(r)$ mit Radius r, $0 < r < +\infty$, mit orientierten Abständen a, b vom Mittelpunkt der Kugel, $-r < a < b < r$, soll berechnet werden. Der Mittelpunkt der Kugel sei $(0,0,0)$. Es gilt also

$$\Omega(r) = \{(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

Es soll das Volumen von $\Omega(r)$ zwischen $z = a$ und $z = b$ berechnet werden. Sei

$$G(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(r)(z) = \text{Fläche von } \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x, y, z) \in \Omega(r)\}.$$

Für $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x, y, z) \in \Omega(r)\} = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = r^2 - z^2\},$$

so dass

$$\{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x, y, z) \in \Omega(r)\},$$

für $-r \leq z \leq r$ ein Kreis mit Radius $\sqrt{r^2 - z^2}$ ist und für $r < |z|$ die leere Menge ist. Es folgt

$$G(r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(r)(z) = \begin{cases} \pi \cdot (r^2 - z^2) & , \quad |z| \leq r \\ 0 & , \quad r < |z| \end{cases}$$

und somit ist das gesuchte Volumen $\mathtt{V}(r)(a, b)$ mit fast identischer Rechnung wie zuletzt, doch mit anderer Interpretation, gleich

$$\begin{aligned} \mathtt{V}(r)(a, b) = \int_a^b G(r) = \int_a^b \pi \cdot (r^2 - x^2)\, dx = \pi \cdot \int_a^b \left(r^2 - x^2\right)\, dx \\ = \pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \Bigg|_{x=a}^{x=b} \right) = \pi \cdot \left(r^2 \cdot b - \frac{1}{3} \cdot b^3 - r^2 \cdot a + \frac{1}{3} \cdot a^3 \right) \\ = \pi \cdot \left(r^2 \cdot (b - a) - \frac{1}{3} \cdot \left(b^3 - a^3\right) \right) = \pi \cdot (b - a) \cdot \left(r^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(b^2 + b \cdot a + a^2\right) \right). \end{aligned}$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Das Volumen eines Torus $\Omega(R, r)$ mit äußerem Radius R, $0 < R < +\infty$ und Querschnittsradius r, $0 < r < R$, in horizontaler Lage symmetrisch zur (x, y)-Ebene und mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ soll berechnet werden. Setzt man für $z \in \mathbb{R}$ zunächst

$$\mathtt{E}(R, r)(z) = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x, y, z) \in \Omega(R, r)\},$$

so stellt man fest, dass $\mathtt{E}(R, r)(z)$ für $-r \leq z \leq r$ ein Kreiring mit äusserem Radius $R + \sqrt{r^2 - z^2}$ und innerem Radius $R - \sqrt{r^2 - z^2}$ ist. Für $r < |z|$ ist $\mathtt{E}(R, r)(z)$ die leere Menge.

Hiermit folgt für

$$\begin{aligned} & G(R, r) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & \qquad G(R, r)(z) = \text{Fläche von } \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x, y, z) \in \Omega(R, r)\} \\ & \qquad\qquad = \begin{cases} \pi \cdot \left(\left(R + \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - z^2}\right)^2 \right) & , \quad |z| \leq r \\ 0 & , \quad r < |z| \end{cases} \end{aligned}$$

Das gesuchte Volumen $\mathtt{V}(R,r)$ ist mit fast identischer Rechnung wie zuletzt, doch mit anderer Interpretation, gleich

$$\begin{aligned}
\mathtt{V}(R,r) &= \int_{-r}^{r} G \\
&= \int_{-r}^{r} \pi \cdot \left(\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \right) \, dx \\
&= \pi \cdot \int_{-r}^{r} f(R,r)^2 - g(R,r)^2 \\
&= \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \right) \, dx \\
&= \pi \cdot \int_{-r}^{r} \left(R^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - R^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2 \right) \, dx \\
&= \pi \cdot \int_{-r}^{r} 4 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 4 \cdot \pi \cdot R \cdot \int_{-r}^{4} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx \\
&\overset{s.o.}{=} 4 \cdot \pi \cdot R \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2.
\end{aligned}$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Das Volumen eines Ellipsoids $\Omega(a,b,c)$ mit Halbachsen a, b, c, $0 < a, b, c < +\infty$ in erster Hauptlage soll berechnet werden. Es gilt

