Vorkurs Mathematik
Fakultät

Andreas Unterreiter

20. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1 $n!$

Neuer Term. Ist n eine natürliche Zahl, so ist $n!$ das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n. Die rekursiven Vorschriften zur Festlegung dieser Multiplikation sind

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 0 = 1, \tag{1}$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+n) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) \cdot (1+n). \tag{2}$$

Anders als bei der Addition der natürlicher Zahlen von 0 bis n tritt beim ersten Term in (1) das Produkt *gar keiner* natürlichen Zahlen auf. Dies ist intuitiv schwer zu fassen. Mathematisch ist es dennoch sinnvoll, konventioneller Weise dem Produkt gar keiner Zahlen den Wert "1" zuzuordnen. Insofern ist (1) die Konsequenz einer Konvention.

Einer ähnlichen Konvention folgend ist die Summe *gar keiner* Zahlen stets 0.

Das Produkt einer einzigen Zahl ist konventioneller Weise gleich dieser Zahl.

Die Umsetzung von (1), (2) bereitet für die ersten natürlichen Zahlen keine Schwierigkeiten:

$$\begin{gathered}
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 0 = 1, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+0) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 0) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+1) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1) \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+2) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+3) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+4) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 4) \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+5) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 5) \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720,
\end{gathered}$$

oder vielleicht suggestiver,

$$\begin{gathered}
\texttt{void} \cdot \texttt{void} = 1, \\
1 = 1, \\
1 \cdot 2 = 2, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 = (1 \cdot 2) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120, \\
1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720.
\end{gathered}$$

Man erkennt, dass die Schreibweise mit Punkten "…" für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ zwar sperrig ist, aber für grösser werdende natürliche Zahlen deutlich platzsparender als die "suggestive" Schreibweise ist.

Wie bereits erwähnt nennt man für jede natürliche Zahl n das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n,

$$\boxed{n \text{ Fakultät}},$$

und legt die Notation

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \tag{3}$$

unter Einführung des neuen Terms “$n!$” fest.

Auf Grund bisheriger Rechnungen gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0! &= 1, \\ 1! &= 1, \\ 2! &= 2, \\ 3! &= 6, \\ 4! &= 24, \\ 5! &= 120, \\ 6! &= 720. \end{aligned}$$

Es gilt die notationelle Konvention, dass das Ausrufungszeichen “!” der Fakultät vor der Punktrechnung kommt. Also ist $x \cdot n! = x \cdot (n!)$ und nicht etwa gleich “$(x \cdot n)!$” .

Satz - FakRek

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad (1+n)! = (1+n) \cdot n!.$$

Beweis

`Thema1` $\qquad n \in \mathbb{N}.$

`2.1:` Aus `Thema1` folgt via (3): $\qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$

`2.2:` Aus `Thema1` folgt: $\qquad 1 + n \in \mathbb{N}.$

`3.1:` Aus `2.2` folgt via (3): $\qquad (1+n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+n).$

`3.2:` Aus `Thema1` folgt via (2):

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+n) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) \cdot (1+n).$$

`4:` $(1+n)! \stackrel{3.1}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (1+n) \stackrel{3.2}{=} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) \cdot (1+n)$

$$\stackrel{2.1}{=} (n!) \cdot (1+n) = (1+n) \cdot n!.$$

Ergo `Thema1`: $\qquad \forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow (1+n)! = (1+n) \cdot n!.$

□

Weitere Eigenschaften der Fakultät sind im folgenden Satz zu finden.

Satz - Fak - 1

a) $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad 1 \leq n! \in \mathbb{N}$.

b) $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n! \leq (1+n)!$.

c) $1 \leq n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n! < (1+n)!$.

Beweis als UE.

2 $(2 \cdot n)\,!\,!$

Neuer Term. Für natürliche Zahlen n ist der neue Term "$(2 \cdot n)\,!\,!$" das Produkt aller *geraden* natürlichen Zahlen von 2 bis $2 \cdot n$. Der neue Term "$(2 \cdot n)\,!\,!$ ist strikt vom bereits bekannten Term "$((2 \cdot n)!)!$" zu unterscheiden. $(2 \cdot n)\,!\,!$ ist rekursiv festgelegt.

$$0\,!\,! = 1, \tag{4}$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad (2 \cdot (1+n))\,!\,! = 2 \cdot (1+n) \cdot (2 \cdot n)\,!\,!. \tag{5}$$

