Hyperbelfunktionen. Areafunktionen.

Andreas Unterreiter

14. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 sinh

$$\sinh = \left\{ \left(x, \frac{(\exp x) - (\exp(-x))}{2} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sinh x = \frac{(\exp x) - (\exp(-x))}{2},$$

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ bijektiv}.$$

dom ran
dom $\sinh = \mathbb{R}$.
ran $\sinh = \mathbb{R}$.

(un-)gerade
sinh ungerade.

Periodizität
$\neg$(sinh ist T-periodisch).

Monotonie
sinh streng wachsend.

Wegen $\sinh' = \cosh$ und ran $\cosh = [1| + \infty[$ ist sinh streng wachsend.

konvex/konkav
$\neg$(sinh konvex).
sinh konvex auf $[0| + \infty[$.

$\neg$(sinh konkav).
sinh konkav auf $] - \infty|0]$.

Wegen $\sinh'' = \sinh$ ist sinh genau auf jenen echten reellen Intervallen konvex/konkav, auf denen sinh größergleich0/kleinergleich0 ist.

Extrema
$\neg$(sinh hat in x globales Maximum).
$\neg$(sinh hat in x globales Minimum).

Stetigkeit
sinh stetig.

Differenzierbarkeit
sinh beliebig oft differenzierbar.

$$\sinh' = \cosh,$$

$$\sinh'' = \sinh.$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \sinh x = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \sinh' x = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \sinh'' x = +\infty,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty}\sinh x=-\infty,\qquad \lim_{x\downarrow-\infty}\sinh' x=+\infty,\qquad \lim_{x\downarrow-\infty}\sinh'' x=-\infty,$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$\sinh 0=0.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x,y: x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}\Rightarrow \sinh(x+y)=(\sinh x)\cdot(\cosh y)+(\cosh x)\cdot(\sinh y),$$

$$\forall x: x\in\mathbb{R}\Rightarrow \sinh(2\cdot x)=2\cdot(\sinh x)\cdot(\cosh x),$$

$$\forall x: x\in\mathbb{R}\Rightarrow (\sinh x)+(\cosh x)=\exp x,$$

$$\forall x: x\in\mathbb{R}\Rightarrow (\sinh x)-(\cosh x)=-\exp(-x),$$

$$\forall x: x\in\mathbb{R}\Rightarrow \cosh^2 x-\sinh^2 x=1,$$

$$\forall x: x\in\mathbb{R}\Rightarrow \cosh^2 x+\sinh^2 x=\cosh(2\cdot x).$$

$$\forall x: x\in\mathbb{R}\Rightarrow \sinh x=\mathsf{sgn}\,(x)\cdot\sqrt{\cosh^2 x-1},$$

$$\forall x: x\in\mathbb{R}\Rightarrow \sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$$

$$\forall x: x\in\mathbb{R}\Rightarrow \sinh x=\frac{\tanh x}{\sqrt{1+\tanh^2 x}}.$$

2 cosh

$$\cosh=\left\{\left(x,\frac{(\exp x)+(\exp(-x))}{2}\right): x\in\mathbb{R}\right\}.$$

$$\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad \cosh x=\frac{(\exp x)+(\exp(-x))}{2}.$$

dom ran
dom $\cosh=\mathbb{R}$.
ran $\cosh=[1|+\infty[$.

(un-)gerade
cosh gerade.

Periodizität
$\neg$(cosh ist T-periodisch).

Monotonie
$\neg$(cosh wachsend).
cosh streng wachsend auf $[0|+\infty[$.

$\neg$(cosh fallend).
cosh streng fallend auf $]-\infty|0]$.

Wegen $\cosh' = \sinh$ ist cosh genau auf jenen echten reellen Intervallen streng wachsend/streng fallend, auf denen sinh größergleich0/kleinergleich0 ist.

konvex/konkav
cosh konvex.

Es gilt $\cosh'' = \cosh$ und $\mathsf{ran}\ \cosh = [1|+\infty[$ ist cosh.

Extrema
$\neg$(cosh hat in x globales Maximum).

cosh hat in 0 striktes globales Minimum $\wedge$ $\cosh 0 = 1$.
cosh hat in x globales Minimum $\quad\Rightarrow\quad x = 0 \wedge \cosh x = 1$.

Stetigkeit
cosh stetig.

Differenzierbarkeit
cosh beliebig oft differenzierbar.

$$\cosh' = \sinh,$$

$$\cosh'' = \cosh\,.$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \cosh x = +\infty, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \cosh' x = +\infty, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \cosh'' x = +\infty,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \cosh x = +\infty, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \cosh' x = -\infty, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \cosh'' x = +\infty,$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$\cosh 0 = 1.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh(x+y) = (\cosh x)\cdot(\cosh y) + (\sinh x)\cdot(\sinh y),$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh(2\cdot x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\cosh x) + (\sinh x) = \exp x,$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\cosh x) - (\sinh x) = \exp(-x),$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2\cdot x).$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x},$$
$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$\forall x : 0 \neq x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh x = \frac{|\coth x|}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}.$$

3 tanh

$$\tanh = \sinh ./. \cosh,$$
$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ bijektiv.}$$

dom ran
dom $\tanh = \mathbb{R}$.
ran $\tanh =]-1|1[$.

(un-)gerade
tanh ungerade.

In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, da sinh ungerade und cosh gerade,

$$\begin{aligned}\tanh(-x) = (\sinh ./. \cosh)(-x) &= \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} \\ &= -\frac{\sinh x}{\cosh x} = -(\sinh ./. \cosh)(x) = -\tanh x.\end{aligned}$$

Periodiziät
$\neg$(tanh ist $T-$periodisch).

Monotonie
tanh streng wachsend.

Wegen $\tanh' = \frac{1}{\cosh^2}$ ist tanh streng wachsend.

konvex/konkav
$\neg$(tanh konvex).
tanh konvex auf $]-\infty|0]$.

$\neg$(tanh konkav).
tanh konkav auf $[0|+\infty[$.