$$\Omega(a,b,c) = \left\{ (x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\},$$

und wenn man für $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathtt{E}(a,b,c)(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \Omega(a,b,c)\},$$

setzt, so stellt man für $-c < z < c$ fest, dass es sich bei $\mathtt{E}(a,b,c)$ um eine Ellipse in erster Hauptlage mit Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2,$$

handelt, die durch Umstellen in

$$\left(\frac{x}{a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2}} \right)^2 = 1,$$

übergeht. Die z-abhängige Fläche ist bekannter Maßen gleich

$$a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2} \cdot b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2} \cdot \pi,$$

also gleich

$$a \cdot b \cdot \pi \cdot \left(1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right).$$

Für $|z| = c$ ist $\mathtt{E}(a, b, c)(z)$ ein Punkt - Fläche= 0 - und für $c < |z|$ ist $\mathtt{E}(a, b, c)$ die leere Menge, ebenfalls mit Fläche= 0. Es folgt die insbesondere für $|z| = c$ bemerkenswert richtige Aussage

$$G(a, b, c) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$G(a, b, c)(z) = \text{Fläche von } \mathtt{E}(a, b, c)(z) \quad = \begin{cases} a \cdot b \cdot \pi \cdot \left(1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right) & , \quad |z| \leq c \\ 0 & , \quad c < |z| \end{cases}$$

Es folgt für das gesuchte Volumen

$$\begin{aligned}
\mathtt{V}(a, b, c) &= \int_{-c}^{c} G(a, b, c) \\
&= \int_{-c}^{c} a \cdot b \cdot \pi \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right) \, dx = \int_{-c}^{c} a \cdot b \cdot \pi \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \left(c^2 - x^2\right) \, dx \\
&= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \int_{-c}^{c} \left(c^2 - x^2\right) \, dx = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \left(c^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{x=-c}^{x=c} \right) \\
&= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \left(c^2 \cdot c - \frac{1}{3} \cdot c^3 - c^2 \cdot (-c) + \frac{1}{3} \cdot c^2 \cdot (-c)\right) \\
&= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \left(2 \cdot c^3 - \frac{2}{3} \cdot c^3\right) = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot c^3 \\
&= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c.
\end{aligned}$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Das Volumen eines Kegels Ω mit ebener Grundfläche $G_\circ$ und Höhe h soll berechnet werden. Mit Hilfe des Strahlensatzes zeigt sich, dass $G(z)$ für $0 \leq z \leq h$ quadratisch abnimmt, wobei bei $z = 0$ der größte Wert= $G_\circ$ und bei $z = h$ der kleinste Wert= 0 angenommen wird. Für alle anderen z gilt $G(z) = 0$. Es folgt

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(z) = \begin{cases} G_\circ \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 & , \quad 0 \leq z \leq h \\ 0 & , \quad z < 0 \vee h < z \end{cases}$$

und hieraus ist das gesuchte Volumen gleich

$$
\begin{aligned}
\mathtt{V} &= \int_0^h G \\
&= \int_0^h G_\circ \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \, dx = \int_0^h G_\circ \cdot \frac{1}{h^2} \cdot (h-x)^2 \, dx = G_\circ \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h (h-x)^2 \, dx \\
&= G_\circ \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \int_0^h \left(h^2 - 2 \cdot h \cdot x + x^2\right) \, dx = G_\circ \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \left(h^2 \cdot x - h \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{x=0}^{x=h} \right) \\
&= G_\circ \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \left(h^2 \cdot h - h \cdot h^2 + \frac{1}{3} \cdot h^3 - h^2 \cdot 0 + h \cdot 0^2 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) = G_\circ \cdot \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot h^3 \\
&= \frac{1}{3} \cdot G_\circ \cdot h.
\end{aligned}
$$