Somit gilt unter Verwendung der notationellen Konvention, wonach das doppelte Ausrufungszeichen "$!\,!$" vor der Punktrechnung kommt,

$$0\,!\,! = 1,$$

$$\begin{aligned} 2\,!\,! = (2 \cdot 1)\,!\,! = (2 \cdot (1+0))\,!\,! \\ = 2 \cdot (1+0) \cdot (2 \cdot 0)\,!\,! = 2 \cdot 0\,!\,! = 2 \cdot 1 = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\,!\,! = (2 \cdot 2)\,!\,! = (2 \cdot (1+1))\,!\,! \\ = 2 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1)\,!\,! = 4 \cdot 2\,!\,! = 4 \cdot 2 = 8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6\,!\,! = (2 \cdot 3)\,!\,! = (2 \cdot (1+2))\,!\,! \\ = 2 \cdot (1+2) \cdot (2 \cdot 2)\,!\,! = 6 \cdot 4\,!\,! = 6 \cdot 8 = 48, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8\,!\,! = (2 \cdot 4)\,!\,! = (2 \cdot (1+3))\,!\,! \\ = 2 \cdot (1+3) \cdot (2 \cdot 3)\,!\,! = 8 \cdot 6\,!\,! = 8 \cdot 48 = 384, \end{aligned}$$

und man erkennt hieraus wie eingangs erwähnt,

$$\texttt{void} \cdot \texttt{void} = 1,$$

$$2\,!\,! = 2,$$

$$4\,!\,! = 4 \cdot 2\,!\,! = 4 \cdot 2,$$

$$6\,!\,! = 6 \cdot 4\,!\,! = 6 \cdot (4 \cdot 2) = 6 \cdot 8 = 48,$$

$$8\,!\,! = 8 \cdot 6\,!\,! = 8 \cdot (6 \cdot 4 \cdot 2) = 8 \cdot 48 = 384,$$

so dass man mit Hilfe eines neuen, suggestiven Terms

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad (2 \cdot n)\,!\,! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n),$$

schreiben kann. Auch hier ist deutlich der Unterschied zwischen "$(2 \cdot n)\,!\,!$ und "$((2 \cdot n)!)!$" zu erkennen: $(2 \cdot n)\,!\,!$ hat die n Faktoren $2, 4, 6, \ldots, 2 \cdot n$, hingegen hat $((2 \cdot n)!)!$ die $(2 \cdot n)!$ Faktoren $1, 2, 3, \ldots, (2 \cdot n)!$.

Bei näherer Betrachtung von $2\,!\,!, 4\,!\,!, 6\,!\,!, 8\,!\,!$ fällt ein möglicher Zusammenhang zwischen $(2 \cdot n)\,!\,!$ und $n!$ auf:

$$2\,!\,! = 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1!,$$

$$4\,!\,! = 4 \cdot 2 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1) = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1) = 2^2 \cdot 2!,$$

$$6\,!\,! = 6 \cdot 4 \cdot 2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 2^3 \cdot 3!,$$

$$8\,!\,! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = (2 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 1) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 2^4 \cdot 4!,$$

so dass die Vermutung

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad (2 \cdot n)\,!\,! = 2^n \cdot n!. \tag{6}$$

naheliegt. Die Vermutung ist richtig. Beweis mit Vollständiger Induktion als UE.

3 $(1+2\cdot n)\,!\,!$

Neuer Term. Für natürliche Zahlen n ist der neue Term "$(1+2\cdot n)\;!\;!$" das Produkt aller *ungeraden* natürlichen Zahlen von 1 bis $1+2\cdot n$. Der neue Term "$(1+2\cdot n)\,!\,!$ ist strikt vom bereits bekannten Term "$((1+2\cdot n)!)!$" zu unterscheiden. $(1+2\cdot n)\,!\,!$ ist rekursiv festgelegt.

$$1\,!\,! = 1, \tag{7}$$

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad (1+2\cdot(1+n))\,!\,! = (1+2\cdot(1+n))\cdot(1+2\cdot n)\,!\,!. \tag{8}$$