Wegen $\tanh'' = -\frac{2\cdot\sinh}{\cosh^3}$ ist tanh auf jedem echten reellen Intervall, das Teilmenge von $]-\infty|0]/[0|+\infty[$ ist, konvex/konkav.

Extrema
$\neg$(tanh hat in x globales Maximum).
$\neg$(tanh hat in x globales Minimum).

Stetigkeit
tanh stetig.

Differenzierbarkeit
tanh beliebig oft differenzierbar.

$$\tanh' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x,$$

$$\tanh'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \tanh'' x = -\frac{2 \cdot \sinh x}{\cosh^3 x} = -2 \cdot \tanh x \cdot (1 - \tanh^2 x).$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \tanh x = 1, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \tanh' x = 0, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \tanh'' x = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \tanh x = -1, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \tanh' x = 0, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \tanh'' x = 0,$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$\tanh 0 = 0.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x, y : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \tanh(x + y) = \frac{(\tanh x) + (\tanh y)}{1 + (\tanh x) \cdot (\tanh y)}.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \tanh(2 \cdot x) = \frac{2 \cdot \tanh x}{1 + \tanh^2 x},$$

$$\forall x : 0 \neq x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\tanh x) \cdot (\coth x) = 1 \wedge \tanh x = \frac{1}{\coth x},$$

$$(\tanh 0) \cdot (\coth 0) = 0.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}}.$$

4 coth

$$\coth = \cosh ./. \sinh,$$

$$\coth : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\coth : \mathbb{R} \to \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus [-1|1]) \text{ bijektiv.}$$

dom ran
dom $\coth = \mathbb{R}$.
ran $\coth = \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus [-1|1]) =]-\infty|-1[\cup \{0\} \cup]1|+\infty[$.

<u>(un-)gerade</u>
coth ungerade.

In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, da sinh ungerade und cosh gerade,

$$\begin{aligned}\coth(-x) = (\cosh ./. \sinh)(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} &= \frac{\cosh x}{-\sinh x} \\ &= -\frac{\cosh x}{\sinh x} = -(\cosh ./. \sinh)(x) = -\coth x.\end{aligned}$$

<u>Periodizität</u>
$\neg$(coth ist $T-$periodisch).

<u>Monotonie</u>
$\neg$(coth wachsend).

$\neg$(coth fallend).
coth streng fallend auf $\rbrack -\infty|0\lbrack$.
coth streng fallend auf $\rbrack 0|+\infty\lbrack$.

Wegen $\coth' x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$ für alle x mit $0 \neq x \in \mathbb{R}$ ist coth auf jedem echten reellen Intervall, das 0 *nicht* enthält, streng fallend. Dennoch ist coth *nicht* fallend.

<u>konvex/kondav</u>
$\neg$(coth konvex).
coth konvex auf $\rbrack 0|+\infty\lbrack$.

$\neg$(coth konkav).
coth konkav auf $\rbrack -\infty|0\lbrack$.

Wege $\coth'' x = \frac{2\cdot\cosh x}{\sinh^3 x}$ für alle x mit $0 \neq x \in \mathbb{R}$, ist coth auf jedem echten, reellen Intervall, das Teilmenge von $\rbrack -\infty|0\lbrack / \rbrack 0|+\infty\lbrack$ ist, konkav/konvex.

<u>Extrema</u>
$\neg$(coth hat in x globales Maximum).
$\neg$(coth hat in x globales Minimum).

<u>Stetigkeit</u>
$\neg$(coth stetig).

coth stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

coth unstetig in 0.

<u>Differenzierbarkeit</u>
$\neg$(coth differenzierbar).

coth beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\coth' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \coth' x = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x,$$

$$\coth'' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \coth'' x = -\frac{2 \cdot \cosh x}{\sinh^3 x} = -2 \cdot \coth x \cdot (1 - \coth^2 x).$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \coth x = 1, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \coth' x = 0, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \coth'' x = 0,$$

$$\lim_{x \downarrow -\infty} \coth x = 1, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} \coth' x = 0, \quad \lim_{x \downarrow -\infty} \coth'' x = 0.$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$\coth 0 = 0.$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \coth x = +\infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{\coth x - \coth 0}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\coth x}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \coth' x = -\infty, \quad \lim_{x \downarrow 0} \coth'' x = +\infty,$$

$$\lim_{x \uparrow 0} \coth x = -\infty, \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{\coth x - \coth 0}{x - 0} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{\coth x}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \uparrow 0} \coth' x = -\infty, \quad \lim_{x \uparrow 0} \coth'' x = -\infty.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x : 0 \neq x \in \mathbb{R} \Rightarrow (\coth x) \cdot (\tanh x) = 1 \land \coth x = \frac{1}{\tanh x},$$

$$(\coth 0) \cdot (\sinh 0) = 0.$$

$$\forall x : 0 \neq x \in \mathbb{R} \Rightarrow \coth x = \frac{\mathsf{sgn}\,(x) \cdot \cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}.$$

5 Arsinh

Arsinh wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = \sinh$ und $I = \mathbb{R}$ und $J = \sinh[I] = \mathbb{R}$ gebildet. sinh ist stetig, sinh ist streng wachsend. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonright I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus dem Parameter sinh ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\text{Arsinh},$$

bezeichnet wird. Arsinh ist die (reelle) AreaSinushyperbolicusfunktion. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\text{Arsinh} = \sinh^{-1}.$$

$$\text{Arsinh reelle Funktion,}$$

$$\text{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{bijektiv.}$$

$$\text{Arsinh streng wachsend,}$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{Arsinh}(\sinh x) = x,$$

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sinh(\text{Arsinh } y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von sinh, aus $\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \neq \cosh x = \sinh' x$ folgt

$$\text{Arsinh differenzierbar,}$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{Arsinh}'(\sinh x) \cdot \sinh' x = \text{Arsinh}'(\sinh x) \cdot \cosh x = 1,$$

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sinh'(\text{Arsinh } y) \cdot \text{Arsinh}' y = \cosh(\text{Arsinh } y) \cdot \text{Arsinh}' y = 1.$$

