Differentialrechnung

Andreas Unterreiter

19. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Lokale Extrema

Es gelten in diesem Kapitel die

Voraussetzungen

$f : D \to B$ reelle Funktion.

$\wedge$ I echtes reelles Intervall

$\wedge$ f differenzierbar auf I

$\wedge$ f hat in ξ Maximum auf $I \vee f$ hat in ξ Minimum auf I

1.Fall $I = \rbrack a|b\lbrack$ mit $a < b$,
so dass ($a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$ und $a < b$) oder ($a = -\infty$ und $b \in \mathbb{R}$)
oder ($a \in \mathbb{R}$ und $b = +\infty$) oder ($a = -\infty$ und $b = +\infty$).

Aus den Voraussetzungen folgt

$$f'(\xi) = 0.$$

2.Fall $I = \lbrack a|b\lbrack$ mit $a < b$ und $a \in \mathbb{R}$, so dass ($a < b$ und $b \in \mathbb{R}$) oder $b = +\infty$.

Es gibt drei Möglichkeiten:

a) $\xi = a$ und f hat in a Maximum auf I. Dann gilt $f'(\xi) = f'(a) \leq 0$.

b) $\xi = a$ und f hat in a Minimum auf I. Dann gilt $0 \leq f'(a) = f'(\xi)$.

c) $\xi \neq a$. Dann $\xi \in \rbrack a|b\lbrack$ und $f'(\xi) = 0$.

3.Fall $I = \rbrack a|b\rbrack$ mit $a < b$ und $b \in \mathbb{R}$, so dass ($a < b$ und $a \in \mathbb{R}$) oder $a = -\infty$.

Es gibt drei Möglichkeiten:

a) $\xi \neq b$. Dann $\xi \in \rbrack a|b\lbrack$ und $f'(\xi) = 0$.

b) $\xi = b$ und f hat in b Maximum auf I. Dann gilt $0 \leq f'(b) = f'(\xi)$.

c) $\xi = b$ und f hat in f Minimum auf I. Dann gilt $f'(\xi) = f'(b) \leq 0$.

4.Fall $I = \lbrack a|b\rbrack$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Es gibt fünf Möglichkeiten:

a) $\xi = a$ und f hat in a Maximum auf I. Dann gilt $f'(\xi) = f'(a) \leq 0$.

b) $\xi = a$ und f hat in a Minimum auf I. Dann gilt $0 \le f'(a) = f'(\xi)$.

c) $\xi \ne a$ und $\xi \ne b$. Dann $\xi \in \,]a|b[$ und $f'(\xi) = 0$.

d) $\xi = b$ und f hat in b Maximum auf I. Dann gilt $0 \le f'(b) = f'(\xi)$.

e) $\xi = b$ und f hat in f Minimum auf I. Dann gilt $f'(\xi) = f'(b) \le 0$.

Zusatz: Nach dem Satz vom Maximum/Satz vom Minimum gibt es in diesem **4.Fall** (höchstens zwei) Zahlen $\xi, \eta \in [a|b]$, so dass gilt:

$$f \text{ hat in } \xi \text{ Maximum auf } [a|b] \;/\; f \text{ hat in } \eta \text{ Minimum auf } [a|b].$$

Es gilt somit : $\Big(\xi \in \{a, b\}$ oder $(\xi \in \,]a|b[\,\wedge f'(\xi) = 0)\Big)$ und $\Big(\eta \in \{a, b\}$ oder $f'(\eta) = 0\Big)$. Falls es nur endlich viele z mit $z \in \,]a|b[$ und $f'(z) = 0$ - etwa $z_1, \ldots, z_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, wobei $n = 0$ genau dann, wenn $f'(z) \ne 0$ für alle $z \in \,]a|b[$ - gibt, so können alle Stellen, in denen die Funktion f ihr Maximum oder Minimum hat, durch $2 + n$ Funkntionsauswertungen ermittelt werden. In dieser Tabelle ...

x	$f(x)$
a	$f(a)$
z_1	$f(z_1)$
$\vdots$	$\vdots$
z_n	$f(z_n)$
b	$f(b)$

... gibt es in der rechten Spalte einen größten und einen kleinsten Wert. In jenen Stellen, an denen der größte Wert angenommen wird, hat f Maximum auf $[a|b]$ und in jenen Stellen, an denen der kleinste Wert angenommen wird, hat f Minimum auf $[a|b]$. Weitere derartige Stellen kann es unter den hier gültigen Voraussetzungen nicht geben.

Beispiel (ohne Beweis) Sei $f = (.\uparrow 2)$ und seien $a = -1$ und $b = 2$ und $I = [a|b] = [-1|2]$. Dann ist f auf I differenzierbar mit

$$\forall x : x \in I \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x.$$

Die einzige Nullstelle von f' ist 0 und diese ist in I. Somit nimmt obige Tabelle folgende Form an:

x	x^2
-1	1
0	0
2	4

Der größte Wert in der rechten Spalte ist 4. Er tritt genau an einer Stelle auf, der zugeordnete x-Wert ist 2. Also gilt: f hat in 2 Maximum auf $I \wedge f(2) = 4$. Entsprechend obiger Aussagen folgt, da $2 = b$ gilt, $0 \leq f'(2)$. In der Tat gilt $0 < 4 = 2 \cdot 2 = f'(2)$.