Somit gilt unter Verwendung der notationellen Konvention, wonach das doppelte Ausrufungszeichen "$!\,!$" vor der Punktrechnung kommt,

$$1\,!\,! = 1,$$

$$3\,!\,! = (1+2\cdot(1+0))\,!\,! = (1+2\cdot(1+0))\cdot(1+2\cdot 0)\,!\,! = 3\cdot 1\,!\,! = 3\cdot 1 = 3,$$
$$5\,!\,! = (1+2\cdot(1+1))\,!\,! = (1+2\cdot(1+1))\cdot(1+2\cdot 1)\,!\,! = 5\cdot 3\,!\,! = 5\cdot 3 = 15,$$
$$7\,!\,! = (1+2\cdot(1+2))\,!\,! = (1+2\cdot(1+2))\cdot(1+2\cdot 2)\,!\,! = 7\cdot 5\,!\,! = 7\cdot 15 = 105,$$
$$9\,!\,! = (1+2\cdot(1+3))\,!\,! = (1+2\cdot(1+3))\cdot(1+2\cdot 3)\,!\,! = 9\cdot 7\,!\,! = 9\cdot 105 = 945,$$

und man erkennt hieraus wie eingangs erwähnt,

$$1\,!\,! = 1,$$

$$3\,!\,! = 3\cdot 1\,!\,! = 3\cdot 1 = 3,$$
$$5\,!\,! = 5\cdot 3\,!\,! = 5\cdot(3\cdot 1) = 5\cdot 3 = 15,$$
$$7\,!\,! = 7\cdot 5\,!\,! = 7\cdot(5\cdot 3\cdot 1) = 7\cdot 15 = 105,$$
$$9\,!\,! = 9\cdot 7\,!\,! = 9\cdot(7\cdot 5\cdot 3\cdot 1) = 9\cdot 105 = 945,$$

so dass man mit Hilfe eines neuen, suggestiven Terms

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad (1+2\cdot n)\,!\,! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(1+2\cdot n),$$

schreiben kann. Auch hier ist deutlich der Unterschied zwischen "$(1+2\cdot n)\,!\,!$ und "$((1+2\cdot n)!)!$" zu erkennen: $(1+2\cdot n)\,!\,!$ hat die $1+n$ Faktoren $1, 3, 5, \ldots, 1+2\cdot n$, hingegen hat $((1+2\cdot n)!)!$ die $(1+2\cdot n)!$ Faktoren $1, 2, 3, \ldots, (1+2\cdot n)!$.

Da für jedes natürliche n die Zahl $(1+2\cdot n)\;!\;!$ das Produkt der *ungeraden* natürlichen Zahlen $1, 3, 5, \ldots, 1+2\cdot n$ ist und da $(2\cdot n)\;!\;!$ das Produkt der *geraden* natürlichen Zahlen $2, 4, 6, \ldots, 2\cdot n$ ist, liegt es nahe,

$$\begin{aligned}&(1+2\cdot n)\,!\,!\cdot(2\cdot n)\,!\,!\\ &\qquad = (1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(1+2\cdot n))\cdot(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2\cdot n))\\ &\qquad\qquad = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(1+2\cdot n) = (1+2\cdot n)!,\end{aligned}$$

für richtig zu erachten, woraus via (6)

$$(1+2\cdot n)\,!\,!\cdot 2^n\cdot n! = (1+2\cdot n)!,$$

folgt und sich hieraus die Vermutung

$$n\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad (1+2\cdot n)\,!\,! = \frac{(1+2\cdot n)!}{2^n\cdot n!},$$

ergibt. Von der Richtigkeit dieser Vermutung kann man sich mit Vollständiger Induktion als UE überzeugen.

4 UE - Fakultät

4.1 $1 \leq n! \in \mathbb{N}$

Satz - Fak - 1 a)

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad 1 \leq n! \in \mathbb{N}.$$

Beweis

1: $\exists E : E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \omega! \in \mathbb{N}\}$.

Thema2 $p \in E$.

3: Aus Thema2 und aus 1 "$E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \omega! \in \mathbb{N}\}$" folgt: $p \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq p! \in \mathbb{N}$.

4: Aus 3 folgt: $p \in \mathbb{N}$.

Ergo Thema2: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$" : A1 "$E \subseteq \mathbb{N}$"

3: Aus "$1 \leq 1$" und aus "$0! = 1$" folgt: $1 \leq 0!$.

4: Aus "0 Menge", aus "$0 \in \mathbb{N}$", aus 3 und aus 1 "$E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \omega! \in \mathbb{N}\}$" folgt: $0 \in E$.