In dieser letzten Aussage gilt Arsinh $y \in \mathbb{R}$. Hieraus und aus der bereits früher fest gestellten Aussage

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x},$$

folgt

$$\cosh(\text{Arsinh } y) = \sqrt{1 + \sinh^2(\text{Arsinh } y)},$$

woraus via $y \in \mathbb{R}$, wonach

$$\sinh(\text{Arsinh } y) = y,$$

gilt, sich die Aussage

$$\cosh(\text{Arsinh } y) = \sqrt{1 + y^2},$$

ergibt. Hieraus und aus obigem Resultat folgt nun

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh(\text{Arsinh } y) \cdot \text{Arsinh}' y = \sqrt{1 + y^2} \cdot \text{Arsinh}' y = 1,$$

woraus wegen $0 \neq \sqrt{1 + y^2}$ die Aussage

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{Arsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

folgt.

⋆

Bei der Bestimmung der Umkehrfunktion von sinh geht es darum, bei gegebenem y mit $y \in \mathsf{ran} \sinh = \mathbb{R}$ jenes x mit $x \in \mathsf{dom} \sinh = \mathbb{R}$ zu bestimmen, so dass

$$\sinh x = y.$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Definition von sinh auch als

$$\frac{(\exp x) - (\exp(-x))}{2} = y,$$

und somit als

$$(\exp x) - 2 \cdot y - (\exp(-x)) = 0,$$

geschrieben werden. Aus dem angenommenen $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$u = \exp x \in \,]0| + \infty[,$$

und

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\exp x} = \exp(-x),$$

so dass sich

$$u - 2 \cdot y - \frac{1}{u} = 0,$$

ergibt. Hieraus folgt via $0 < u$, also $0 \neq u$,

$$u^2 - 2 \cdot y \cdot u - 1 = 0,$$

und dies ist bei gegebenem $y \in \mathbb{R}$ eine quadratische Gleichung in u. Mit Hilfe von Schulmaathematik folgt

$$u = y + \sqrt{1+y^2} \quad \text{oder} \quad u = y - \sqrt{1+y^2},$$

Aus $y \in \mathbb{R}$ folgt offenbar $y - \sqrt{1+y^2} < 0$, da der Wurzelterm größer als $|y|$ ist. Das hier gesuchte u ist aber positiv, so dass sich die Schlussfolgerung

$$u = y + \sqrt{1+y^2},$$

ergibt. Via $u = \exp x$ ergibt sich hieraus

$$\exp x = y + \sqrt{1+y^2},$$

so dass

$$x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}),$$

folgt. Definiert man nun

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2}),$$

so deutet die Argumentation darauf hin, dass diese Funktion h die Umkehrfunktion von sinh ist. In der Tat gilt für alle x mit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(\sinh x) &= \ln((\sinh x) + \sqrt{1 + (\sinh x)^2}) = \ln((\sinh x) + \sqrt{1 + \sinh^2 x}) \\ &= \ln((\sinh x) + (\cosh x)) = \ln(\exp x) = x, \end{aligned}$$

und für alle y mit $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sinh(h(y)) &= \frac{(\exp(h(y))) - (\exp(-h(y)))}{2} \\
&= \frac{(\exp(\ln(y+\sqrt{1+y^2}))) - (\exp(-\ln(y+\sqrt{1+y^2})))}{2} \\
&= \frac{(y+\sqrt{1+y^2}) - \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}}{2} = \frac{(y+\sqrt{1+y^2})^2 - 1}{2\cdot(y+\sqrt{1+y^2})} \\
&= \frac{y^2 + 2\cdot y\cdot\sqrt{1+y^2} + 1 + y^2 - 1}{2\cdot(y+\sqrt{1+y^2})} = \frac{2\cdot y^2 + 2\cdot y\cdot\sqrt{1+y^2}}{2\cdot(y+\sqrt{1+y^2})} \\
&= \frac{2\cdot y\cdot(y+\sqrt{1+y^2})}{2\cdot(y+\sqrt{1+y^2})} = y.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von **UKS - E** folgt nun

$$h = \sinh^{-1} = \mathrm{Arsinh},$$

so dass

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Arsinh}\, x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

dom ran

dom Arsinh $= \mathbb{R}$.
ran Arsinh $= \mathbb{R}$.

(un-)gerade

Arsinh ungerade.

Periodizität

$\neg$(Arsinh ist T-periodisch).

Monotonie

Arsinh streng wachsend.

In der Tat gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arsinh}'x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

konvex/konkav

$\neg$(Arsinh konvex).
Arsinh konvex auf $]-\infty|0[$.

$\neg$(Arsinh konkav).
Arsinh konkav auf $]0|+\infty[$.

Da für alle y mit $y \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\mathrm{Arsinh}''y = -\frac{y}{(1+y^2)\cdot\sqrt{1+y^2}}$ gilt, ist Arsinh auf jedem echten reellen Intervall konvex/konkav,
das Teilmenge von $]-\infty|0[/]0|+\infty[$ ist.

Extrema
$\neg$(Arsinh hat in x globales Meximum).
$\neg$(Arsinh hat in x globales Minimum).

Stetigkeit
Arsinh stetig.