□(Beispiel)

6 Bogenlänge von Kurven

Satz - blk

$c : I \to \mathbb{R}^n \wedge 1 \leq n \in \mathbb{N}$

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ c differenzierbar auf $[a|b]$

$\wedge$ $\dot{c}$ stetig auf $[a|b]$

$\Rightarrow$

Die Bogenlänge der Kurve $(c \downharpoonleft [a|b])$ ist gleich

$$\int_a^b |\dot{c}|.$$

Beispiel (ohne Beweis) Die Kurve

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad c(t) = \mathfrak{p} + (t - t_\circ) \cdot \mathfrak{v},$$

wobei $\mathfrak{p}, \mathfrak{v} \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$, und $t_\circ \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\dot{c} : I \to \mathbb{R}^n, \quad \dot{c}(t) = \mathfrak{v}.$$

Falls $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist die Bogenlänge von $(c \downharpoonleft [a|b])$ gleich

$$\int_a^b |\dot{c}| = \int_a^b |\mathfrak{v}| = (b-a) \cdot |\mathfrak{v}|.$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Eine Möglichkeit, die Kreislinie mit Radius r, $0 < r < +\infty$ um Mittelpunkt $(0,0)$ im $\mathbb{R}^2$ als Bild-Bereich einer Kurve darzustellen, ist durch $\mathsf{ran}\, c$ mit

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t),$$

gegeben. Es gilt

$$\dot{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \dot{c}(t) = (-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t),$$

so dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Bogenlänge von $(c \downharpoonleft [a|b])$ gleich

$$\int_a^b |\dot{c}| = \int_a^b |(-r \cdot \sin t, r \cdot \cos t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(-r \cdot \sin t)^2 + (r \cdot \cos t)^2}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cdot \cos t^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{r^2}\, dt = \int_a^b r\, dt = r \cdot (b-a).$$

Im Spezialfall $a = 0$ und $b = 2 \cdot \pi$ wird die Kreislinie genau einmal durchlaufen und die Bogenlänge von $(c \downharpoonleft [0|2 \cdot \pi])$ ist gleich dem Kreisumfang

$$2 \cdot \pi \cdot r.$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $0 < \alpha, \beta < +\infty$ parametrisiert die Kurve

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (\alpha \cdot \cos t, \beta \cdot \sin t),$$

die Ellipsenlinie in erster Hauptlage mit Halbachsen α und β. Es gilt

$$\dot{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \dot{c}(t) = (-\alpha \cdot \sin t, \beta \cdot \cos t),$$

so dass die Bogenlänge von $(c \downharpoonleft [a|b])$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ gleich

$$\int_a^b |\dot{c}| = \int_a^b |(-\alpha \cdot \sin t, \beta \cdot \cos t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(-\alpha \cdot \sin t)^2 + (\beta \cdot \cos t)^2}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{\alpha^2 \cdot \sin^2 t + \beta^2 \cdot \cos^2 t}\, dt,$$

Im Fall $\alpha \neq \beta$ ist eine Darstellung mit den im Vorkurs zur Verfügung stehenden Funktionen nicht möglich. □(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Für $r \in \left]0|+\infty\right[$ parametrisiert die Kurve

$$c : \left[0|+\infty\right[\to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (r \cdot t \cdot \cos t, r \cdot t \cdot \sin t),$$

eine Spirale im $\mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\dot{c} : \left[0|+\infty\right[\to \mathbb{R}^2, \quad \dot{c}(t) = (r \cdot (\cos t) - r \cdot t \cdot \sin t, r \cdot (\sin t) + r \cdot t \cdot \cos t),$$