...

`Thema5` $\lambda \in E.$

`6:` Aus `Thema5` und aus `1`"$E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \omega! \in \mathbb{N}\}$" folgt: $\lambda \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \lambda! \in \mathbb{N}.$

`7.1:` Aus `6`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}.$

`7.2:` Aus `6`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $1 \leq 1 + \lambda.$

`7.3:` Aus `6`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt via **Satz - FakRek**: $(1 + \lambda)! = (1 + \lambda) \cdot \lambda!.$

`8.1:` Aus `7.1` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

`8.2:` Aus `7.1` und aus `6`"$\lambda! \in \mathbb{N}$" folgt: $(1 + \lambda) \cdot \lambda! \in \mathbb{N}.$

`8.3:` Aus `6`"$1 \leq \lambda!$" und aus `7.2` folgt: $1 \cdot 1 \leq \lambda! \cdot (1 + \lambda).$

`9.1:` Aus `7.3` und aus `8.2` folgt: $(1 + \lambda)! \in \mathbb{N}.$

`9.2:` Asu `8.3` folgt: $1 \leq (1 + \lambda) \cdot \lambda!.$

`10:` Aus `9.2` und aus `7.3` folgt: $1 \leq (1 + \lambda)!.$

`11:` Aus `8.1`, aus `7.1`, aus `10` und aus `9.1` folgt per definitionem "E": $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema5`: `A2` "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$"

`6:` Aus `A1`, aus `4` und aus `A2` folgt via **Satz - Vollständige Induktion**: $E = \mathbb{N}.$

`Thema7` $n \in \mathbb{N}.$

`8:` Aus `Thema7` und aus `6` folgt: $n \in E.$

`9:` Aus `8` und aus `1`"$E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \omega! \in \mathbb{N}\}$" folgt: $1 \leq n! \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema7`: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \leq n! \in \mathbb{N}.$

$\square$

4.2 $n! \leq (1+n)!$

<u>Satz - Fak - 1</u> `b)`

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad n! \leq (1+n)!.$$

<u>Beweis</u> VS $n \in \mathbb{N}$

`1.1:` Aus VS folgt: $1 \leq 1+n$.

`1.2:` Aus VS folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 \leq n! \in \mathbb{N}$

`2:` Via "$0 \leq 1$" und aus `1.2`"$1 \leq n!$": $0 \leq n!$.

`3.1:` Aus `1.1` und aus `2` folgt: $1 \cdot n! \leq (1+n) \cdot n!$.

`3.2:` Aus `1.2`"$n! \in \mathbb{N}$" folgt: $1 \cdot n! = n!$.

`3.3:` Aus VS folgt via **Satz - FakRek**: $(1+n)! = (1+n) \cdot n!$.

`4:` Aus `3.1`, aus `3.2` und aus `3.3` folgt: $n! \leq (1+n)!$.

$\square$

4.3 $n! < (1+n)!$

Satz - Fak - 1 c)

$$1 \le n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad n! < (1+n)!.$$

Beweis VS $1 \le n \in \mathbb{N}$

1.1: Aus VS"$1 \le n$" folgt: $2 \le 1+n$.

1.2: Aus VS"$n \in \mathbb{N}$" folgt via des bereits bewiesenen a): $1 \le n! \in \mathbb{N}$

2: Via "$0 < 1$" und aus 1.2"$1 \le n!$" folgt: $0 < n!$.

3.1: Aus 1.1 und aus 2 folgt: $2 \cdot n! \le (1+n) \cdot n!$.

3.2: Aus 1.2 folgt: $n! < 2 \cdot n!$.

3.3: Aus VS"$n \in \mathbb{N}$" folgt via **Satz - FakRek**: $(1+n)! = (1+n) \cdot n!$.

4: Aus 3.2 und aus 3.1 folgt: $n! < (1+n) \cdot n!$.

5: Aus 4 und aus 3.3 folgt: $n! < (1+n)!$.