Differenzierbarkeit
Arsinh beliebig oft differenzierbar.

$$\text{Arsinh}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{Arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\text{Arsinh}'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{Arsinh}'' x = -\frac{x}{(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}}.$$

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \text{Arsinh}\, x = +\infty, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \text{Arsinh}' x = 0, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \text{Arsinh}'' x = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \text{Arsinh}\, x = -\infty, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \text{Arsinh}' x = 0, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \text{Arsinh}'' x = 0.$$

Verhalten am Rand -

Spezielle Stellen

$$\text{Arsinh}\, 0 = 0.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Arsinh}\, x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cosh(\text{Arsinh}\, x) = \sqrt{1+x^2},$$

$$\forall x : x \in \left]-1|1\right[\Rightarrow$$
$$\text{Arsinh}\, x = x + \frac{1}{3}\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{1}\cdot x^3 + \frac{1}{5}\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{2}\cdot x^5 + \frac{1}{7}\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{3}\cdot x^7 + \ldots,$$

$$\forall x : x \in \left]-1|1\right[\Rightarrow$$
$$\text{Arsinh}\, x = x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot x^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot x^5 - \frac{1}{7}\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot x^7 \pm \ldots.$$

6 Arcosh

Arcosh wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = \cosh$ und $I = [0| + \infty[$ und $J = \cosh[I] = [1| + \infty[$ gebildet. cosh ist stetig, cosh ist streng wachsend auf $[0| + \infty[$. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus den Parametern cosh und $[0| + \infty[$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\text{Arcosh},$$

bezeichnet wird. Arcosh ist die (reelle) AreaCosinushyperbolicusfunktion. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\text{Arcosh} = (\cosh \downharpoonleft [0| + \infty[)^{-1}.$$

$$\text{Arcosh reelle Funktion,}$$

$$\text{Arcosh} : [1| + \infty[\to [0| + \infty[\quad \text{bijektiv.}$$

$$\text{Arcosh streng wachsend,}$$

$$\forall x : x \in [0| + \infty] \quad \Rightarrow \quad \text{Arcosh}(\cosh x) = x,$$

$$\forall y : y \in [1| + \infty] \quad \Rightarrow \quad \cosh(\text{Arcosh}\, y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von sinh, aus $\forall x : x \in]0| + \infty[\Rightarrow 0 \neq \sinh x = \cosh' x$ und $\cosh[]0| + \infty[] =]1| + \infty[$ folgt

$$\text{Arcosh differenzierbar auf }]1| + \infty[,$$

$$\forall x : x \in]0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \text{Arcosh}'(\cosh x) \cdot \sinh' x = \text{Arcosh}'(\cosh x) \cdot \cosh x = 1,$$

$$\forall y : y \in]1| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \cosh'(\text{Arcosh}\, y) \cdot \text{Arcosh}' y$$
$$= \sinh(\text{Arcosh}\, y) \cdot \text{Arcosh}' y = 1.$$

In dieser letzten Aussage gilt $\text{Arcosh}\, y \in]0| + \infty[$. Bekannter Maßen gilt

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sinh x = \mathsf{sgn}\,(x) \cdot \sqrt{\cosh^2 x - 1},$$

so dass im Speziellen

$$\forall x : 0 < x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1},$$

und hieraus

$$\sinh(\text{Arcosh}\, y) = \sqrt{\cosh^2(\text{Arcosh}\, y) - 1} = \sqrt{y^2 - 1},$$

folgt, da $y \in \,]1|+\infty[$, also auch $y \in [1|+\infty[$. Hieraus und aus obigem Resultat folgt nun

$$\forall y : y \in \,]1|+\infty[\,\Rightarrow \sinh(\operatorname{Arcosh} y) \cdot \operatorname{Arcosh}' y = \sqrt{y^2-1} \cdot \operatorname{Arcosh}' y = 1,$$

woraus sich wegen $y \in \,]1|+\infty[$, so dass $0 \neq \sqrt{y^2-1}$, die Aussage

$$\forall y : y \in \,]1|+\infty[\quad \Rightarrow \quad \operatorname{Arcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

ergibt.

⋆

Bei der Bestimmung der Umkehrfunktion von $(\cosh \restriction [0|+\infty[)$ geht es darum, bei gegebenem y mit $y \in \cosh[[0|+\infty[] = [1|+\infty[$ jenes x mit $x \in [0|+\infty[$ zu bestimmen, so dass

$$\cosh x = y.$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Definition von cosh auch als

$$\frac{(\exp x) + (\exp(-x))}{2} = y,$$

und somit als

$$(\exp x) - 2 \cdot y + (\exp(-x)) = 0,$$

geschrieben werden. Aus dem angenommenen $x \in [0|+\infty[$ folgt

$$u = \exp x \in [1|+\infty[,$$

und

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\exp x} = \exp(-x),$$

so dass sich

$$u - 2 \cdot y + \frac{1}{u} = 0,$$

ergibt. Hieraus folgt via $1 \leq u$, also $0 \neq u$,

$$u^2 - 2 \cdot y \cdot u + 1 = 0,$$

und dies ist bei gegebenem $y \in [1|+\infty[$ eine quadratische Gleichung in u. Mit Hilfe von Schulmaathematik folgt

$$u = y + \sqrt{y^2-1} \quad \text{oder} \quad u = y - \sqrt{y^2-1},$$

Für $y = 1$ gilt in beiden Fällen $u = 1$, im Fall $1 < y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} y - \sqrt{y^2-1} &= (y-1) + 1 - \sqrt{y^2-1} = 1 + (y-1) - \sqrt{(y-1)\cdot(y+1)} \\ &= 1 + (y-1) - \sqrt{y-1} \cdot \sqrt{y+1} = 1 + \sqrt{y-1} \cdot (\sqrt{y-1} - \sqrt{y+1}) < 1, \end{aligned}$$

da für $1 < y \in \mathbb{R}$ offenbar

$$\sqrt{y-1} - \sqrt{y+1} < 0,$$

gilt. Aus der Forderung $u \in [1| + \infty[$ ergibt sich nun

$$u = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

Via $u = \exp x$ ergibt sich hieraus

$$\exp x = y + \sqrt{y^2 - 1},$$

so dass

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}),$$

folgt. Definiert man nun

$$h : [1| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad h(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}),$$

so deutet die Argumentation darauf hin, dass diese Funktion h die Umkehrfunktion von $(\cosh \downharpoonleft [0| + \infty[)$ ist. In der Tat gilt für alle x mit $x \in [0| + \infty[$ zunächst

$$\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1},$$

und weiter

$$\begin{aligned} h(\cosh x) = \ln((\cosh x) + \sqrt{(\cosh x)^2 - 1}) &= \ln((\cosh x) + \sqrt{\cosh^2 x - 1}) \\ &= \ln((\cosh x) + (\sinh x)) = \ln(\exp x) = x, \end{aligned}$$