so dass für $b \in \left]0|+\infty\right[$ die Bogenlänge der Kurve $(c \downharpoonright [0|b])$ gleich

$$\begin{aligned}
\int_0^b |\dot{c}| &= \int_0^b |(r \cdot (\cos t) - r \cdot t \cdot \sin t, r \cdot (\sin t) + r \cdot t \cdot \cos t)|\, dt \\
&= \int_0^b r \cdot |((\cos t) - t \cdot \sin t, (\sin t) + t \cdot \cos t)|\, dt \\
&= r \cdot \int_0^b |((\cos t) - t \cdot \sin t, (\sin t) + t \cdot \cos t)|\, dt \\
&= r \cdot \int_0^b \sqrt{((\cos t) - t \cdot \sin t)^2 + ((\sin t) + t \cdot \cos t)^2}\, dt \\
&= r \cdot \int_0^b \sqrt{1 - 2 \cdot t \cdot (\sin t) \cdot (\cos t) + t^2 + 2 \cdot t \cdot (\sin t) \cdot (\cos t)}\, dt \\
&= r \cdot \int_0^b \sqrt{1+t^2}\, dt \overset{s.o.}{=} r \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(t \cdot \sqrt{1+t^2} + \operatorname{Arsinh} t \right) \Big|_{t=0}^{t=b} \right) \\
&= \frac{r}{2} \cdot \left(b \cdot \sqrt{1+b^2} + \operatorname{Arsinh} b - 0 \cdot \sqrt{1+0^2} - \operatorname{Arsinh} 0 \right) \\
&= \frac{r}{2} \cdot \left(b \cdot \sqrt{1+b^2} + \operatorname{Arsinh} b \right).
\end{aligned}$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Falls $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ eine ONB des $\mathbb{R}^3$ sind, wenn also

$$|\mathfrak{e}| = |\mathfrak{f}| = |\mathfrak{g}| = 1, \quad \langle \mathfrak{e}|\mathfrak{f} \rangle = \langle \mathfrak{f}|\mathfrak{g} \rangle = \langle \mathfrak{g}|\mathfrak{e} \rangle = 0,$$

gilt, und falls $0 \neq \lambda, r, \omega \in \mathbb{R}$, so parametrisiert die Kurve

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) = \lambda \cdot t \cdot \mathfrak{e} + r \cdot (\cos(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{f} + r \cdot (\sin(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{g},$$

eine Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$. Es gilt

$$\dot{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \dot{c}(t) = \lambda \cdot \mathfrak{e} - \omega \cdot r \cdot (\sin(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{f} + \omega \cdot r \cdot (\cos(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{g},$$

so dass für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
|\dot{c}(t)|^2 &= \langle \dot{c}(t) | \dot{c}(t) \rangle \\
&= \langle \lambda \cdot \mathfrak{e} - \omega \cdot r \cdot (\sin(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{f} + \omega \cdot r \cdot (\cos(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{g} \\
&\quad | \lambda \cdot \mathfrak{e} - \omega \cdot r \cdot (\sin(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{f} + \omega \cdot r \cdot (\cos(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{g} \rangle \\
&= \lambda^2 \cdot \langle \mathfrak{e} | \mathfrak{e} \rangle + \omega^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \cdot \langle \mathfrak{f} | \mathfrak{f} \rangle + \omega^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) \cdot \langle \mathfrak{g} | \mathfrak{g} \rangle \\
&\quad - 2 \cdot \lambda \cdot \omega \cdot r \cdot \langle \mathfrak{e} | \mathfrak{f} \rangle - 2 \cdot \lambda \cdot \omega \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \langle \mathfrak{e} | \mathfrak{g} \rangle - 2 \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot (\sin(\omega \cdot t)) \cdot (\cos(\omega \cdot t)) \cdot \langle \mathfrak{f} | \mathfrak{g} \rangle \\
&= \lambda^2 \cdot 1 + \omega^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \cdot 1 + \omega^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) \cdot 1 \\
&\quad - 2 \cdot \lambda \cdot \omega \cdot r \cdot 0 - 2 \cdot \lambda \cdot \omega \cdot r \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot 0 - 2 \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot (\sin(\omega \cdot t)) \cdot (\cos(\omega \cdot t)) \cdot 0 \\
&= \lambda^2 + \omega^2 \cdot r^2 \cdot ((\sin^2(\omega \cdot t)) + (\cos^2(\omega \cdot t))) \\
&= \lambda^2 + \omega^2 \cdot r^2,
\end{aligned}
$$