□

4.4 $(2 \cdot n)\,!\,! = 2^n \cdot n!$

Satz - $(2 \cdot n)\,!\,!$

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad (2 \cdot n)\,!\,! = 2^n \cdot n!.$$

Beweis

`1:` $\exists E : E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge (2 \cdot \omega)\,!\,! = 2^\omega \cdot \omega!\}.$

`2:` Via (4) gilt: $0\,!\,! = 1.$

`3.1:` $(2 \cdot 0)\,!\,! = 0\,!\,! \stackrel{2}{=} 1.$

`3.2:` $2^0 \cdot 0! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1.$

`4:` Aus `3.1` und aus `3.2` folgt: $(2 \cdot 0)\,!\,! = 2^0 \cdot 0!.$

`5:` Aus "0 Menge", aus "$0 \in \mathbb{N}$", aus `4` und aus `1` "$E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge (2 \cdot \omega)\,!\,! = 2^\omega \cdot \omega!\}$" folgt: $0 \in E.$

> `Thema6` $p \in E.$
>
> `7:` Aus `Thema6` und aus `1` "$E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge (2 \cdot \omega)\,!\,! = 2^\omega \cdot \omega!\}$" folgt: $p \in \mathbb{N} \wedge (2 \cdot p)\,!\,! = 2^p \cdot p!.$
>
> `8:` Aus `7` folgt: $p \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema6`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}.$

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": `A1` | "$E \subseteq \mathbb{N}$"

...

`Thema7` $\lambda \in E.$

`8:` Aus `Thema7` und aus
`1`"$E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge (2 \cdot \omega)\,!\,! = 2^\omega \cdot \omega!\}$" folgt:
$\lambda \in \mathbb{N} \wedge (2 \cdot \lambda)\,!\,! = 2^\lambda \cdot \lambda!.$

`9.1:` Aus `8`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}.$

`9.2:` Aus `8` folgt: $\lambda \in \mathbb{N}.$

`9.3:` Aus `8` folgt: $(2 \cdot \lambda)\,!\,! = 2^\lambda \cdot \lambda!.$

`10.1:` Aus `9.1` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

`10.2:` $(2 \cdot (1 + \lambda))\,!\,! \stackrel{9.2,(5)}{=} 2 \cdot (1 + \lambda) \cdot (2 \cdot \lambda)\,!\,!$
$\stackrel{9.3}{=} 2 \cdot (1 + \lambda) \cdot 2^\lambda \cdot \lambda! = (2 \cdot 2^\lambda) \cdot ((1 + \lambda) \cdot \lambda!)$
$= 2^{1+\lambda} \cdot ((1 + \lambda) \cdot \lambda!) \stackrel{9.2,\mathbf{Satz-FakRek}}{=} 2^{1+\lambda} \cdot (1 + \lambda)!.$

`11:` Aus `10.1`, aus `9.1`, aus `10.2`
folgt per definitionem E: $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema7`: `A2` "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$"

`8:` Aus `A1`, aus `5` und aus `A2`
folgt via **Satz - Vollständige Induktion**: $E = \mathbb{N}.$

`Thema9` $n \in \mathbb{N}.$

`10:` Aus `Thema9` und aus `8` folgt: $n \in E.$

`11:` Aus `10` und aus
`1`"$E = \{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge (2 \cdot \omega)\,!\,! = 2^\omega \cdot \omega!\}$" folgt:
$(2 \cdot n)\,!\,! = 2^n \cdot n!.$

Ergo `Thema9`: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (2 \cdot n)\,!\,! = 2^n \cdot n!.$

$\square$

4.5 $(1+2\cdot n)\,!\,! = \frac{(1+2\cdot n)!}{2^n\cdot n!}$

Satz - $(1+2\cdot n)\,!\,!$

$$n\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad (1+2\cdot n)\,!\,! = \frac{(1+2\cdot n)!}{2^n\cdot n!}.$$

Beweis

1: $\exists E : E = \left\{\omega : \omega\in\mathbb{N}\wedge(1+2\cdot\omega)\,!\,! = \frac{(1+2\cdot\omega)!}{2^\omega\cdot\omega!}\right\}.$

2: Via (7) gilt: $1\,!\,! = 1.$

3.1: $(1+2\cdot 0)\,!\,! = 1\,!\,! \stackrel{2}{=} 1.$

3.2: $\frac{(1+2\cdot 0)!}{2^0\cdot 0!} = \frac{1!}{1\cdot 1} = 1.$

4: Aus 3.1 und aus 3.2 folgt: $(1+2\cdot 0)\,!\,! = \frac{(1+2\cdot 0)!}{2^0\cdot 0!}.$