und für alle y mit $y \in [1| + \infty[$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh(h(y)) &= \frac{(\exp(h(y))) + (\exp(-h(y)))}{2} \\ &= \frac{(\exp(\ln(y + \sqrt{y^2-1}))) + (\exp(-\ln(y + \sqrt{y^2-1})))}{2} \\ &= \frac{(y + \sqrt{y^2-1}) + \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}}{2} = \frac{(y + \sqrt{y^2-1})^2 + 1}{2 \cdot (y + \sqrt{y^2-1})} \\ &= \frac{y^2 + 2 \cdot y \cdot \sqrt{y^2-1} + y^2 - 1 + 1}{2 \cdot (y + \sqrt{y^2-1})} = \frac{2 \cdot y^2 + 2 \cdot y \cdot \sqrt{y^2-1}}{2 \cdot (y + \sqrt{y^2-1})} \\ &= \frac{2 \cdot y \cdot (y + \sqrt{y^2-1})}{2 \cdot (y + \sqrt{y^2-1})} = y. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von **UKS - E** folgt nun

$$h = (\cosh \downharpoonleft [0| + \infty[)^{-1} = \operatorname{Arcosh},$$

so dass

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

dom ran
$\mathsf{dom}\,\operatorname{Arcosh} = [1| + \infty[$.
$\mathsf{ran}\,\operatorname{Arcosh} = [0| + \infty[$.

(un-)gerade
$\neg$(Arcosh gerade)
$\neg$(Arcosh ungerade).

Periodizität
$\neg$(Arcosh ist T-periodisch).

Monotonie
Arcosh streng wachsend.

In der Tat ist Arcosh stetig und für alle $x \in]1| + \infty[$ gilt $\operatorname{Arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

konvex/konkav
Arcosh konkav.

Da Arcosh stetig ist und für alle y mit $y \in]1| + \infty[$ die Gleichung $\operatorname{Arcosh}'' y = -\frac{y}{(y^2-1)\cdot\sqrt{y^2-1}}$ gilt, ist Arcosh konkav.

Extrema
$\neg$(Arcosh hat in x globales Meximum).

Arcosh hat in 1 striktes globales Minimum $\wedge$ Arcosh $1 = 0$.
Arcosh hat in x globales Minimum $\quad \Rightarrow \quad x = 1 \wedge \operatorname{Arcosh} x = 0$.

Stetigkeit
Arcosh stetig.

Differenzierbarkeit
Arcosh beliebig oft differenzierbar auf $]1| + \infty[$.

$$\operatorname{Arcosh}' :]1| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\operatorname{Arcosh}'' :]1| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arcosh}'' x = -\frac{x}{(x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Arcosh nicht differenzierbar in 1.

Verhalten bei $\pm\infty$

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \operatorname{Arcosh} x = +\infty, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \operatorname{Arcosh}' x = 0, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} \operatorname{Arcosh}'' x = 0.$$

Verhalten am Rand

$$\lim_{x\downarrow 1} \operatorname{Arcosh} x = 0 = \operatorname{Arcosh} 1,$$

$$\lim_{x\downarrow 1} \frac{\operatorname{Arcosh} x - \operatorname{Arcosh} 1}{x-1} = \lim_{x\downarrow 1} \frac{\operatorname{Arcosh} x - 0}{x-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\downarrow 1} \operatorname{Arcosh}' x = +\infty, \quad \lim_{x\downarrow 1} \operatorname{Arcosh}'' x = -\infty.$$

Spezielle Stellen

$$\operatorname{Arcosh} 1 = 0.$$

spezielle Eigenschaften

$$\forall x : x \in [1| + \infty[\;\Rightarrow \operatorname{Arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),$$

$$\forall x : x \in [1| + \infty[\;\Rightarrow \sinh(\operatorname{Arcosh} x) = \sqrt{x^2-1},$$

$$\forall x : x \in]1| + \infty[\;\Rightarrow$$
$$\operatorname{Arcosh} x = \ln x + \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{1}{6} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{3} \cdot \frac{1}{x^6} + \ldots,$$

$$\forall x : x \in]1| + \infty[\;\Rightarrow$$
$$\operatorname{Arcosh} x = \ln 2 + \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdot \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{1}{x^6} - \ldots.$$

7 Artanh

Artanh wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = \tanh$ und $I = \mathbb{R}$ und $J = \tanh[I] =]-1|1[$ gebildet. tanh ist stetig, tanh ist streng wachsend. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn $g = (f \downharpoonright I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht aus dem Parameter tanh ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\text{Artanh},$$

bezeichnet wird. Artanh ist die (reelle) AreaTangenshyperbolicusfunktion. Aus **UKS - S** folgen auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\operatorname{Artanh} = \tanh^{-1}.$$

$$\text{Artanh reelle Funktion},$$

$$\operatorname{Artanh} :]-1|1[\to \mathbb{R} \quad \text{bijektiv}.$$

$$\text{Artanh streng wachsend},$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Artanh}(\tanh x) = x,$$
$$\forall y : y \in \,]\,-1|1\,[\, \quad \Rightarrow \quad \tanh(\operatorname{Artanh} y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von tanh, aus $\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \neq \frac{1}{\cosh^2 x} = \tanh' x$ folgt

$$\text{Artanh differenzierbar},$$

$$\begin{aligned}\forall x : x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad & \operatorname{Artanh}'(\tanh x) \cdot \tanh' x \\ & = \operatorname{Artanh}'(\tanh x) \cdot (1 - \tanh^2 x) = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall y : y \in \,]\,-1|1\,[\, \quad \Rightarrow \quad & \tanh'(\operatorname{Artanh} y) \cdot \operatorname{Artanh}' y \\ & = (1 - \tanh^2(\operatorname{Artanh} y)) \cdot \operatorname{Artanh}' y = (1 - y^2) \cdot \operatorname{Artanh}' y = 1.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\forall y : y \in \,]\,-1|1\,[\, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Artanh}' y = \frac{1}{1 - y^2}.$$