und somit für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Kurve $(c \downharpoonright [a|b])$ die Bogenlänge

$$\int_a^b \sqrt{\lambda^2 + \omega^2 \cdot r^2}\, dt = \sqrt{\lambda^2 + \omega^2 \cdot r^2} \cdot (b - a),$$

hat. $\square$(Beispiel)

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis) Falls $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB des $\mathbb{R}^3$, falls $\lambda \in \mathbb{R}$ und $0 \neq r, A, \omega, \Omega \in \mathbb{R}$, so parametrisiert die Kurve

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (\lambda + A \cdot \sin(\Omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{e} + r \cdot (\cos(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{f} + r \cdot (\sin(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{g},$$

eine Sinusschwingung längs einer Kreislinie mit Mittelpunkt $\lambda \cdot \mathfrak{e}$ und Radius $|r|$, die in der Ebene senkrecht zu $\mathfrak{e}$ liegt. Es gilt

$$\dot{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \dot{c}(t) = A \cdot \Omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \mathfrak{e} - \omega \cdot r \cdot (\sin(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{f} + \omega \cdot r \cdot (\cos(\omega \cdot t)) \cdot \mathfrak{g},$$

so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ nach kurzer Rechnung

$$|\dot{c}(t)| = \omega^2 \cdot r^2 + A^2 \cdot \Omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t),$$

folgt. Konsequenter Weise ist für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Bogenlänge der Kurve $(c \downharpoonright [a|b])$ gleich

$$\int_a^b \sqrt{\omega^2 \cdot r^2 + A^2 \cdot \Omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t)}\, dt,$$

wobei für diesen Term nur in Spezialfällen Darstellungen mit Hilfe der im Vorkurs vorgestellten Funktionen möglich ist. $\square$(Beispiel)

7 Mantelfläche Rotationskörper

Satz - mrk

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $\in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ f differenzierbar auf $[a|b]$

$\wedge$ f' stetig auf $[a|b]$

$\Rightarrow$

Die Mantelfläche des Rotationskörpers mit Erzeugender $(f \downharpoonleft [a|b])$ bei Drehung um die x-Achse ist gleich

$$2 \cdot \pi \cdot \int_a^b |f| \cdot \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Beispiel (ohne Beweis) Die Mantelfläche eine geraden Zylinders mit Radius r, $0 < r < +\infty$, und Höhe h, $0 < h < +\infty$, soll berechnet werden. Der Zylinder ist ein Rotationskörper mit Erzeugender $(f \downharpoonleft [0|h])$,

$$f = r^{on}\mathbb{R},$$

bei Drehung um die x-Achse, so dass via

$$f' = \mathsf{zo}_{\mathbb{R}},$$

und obiger Formel die gesuchte Mantelfläche gleich

$$2 \cdot \pi \cdot \int_0^h f \cdot \sqrt{1 + (f')^2} = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^h r \cdot \sqrt{1 + 0^2}\, dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^h r\, dx = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h.$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Die Mantelfläche eines Kegels mit kreisrunder Grundfläche mit Radius r, $0 < r < +\infty$, und Höhe h, $0 < h < +\infty$, soll berechnet werden. Der Kegel ist ein Rotationskörper mit Erzeugender

$$(f \downharpoonleft [0|h]),$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{r}{h} \cdot x,$$