5: Aus "0 Menge", aus "$0\in\mathbb{N}$", aus 4 und aus 1 "$E = \left\{\omega : \omega\in\mathbb{N}\wedge(1+2\cdot\omega)\,!\,! = \frac{(1+2\cdot\omega)!}{2^\omega\cdot\omega!}\right\}$" folgt: $0\in E.$

$\boxed{\texttt{Thema6}}$ $p\in E.$

7: Aus Thema6 und aus 1 "$E = \left\{\omega : \omega\in\mathbb{N}\wedge(1+2\cdot\omega)\,!\,! = \frac{(1+2\cdot\omega)!}{2^\omega\cdot\omega!}\right\}$" folgt:

$$p\in\mathbb{N}\wedge(1+2\cdot p)\,!\,! = \frac{(1+2\cdot p)!}{2^p\cdot p!}.$$

8: Aus 7 folgt: $p\in\mathbb{N}.$

Ergo Thema6: $\forall p : p\in E \Rightarrow p\in\mathbb{N}.$

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}E\subseteq\mathbb{N}\text{"}}$

...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$	$\lambda \in E.$
`8:` Aus `Thema7` und aus `1` "$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge (1 + 2 \cdot \omega)\,!\,! = \frac{(1 + 2 \cdot \omega)!}{2^{\omega} \cdot \omega!}\right\}$" folgt:	$\lambda \in \mathbb{N} \wedge (1 + 2 \cdot \lambda)\,!\,! = \frac{(1 + 2 \cdot \lambda)!}{2^{\lambda} \cdot \lambda!}.$
`9.1:` Aus `8` "$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt:	$1 + \lambda \in \mathbb{N}.$
`9.2:` Aus `8` folgt:	$\lambda \in \mathbb{N}.$
`9.3:` Aus `8` folgt:	$(1 + 2 \cdot \lambda)\,!\,! = \frac{(1 + 2 \cdot \lambda)!}{2^{\lambda} \cdot \lambda!}.$
`10.1:` Aus `9.1` folgt:	$1 + \lambda$ Menge.

`10.2:` $(1 + 2 \cdot (1 + \lambda))\,!\,! \stackrel{\texttt{9.2,(8)}}{=} (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)) \cdot (1 + 2 \cdot \lambda)\,!\,!$

$\stackrel{\texttt{9.3}}{=} (1 + 2 \cdot (1 + \lambda)) \cdot \frac{(1 + 2 \cdot \lambda)!}{2^{\lambda} \cdot \lambda!} = \ldots ?$

... und hier sollte eigentlich

$$\frac{(1 + 2 \cdot (1 + \lambda))!}{2^{1+\lambda} \cdot (1 + \lambda)!},$$

stehen. Unter Heranziehung bekannter Rechenregeln für die Fakultät und unter Verwendung von $\lambda \in \mathbb{N}, 2 \cdot (1 + \lambda) \in \mathbb{N}, 1 + 2 \cdot \lambda \in \mathbb{N}$, folgt, neuerlich vom Erstrebten ausgehend,

$$\frac{(1 + 2 \cdot (1 + \lambda))!}{2^{1+\lambda} \cdot (1 + \lambda)!}$$

$$= \frac{(1 + 2 \cdot (1 + \lambda)) \cdot (2 \cdot (1 + \lambda))!}{2^{1+\lambda} \cdot (1 + \lambda)!}$$

$$= \frac{(1 + 2 \cdot (1 + \lambda)) \cdot (2 \cdot (1 + \lambda))!}{2^{1+\lambda} \cdot (1 + \lambda) \cdot \lambda!}$$

$$= \frac{(1 + 2 \cdot (1 + \lambda)) \cdot (2 \cdot (1 + \lambda))!}{2 \cdot 2^{\lambda} \cdot (1 + \lambda) \cdot \lambda!} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(2\cdot(1+\lambda))!}{2\cdot 2^{\lambda}\cdot(1+\lambda)\cdot\lambda!}$$

$$= \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+(1+2\cdot\lambda))!}{2\cdot 2^{\lambda}\cdot(1+\lambda)\cdot\lambda!}$$

$$= \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+(1+2\cdot\lambda))\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{2\cdot(1+\lambda)\cdot 2^{\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$= \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(2+2\cdot\lambda)\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{(2+2\cdot\lambda)\cdot 2^{\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$= \frac{2+2\cdot\lambda}{2+2\cdot\lambda}\cdot\frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{2^{\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$= 1\cdot\frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{2^{\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$= \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{2^{\lambda}\cdot\lambda!},$$