$\star$

Bei der Bestimmung der Umkehrfunktion von tanh geht es darum, bei gegebenem y mit $y \in \mathsf{ran}\ \tanh = \,]\,-1|1\,[\,$ jenes x mit $x \in \mathsf{dom}\ \tanh = \mathbb{R}$ zu bestimmen, so dass

$$\tanh x = y.$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Definition von tanh auch als

$$\frac{\sinh x}{\cosh x} = y,$$

geschrieben werden, woraus

$$\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = y^2,$$

folgt und sich via

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

die Gleichung

$$\frac{\sinh^2 x}{1 + \sinh^2 x} = y^2,$$

ergibt. Durch Umstellen folgt ohne allzu viel Mühe

$$\sinh^2 x = \frac{y^2}{1 - y^2},$$

und hieraus

$$|\sinh x| = \frac{|y|}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Da aus

$$\tanh x = y$$

klarer Weise

$$\mathsf{sgn}\,(\tanh x) = \mathsf{sgn}\,(y),$$

folgt und überdies für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\mathsf{sgn}\,(\sinh x) = \mathsf{sgn}\,(\tanh x),$$

gilt, folgt

$$\mathsf{sgn}\,(\sinh x) = \mathsf{sgn}\,(y),$$

und somit

$$\begin{aligned}\sinh x = \mathsf{sgn}\,(\sinh x) \cdot |\sinh x| = \mathsf{sgn}\,(y) \cdot |\sinh x| &= \mathsf{sgn}\,(y) \cdot \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{\mathsf{sgn}\,(y) \cdot |y|}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Hilfe der bereits zur Verfügung stehenden Funktion Arsinh via $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \in \mathbb{R}$,

$$x = \mathrm{Arsinh}\,\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right),$$

und somit auch

$$\begin{aligned}x = \mathrm{Arsinh}\,\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right) &= \ln\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}\right) = \ln\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{\frac{1-y^2+y^2}{1-y^2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \ln\left(\frac{1+y}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \ln\left(\frac{1+y}{\sqrt{(1+y)\cdot(1-y)}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1-y}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}}\right) = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.\end{aligned}$$

Definiert man nun

$$h : \,]-1|1[\, \to \mathbb{R}, \quad h(y) = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}},$$

so deutet die Argumentation darauf hin, dass diese Funktion h die Umkehrfunktion von tanh ist. In der Tat gilt für alle x mit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h(\tanh x) &= \ln \sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = \ln \sqrt{\frac{1+\frac{\sinh x}{\cosh x}}{1-\frac{\sinh x}{\cosh x}}} = \ln \sqrt{\frac{(\cosh x)+(\sinh x)}{(\cosh x)-(\sinh x)}} \\
&= \ln \sqrt{\frac{\exp x}{\exp(-x)}} = \ln \sqrt{\exp(2\cdot x)} = \ln \sqrt{(e \wedge 2 \cdot x)} = \ln \left((e \wedge 2 \cdot x) \wedge \frac{1}{2} \right) \\
&= \ln \left(e \wedge 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \right) = \ln (e \wedge x) = \ln(\exp x) = x,,
\end{aligned}$$

und für alle y mit $y \in \,]-1|1[$ gilt

$$\begin{aligned}
\tanh(h(y)) &= \frac{\sinh(h(y))}{\cosh(h(y))} = \frac{(\exp(h(y))) - (\exp(-h(y)))}{(\exp(h(y))) + (\exp(-h(y)))} = \frac{\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} - \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}}{\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}} \\
&= \frac{\sqrt{(1+y)^2} - \sqrt{(1-y)^2}}{\sqrt{(1+y)^2} + \sqrt{(1-y)^2}} = \frac{|1+y| - |1-y|}{|1+y| + |1-y|} = \frac{1+y-(1-y)}{1+y+1-y} = \frac{2\cdot y}{2} = y,
\end{aligned}$$

da wegen $y \in \,]-1|1[$ die Abschätzungen

$$0 < 1+y, \quad 0 < 1-y,$$

gelten, woraus

$$|1+y| = 1+y, \quad |1-y| = 1-y,$$

folgt. Mit Hilfe von **UKS - E** folgt nun

$$h = \tanh^{-1} = \operatorname{Artanh},$$

so dass

$$\forall x : x \in \,]-1|1[\quad \Rightarrow \quad \operatorname{Artanh} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

dom ran

dom Artanh $= \,]-1|1[$.

ran Artanh $= \mathbb{R}$.

(un-)gerade

Artanh ungerade.

Periodizität

$\neg$(Artanh ist T-periodisch).

Monotonie

Artanh streng wachsend.

In der Tat gilt füralle $x \in \left]-1|1\right[$, $\operatorname{Artanh}' x = \frac{1}{1-x^2}$.

konvex/konkav

$\neg$(Artanh konvex).
Artanh konvex auf $\left[0|1\right[$.

$\neg$(Artanh konkav).
Artanh konkav auf $\left]-1|0\right]$.

Da für alle y mit $y \in \left]-1|1\right[$ die Gleichung $\operatorname{Artanh}'' y = \frac{2\cdot y}{(1-y^2)^2}$ gilt, ist Artanh auf jedem echten reellen Intervall konvex/konkav, das Teilmenge von $\left[0|1\right[/ \left]-1|0\right]$ ist.

Extrema

$\neg$(Artanh hat in x globales Meximum).
$\neg$(Artanh hat in x globales Minimum).

Stetigkeit

Artanh stetig.