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{r}{h},$$

bei Drehung um die x-Achse, so dass mit obiger Formel die gesuchte Mantehlfläche gleich

$$
\begin{aligned}
2\cdot\pi\cdot\int_0^h |f|\cdot\sqrt{1+(f')^2} &= 2\cdot\pi\cdot\int_0^h \frac{r}{h}\cdot x\cdot\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\,dx \\
&= 2\cdot\pi\cdot\frac{r}{h}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\cdot\int_0^h x\,dx = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\cdot\frac{r}{h}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x^2\Big|_{x=0}^{x=h}\right) \\
&= 2\cdot\pi\cdot\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\cdot\frac{r}{h}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot h^2-\frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2}\cdot\frac{r}{h}\cdot\frac{1}{2}\cdot h^2 \\
&= \pi\cdot r\cdot h\cdot\sqrt{1+\left(\frac{r}{h}\right)^2} = \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}.
\end{aligned}
$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Die Oberfläche einer Kugel mit Radius r, $0<r<+\infty$, soll berechnet werden. Ist der Mittelpunkt der Kugel gleich $(0,0,0)$, so handelt es sich bei der Kugel zwar um einen Rotationskörper mit Erzeugender $(f \downharpoonright [-r|r])$,

$$
\begin{aligned}
f &: [-r|r] \to \mathbb{R}, \quad f(x)=\sqrt{r^2-x^2}, \\
f' &:]-r|r[\to \mathbb{R} \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},
\end{aligned}
$$

bei Drehung um die x-Achse, jedoch ist f *nicht* differenzierbar auf $[-r|r]$ - f nicht differenzierbar in $-r, r$ -, so dass obige Formel nicht unmittelbar zur Berechnung der Oberfläche der Kugel eingesetzt werden kann.

Jedoch kann die Oberfläche der Kugel durch eine Grenzwertbildung ermittelt werden. Dazu wird zunächst die Mantelfläche der Kugelschicht der Kugel mit orientierten Abständen a, b vom Mittelpunkt $(0,0,0)$, $-r<a<b<r$, berechnet. Danach wird $a=-m, b=m$ mit $m\in\,]0|r[$ gesetzt und der Grenzwert $m\uparrow 0$ ermittelt.

Die Mantelfläche $\mathtt{M}(r)(a,b)$ der angesprochenen Kugelschicht kann, da es sich um die Mantelfläche eines Rotationskörpers mit Erzeugender $(f \downharpoonright [a|b])$ bei Drehung um die x-Aches handelt, mit obiger Formel berechnet werden. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\mathtt{M}(r)(a,b) &= 2\cdot\pi\cdot\int_a^b f\cdot\sqrt{1+(f')^2} \\
&= 2\cdot\pi\cdot\int_a^b \sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= 2\cdot\pi\cdot\int_a^b \sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\cdot\pi\cdot\int_a^b \sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= 2\cdot\pi\cdot\int_a^b r\,dx = 2\cdot\pi\cdot r\cdot(b-a).
\end{aligned}
$$

Die Oberfläche der Kugel ermittelt sich nun zu

$$\mathtt{M}(r) = \lim_{m\uparrow r} \mathtt{M}(r)(-m,m) = \lim_{m\uparrow r} 2\cdot\pi\cdot r\cdot(m-(-m)) = \lim_{m\uparrow r} 4\cdot\pi\cdot r\cdot m$$
$$= 4\cdot\pi\cdot r^2.$$

$\square$(Beispiel)

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis) Die Oberfläche eines Torus mit äußerem Radius R, $0 < R < +\infty$ und Querschnittsradius r, $0 < r < R$, ist gleich der Summe der Mantelfläche des Rotationskörpers mit Erzeugender $(f \downharpoonleft [\,-r|r\,])$,

$$f : [\,-r|r\,] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2},$$
$$f' :]\,-r|r\,[\to \mathbb{R} \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},$$

bei Drehung um die x-Achse und der Mantelfläche des Rotationskörpers mit Erzeugendenr $(g \downharpoonleft [\,-r|r\,])$,

$$g : [\,-r|r\,] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2},$$
$$g' :]\,-r|r\,[\to \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

bei Drehung um die x-Achse.