wobei hier die bemerkenswerte, für natürliche λ stets richtige Gleichung,

$$\frac{2+2\cdot\lambda}{2+2\cdot\lambda} = 1,$$

eingesetzt wird. Für die Bearbeitung von `Thema7` wird die soeben erstellte Gleichungsliste in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen. Die Multiplikation mit der 1 und die anschließende Ersetzung der 1 durch

$$\frac{2+2\cdot\lambda}{2+2\cdot\lambda},$$

kann als "Multiplikation mit einer ergiebigen 1" bezeichnet werden. Sie ist das Pendant zur "Addition einer ergiebigen 0" . . . .

`Thema7` $\lambda \in E.$

...

`10.2:` $(1+2\cdot(1+\lambda))\,!\,! = \ldots = (1+2\cdot(1+\lambda))\cdot\dfrac{(1+2\cdot\lambda)!}{2^{\lambda}\cdot\lambda!}.$

`10.3:` Aus `9.2` folgt: $\dfrac{2+2\cdot\lambda}{2+2\cdot\lambda} = 1.$

`10.4:` Aus `9.2` folgt: $1+2\cdot\lambda \in \mathbb{N}.$

`10.5:` Aus `9.2` folgt: $2\cdot(1+\lambda) \in \mathbb{N}.$

`11:` $(1+2\cdot(1+\lambda))\,!\,! \overset{\text{10.2}}{=} (1+2\cdot(1+\lambda))\cdot\dfrac{(1+2\cdot\lambda)!}{2^{\lambda}\cdot\lambda!}$

$$= \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{2^{\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$= 1\cdot\frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{2^{\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$\overset{\text{10.3}}{=} \frac{2+2\cdot\lambda}{2+2\cdot\lambda}\cdot\frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{2^{\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$= \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(2+2\cdot\lambda)\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{(2+2\cdot\lambda)\cdot 2^{\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$= \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+(1+2\cdot\lambda))\cdot(1+2\cdot\lambda)!}{2\cdot(1+\lambda)\cdot 2^{\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$\overset{\text{10.4,}\mathbf{Satz-FakRek}}{=} \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(1+(1+2\cdot\lambda))!}{2\cdot 2^{\lambda}\cdot(1+\lambda)\cdot\lambda!}$$

$$= \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(2+2\cdot\lambda)!}{2\cdot 2^{\lambda}\cdot(1+\lambda)\cdot\lambda!}$$

$$= \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(2\cdot(1+\lambda))!}{2^{1+\lambda}\cdot(1+\lambda)\cdot\lambda!}$$

$$\overset{\text{9.2.}\mathbf{Satz-FakRek}}{=} \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))\cdot(2\cdot(1+\lambda))!}{2^{1+\lambda}\cdot(1+\lambda)!}$$

$$\overset{\text{10.5,}\mathbf{Satz-FakRek}}{=} \frac{(1+2\cdot(1+\lambda))!}{2^{1+\lambda}\cdot(1+\lambda)!}$$

...

`Thema7` $\lambda \in E.$

...

`12:` Aus `10.1`, aus `9.2`
und aus `11`“$(1 + 2 \cdot (1 + \lambda))\,! \;= \ldots = \dfrac{(1 + 2 \cdot (1 + \lambda))!}{2^{1+\lambda} \cdot (1 + \lambda)!}$”
folgt per definitionem E: $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema7`: `A2` “$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$”

`8:` Aus `A1`, aus `5` und aus `A2`
folgt via **Satz - Vollständige Induktion**: $E = \mathbb{N}.$

`Thema9` $n \in \mathbb{N}.$

`10:` Aus `Thema9` und aus `8` folgt: $n \in E.$

`11:` Aus `10` und aus
`1`“$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge (1 + 2 \cdot \omega)\,!\,! = \dfrac{(1 + 2 \cdot \omega)!}{2^{\omega} \cdot \omega!}\right\}$”
folgt: $(1 + 2 \cdot n)\,!\,! = \dfrac{(1 + 2 \cdot n)!}{2^{n} \cdot n!}.$

Ergo `Thema9`: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 + 2 \cdot n)\,!\,! = \dfrac{(1 + 2 \cdot n)!}{2^{n} \cdot n!}.$

$\square$