Differenzierbarkeit

Artanh beliebig oft differenzierbar.

$$\operatorname{Artanh}' : \left]-1|1\right[\to \mathbb{R}, \quad \operatorname{Artanh}' x = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\operatorname{Artanh}'' : \left]-1|1\right[\to \mathbb{R}, \quad \operatorname{Artanh}'' x = \frac{2\cdot x}{(1-x^2)^2}.$$

Verhalten bei $\pm\infty$ -

Verhalten am Rand

$$\lim_{x\uparrow 1} \operatorname{Artanh} x = +\infty, \quad \lim_{x\uparrow 1} \operatorname{Artanh}' x = +\infty, \quad \lim_{x\uparrow 1} \operatorname{Artanh}'' x = +\infty,$$

$$\lim_{x\downarrow -1} \operatorname{Artanh} x = -\infty, \quad \lim_{x\downarrow -1} \operatorname{Artanh}' x = +\infty, \quad \lim_{x\downarrow -1} \operatorname{Artanh}'' x = -\infty.$$

Spezielle Stellen

$$\operatorname{Artanh} 0 = 0.$$

spezielle Eigenschaften

$$\begin{aligned} \forall x : x \in \left]-1|1\right[\Rightarrow \operatorname{Artanh} x &= \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\cdot\left((\ln(1+x)) - (\ln(1-x))\right). \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \quad \Rightarrow \quad \ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} = \begin{cases} \operatorname{Artanh} x & , \quad |x| < 1 \\ \operatorname{Arcoth} x & , \quad 1 < |x| \end{cases}$$

8 Arcoth

Arcoth wird mit Hilfe von **UKS - S** mit $f = \coth$ in zwei Schritten mit $I =]-\infty|0[$ und dann mit $I =]0|+\infty[$ und korrespondierenden $J = \coth[I] =]-\infty|1[$ und $J =]1|+\infty[$ gebildet. coth ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, coth ist streng fallend auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Somit treffen die Konklusionen von **UKS - S** zu, wenn jeweils $g = (f \downharpoonleft I)^{-1}$ gesetzt wird. g entsteht in zwei Schritten aus den Parametern coth, sowie $]-\infty|0[$ und $]0|+\infty[$ ohne weitere freie Variablen. Damit ist g ein Parameter, der mit

$$\text{Arcoth},$$

bezeichnet wird. Arcoth ist die (reelle) AreaCotangenshyperbolicusfunktion. Aus **UKS - S** folgen in zwei Schritten auf Grund bisheriger Erkenntnisse die Aussagen

$$\text{Arcoth} = (\coth \downharpoonleft \mathbb{R} \setminus \{0\})^{-1}.$$

$$\text{Arcoth reelle Funktion},$$

$$\text{Arcoth} : \mathbb{R} \setminus [-1|1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{bijektiv}.$$

$$\text{Arcoth streng fallend auf }]-\infty|1[,$$

$$\text{Arcoth streng fallend auf }]1|+\infty[,$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \text{Arcoth}(\coth x) = x,$$

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \setminus [-1|1] \quad \Rightarrow \quad \coth(\text{Arcoth } y) = y.$$

Aus **UKS - D**, der Differenzierbarkeit von coth auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, aus $\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow 0 \neq -\frac{1}{\cosh^2 x} = \coth' x$ folgt

$$\text{Arcoth differenzierbar},$$

$$\begin{aligned}\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad & \text{Arcoth}'(\coth x) \cdot \coth' x \\ & = \text{Arcoth}'(\coth x) \cdot (1 - \coth^2 x) = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall y : y \in \mathbb{R} \setminus [-1|1] \quad \Rightarrow \quad & \coth'(\text{Arcoth } y) \cdot \text{Arcoth}' y \\ & = (1 - \coth^2(\text{Arcoth } y)) \cdot \text{Arcoth}' y = (1 - y^2) \cdot \text{Arcoth}' y = 1.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\forall y : y \in \mathbb{R} \setminus [-1|1] \quad \Rightarrow \quad \text{Arcoth}' y = \frac{1}{1 - y^2} < 0.$$

$\star$

Bei der Bestimmung der Umkehrfunktion von $(\coth \downharpoonright \mathbb{R} \setminus \{0\})$ geht es darum, bei gegebenem y mit $y \in \mathsf{ran}\,(\coth \downharpoonright \mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus [\!-1|1]$ jenes x mit $x \in \mathsf{dom}\,(\coth \downharpoonright \mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu bestimmen, so dass

$$\coth x = y.$$

Da im Speziellen $0 \neq y$ vorausgesetzt ist, folgt $0 \neq x$ und da bekannter Maßen

$$\forall x : 0 \neq x \in \mathbb{R} \Rightarrow \coth x = \frac{1}{\tanh x},$$

gilt, folgt

$$\frac{1}{\tanh x} = y,$$

so dass

$$\tanh x = \frac{1}{y}.$$

Aus $y \in \mathbb{R} \setminus [\!-1|1]$ folgt $\frac{1}{y} \in \,]\!-1|1[$. Somit kann Artanh zum Einsatz kommen. Es folgt

$$x = \operatorname{Artanh}(\tanh x) = \operatorname{Artanh}\left(\frac{1}{y}\right),$$

und hieraus

$$x = \ln\sqrt{\frac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}}} = \ln\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}.$$

An dieser Formel ist bemerkenswert, dass im Bruch

$$\frac{y+1}{y-1},$$

für $1 < y \in \mathbb{R}$ sowohl Zähler als auch Nenner positiv sind, so dass dessen Wert ebenfalls positiv ist, aber für $y < 1$ und $y \in \mathbb{R}$ Zähler und Nenner zwar *negativ* sind, der Wert des Bruchs damit aber ebenfalls positiv ist. Diese Beobachtung führt zu dem Schluss, dass zwar im Einklang mit bereits Bekanntem zwar

$$\forall y : 1 < y \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Arcoth} y = \frac{1}{2} \cdot ((\ln(y+1)) - (\ln(y-1))),$$

gilt, aber

$$\forall y : y < -1 \wedge y \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Arcoth} y \neq \frac{1}{2} \cdot ((\ln(y+1)) - (\ln(y-1))).$$