Wegen fehlender Differenzierbarkeit auf $[\,-r|r\,]$ wird die Mantelfläche zunächst für die Rotationskörper mit Erzeugenden $(f \downharpoonleft [a|b])$, $(g \downharpoonleft [a|b])$, wobei $-r < a < b < r$, bei Drehung um die x-Achse bestimmt. Diese Mantelflächen werden mit $\mathtt{M}(R,r)(a,b)$ bezeichnet. Danach wird $a = -m$ und $b = m$ für $m \in\,]0|r[$ gesetzt und der Grenzwert $m \uparrow r$ gebildet.

$$\begin{aligned}
\mathtt{M}(R,r)(a,b) &= \left(2\cdot\pi\cdot\int_a^b |f|\cdot\sqrt{1+(f')^2}\right) + \left(2\cdot\pi\cdot\int_a^b |g|\cdot\sqrt{1+(g')^2}\right) \\
&= \left(2\cdot\pi\cdot\int_a^b \left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{(-x)}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\right)\,dx \\
&\quad + \left(2\cdot\pi\cdot\int_a^b \left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\right)\,dx \\
&= \left(2\cdot\pi\cdot\int_a^b \left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\right)\,dx \\
&\quad + \left(2\cdot\pi\cdot\int_a^b \left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\right)\,dx \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathtt{M}(R,r)(a,b) = \ldots = &\left(2\cdot\pi\cdot\int_a^b \left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\right)\, dx \\
&+\left(2\cdot\pi\cdot\int_a^b \left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\right)\, dx \\
&= 2\cdot\pi\cdot\int_a^b \left(R+\sqrt{r^2-x^2}+R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} \\
&= 2\cdot\pi\cdot\int_a^b 2\cdot R\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx = 4\cdot\pi\cdot R\cdot r\cdot\int_a^b \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx \\
&\overset{s.o.}{=} 4\cdot\pi\cdot R\cdot r\cdot\left(\arcsin(x/r)\big|_{x=a}^{x=b}\right) \\
&= 4\cdot\pi\cdot R\cdot r\cdot((\arcsin(b/r))-(\arcsin(a/r))).
\end{aligned}
$$

Mit diesem Zwischenresultat kann die Oberfläche des in Frage stehenden Torus wie oben beschrieben berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
\mathtt{M}(R,r) &= \lim_{m\uparrow r}\mathtt{M}(R,r)(-m,m) \\
&= \lim_{m\uparrow r} 4\cdot\pi\cdot r\cdot R\cdot((\arcsin(m/r))-(\arcsin((-m)/r))) \\
&= \lim_{m\uparrow r} 4\cdot\pi\cdot R\cdot r\cdot((\arcsin(m/r))-(\arcsin(-m/r))) \\
&= \lim_{m\uparrow r} 4\cdot\pi\cdot R\cdot r\cdot((\arcsin(m/r))-(-\arcsin(m/r))) \\
&= \lim_{m\uparrow r} 4\cdot\pi\cdot R\cdot r\cdot 2\cdot\arcsin(m/r) = \lim_{m\uparrow r} 8\cdot\pi\cdot R\cdot r\cdot\arcsin(m/r) \\
&\overset{\text{arcsin stetig}}{=} 8\cdot\pi\cdot R\cdot r\cdot\frac{\pi}{2} = 4\cdot\pi^2\cdot R\cdot r
\end{aligned}
$$

□(Beispiel)