Definiert man nun

$$h : \mathbb{R} \setminus [\!-1|1] \to \mathbb{R}, \quad h(y) = \ln\sqrt{\frac{y+1}{y-1}},$$

so deutet die Argumentation darauf hin, dass diese Funktion h die Umkehrfunktion von $(\coth \restriction \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist. In der Tat gilt für alle x mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} h(\coth x) &= \ln \sqrt{\frac{\coth x + 1}{\coth x + 1}} = \ln \sqrt{\frac{\frac{\cosh x}{\sinh x} + 1}{\frac{\cosh x}{\sinh x} - 1}} = \ln \sqrt{\frac{(\cosh x) + (\sinh x)}{(\cosh x) - (\sinh x)}} \\ &= \ln \sqrt{\frac{\exp x}{\exp(-x)}} = \ln \sqrt{\exp(2 \cdot x)} = \ln \sqrt{(e \wedge 2 \cdot x)} = \ln \left((e \wedge 2 \cdot x) \wedge \frac{1}{2} \right) \\ &= \ln \left(e \wedge 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \right) = \ln\,(e \wedge x) = \ln(\exp x) = x, , \end{aligned}$$

und für alle y mit $y \in \mathbb{R} \setminus [\,-1|1]$ gilt

$$\begin{aligned} \coth(h(y)) &= \frac{\cosh(h(y))}{\sinh(h(y))} = \frac{(\exp(h(y))) + (\exp(-h(y)))}{(\exp(h(y))) - (\exp(-h(y)))} = \frac{\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} + \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} - \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}} \\ &= \frac{\sqrt{y+1)^2} + \sqrt{(y-1)^2}}{\sqrt{(y+1)^2} - \sqrt{(y-1)^2}} = \frac{|y+1| + |y-1|}{|y+1| - |y-1|} = \ldots, \end{aligned}$$

und hier gilt im Fall $1 < y$,

$$\coth(h(y)) = \frac{|y+1| + |y-1|}{|y+1| - |y-1|} = \frac{y+1+y-1}{y+1-(y-1)} = \frac{2 \cdot y}{2} = y,$$

und im Fall $y < -1$ gilt,

$$\begin{aligned} \coth(h(y)) = \frac{|y+1| + |y-1|}{|y+1| - |y-1|} &= \frac{-(y+1) + (-(y-1))}{-(y+1) - (-(y-1))} \\ &= \frac{-y-1-y+1}{-y-1+y-1} = \frac{-2 \cdot y}{-2} = y, \end{aligned}$$

so dass in beiden Fällen,

$$\coth(h(y)) = y,$$

gilt. Mit Hilfe von **UKS - E** folgt nun

$$h = (\coth \restriction \mathbb{R} \setminus \{0\})^{-1} = \operatorname{Arcoth},$$

so dass

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus [\,-1|1] \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Arcoth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

<u>dom ran</u>
dom $\operatorname{Arcoth} = \mathbb{R} \setminus [\,-1|1]$.
ran $\operatorname{Arcoth} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>(un-)gerade</u>
Arcoth ungerade.

<u>Periodizität</u>
$\neg$(Arcoth ist T-periodisch).

<u>Monotonie</u>
$\neg$(Arcoth wachsend).

$\neg$(Arcoth fallend).
Arcoth streng fallend auf $]-\infty|-1[$.
Arcoth streng fallend auf $]1|+\infty[$.

In der Tat gilt füralle $x \in \mathbb{R} \setminus [-1|1]$, $\mathrm{Arcoth}'x = \frac{1}{1-x^2} < 0$.

<u>konvex/konkav</u>
$\neg$(Arcoth konvex).
Arcoth konvex auf $]1|+\infty[$.

$\neg$(Arcoth konkav).
Arcoth konkav auf $]-\infty|-1[$.

Da für alle y mit $y \in \mathbb{R} \setminus [-1|1]$ die Gleichung $\mathrm{Arcoth}''y = \frac{2 \cdot y}{(1-y^2)^2}$ gilt, ist Arcoth auf jedem echten reellen Intervall konvex/konkav, das Teilmenge von $]1|+\infty[/]-\infty|-1[$ ist.

<u>Extrema</u>
$\neg$(Arcoth hat in x globales Meximum).
$\neg$(Arcoth hat in x globales Minimum).

<u>Stetigkeit</u>
Arcoth stetig.

<u>Differenzierbarkeit</u>
Arcoth beliebig oft differenzierbar.

$$\mathrm{Arcoth}' : \mathbb{R} \setminus [-1|1] \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arcoth}'x = \frac{1}{1-x^2},$$

$$\mathrm{Arcoth}'' : \mathbb{R} \setminus [-1|1] \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Arcoth}''x = \frac{2 \cdot x}{(1-x^2)^2}.$$

<u>Verhalten bei $\pm\infty$</u>

$$\lim_{x\uparrow+\infty} \mathrm{Arcoth}\, x = 0, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \mathrm{Arcoth}'x = 0, \quad \lim_{x\uparrow+\infty} \mathrm{Arcoth}''x = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \mathrm{Arcoth}\, x = 0, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \mathrm{Arcoth}'x = 0, \quad \lim_{x\downarrow-\infty} \mathrm{Arcoth}''x = 0,$$

<u>Verhalten am Rand</u>

$$\lim_{x\downarrow 1} \mathrm{Arcoth}\, x = +\infty, \quad \lim_{x\downarrow 1} \mathrm{Arcoth}'x = -\infty, \quad \lim_{x\downarrow 1} \mathrm{Arcoth}''x = +\infty,$$

$$\lim_{x\uparrow -1} \operatorname{Arcoth} x = -\infty, \quad \lim_{x\uparrow -1} \operatorname{Arcoth}' x = -\infty, \quad \lim_{x\uparrow -1} \operatorname{Arcoth}'' x = .\infty,$$

Spezielle Stellen -

spezielle Eigenschaften

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus [\,-1|1] \Rightarrow \operatorname{Arcoth} x = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad \Rightarrow \quad \ln \sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} = \begin{cases} \operatorname{Artanh} x & , \quad |x| < 1 \\ \operatorname{Arcoth} x & , \quad 1 < |x| \end{cases}$$