Der kleinste Wert in der rechten Spalte ist 0. Er tritt genau an einer Stelle auf, der zugeordnete x-Wert ist 0. Also gilt: f hat in 0 Minimum auf $I \wedge f(0) = 0$. Entsprechend obiger Aussagen folgt, da $0 \in \,]a|b[\,$ gilt, $f'(0) = 0$. In der Tat gilt $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$.

2 Monotonie

2.1 f differenzierbar auf I

Es gelten in diesem Unterkapitel die

Voraussetzungen

$\quad f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ differenzierbar auf I

Dann gelten folgende Aussagen:

a1) f wachsend auf $I \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in I \Rightarrow 0 \leq f'(x)$.

a2) f streng wachsend auf $I \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in I \Rightarrow 0 \leq f'(x)$.

b1) $\forall x : x \in I \Rightarrow 0 \leq f'(x) \quad \Rightarrow \quad f$ wachsend auf I.

b2) $\forall x : x \in I \Rightarrow 0 < f'(x) \quad \Rightarrow \quad f$ streng wachsend auf I.

b3) $(\forall x : x \in I \Rightarrow 0 \leq f'(x)) \wedge (\{x : x \in I \wedge 0 = f'(x)\}$ endlich)
$\Rightarrow \quad f$ streng wachsend auf I.

c1) f fallend auf $I \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in I \Rightarrow f'(x) \leq 0$.

c2) f streng wachsend auf $I \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in I \Rightarrow f'(x) \leq 0$.

d1) $\forall x : x \in I \Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f$ fallend auf I.

d2) $\forall x : x \in I \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ streng fallend auf I.

d3) $(\forall x : x \in I \Rightarrow f'(x) \leq 0) \wedge (\{x : x \in I \wedge 0 = f'(x)\}$ endlich)
$\Rightarrow \quad f$ streng fallend auf I.

Auch gilt:

$$\forall x : x \in I \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists c : c \in \mathbb{R} \wedge \forall x : x \in I \Rightarrow f(x) = c,$$

sowie

$$c \in \mathbb{R} \wedge \forall x : x \in I \Rightarrow f(x) = c \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in I \Rightarrow f'(x) = 0.$$

Beispiel (ohne Beweis) sin differenzierbar auf $[-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}]$ und dort streng wachsend. Somit

$$\forall x : x \in [-\frac{\pi}{2}|\frac{\pi}{2}] \Rightarrow 0 \leq \sin'(x) = \cos x.$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) $(.\uparrow 3)$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \leq 3 \cdot x^2 = (.\uparrow 3)'(x),$$

und

$$\{x : x \in \mathbb{R} \wedge (.\uparrow 3)'(x) = 0\} = \{0\} \quad \text{endlich.}$$

Somit ist $(.\uparrow 3)$ streng wachsend (auf $\mathbb{R}$). □(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) exp differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 < \exp x = \exp' x.$$

Somit ist exp streng wachsend (auf $\mathbb{R}$). □(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) cot differenzierbar auf $]0|\pi[$ und dort streng fallend. Also

$$\forall x : x \in]0|\pi[\Rightarrow \cot'(x) \leq 0.$$

In der Tat gilt sogar

$$\forall x : x \in]0|\pi[\Rightarrow \cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0.$$

□(Beispiel)

2.2 f differenzierbar auf $]a|b[$, f stetig auf $[a|b]$

Gelegentlich liegt von einer Funktion f in einem Intervall $[a|b]$ zwar Stetigkeit vor, doch die Funktion ist nur in $]a|b[$ differenzierbar. In diesen Fällen gelten die Aussagen vorerigen Kapitels mit offensichtlichen Modifikationen.

Es gelten in diesem Unterkapitel die

Voraussetzungen

$$\begin{array}{ll} & f : D \to B \text{ reelle Funktion} \\ \wedge & a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b \\ \wedge & f \text{ stetig auf } [a|b] \\ \wedge & f \text{ differenzierbar auf }]a|b[\end{array}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

`a1)` f wachsend auf $[a|b] \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow 0 \leq f'(x)$.

`a2)` f streng wachsend auf $[a|b] \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow 0 \leq f'(x)$.

`b1)` $\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow 0 \leq f'(x) \quad \Rightarrow \quad f$ wachsend auf $[a|b]$.

`b2)` $\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow 0 < f'(x) \quad \Rightarrow \quad f$ streng wachsend auf $[a|b]$.

`b3)` $(\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow 0 \leq f'(x)) \wedge (\{x : x \in\,]a|b[\, \wedge 0 = f'(x)\}$ endlich)
$\Rightarrow \quad f$ streng wachsend auf $[a|b]$.

`c1)` f fallend auf $[a|b] \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow f'(x) \leq 0$.

`c2)` f streng wachsend auf $[a|b] \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow f'(x) \leq 0$.

`d1)` $\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f$ fallend auf $[a|b]$.

`d2)` $\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ streng fallend auf $[a|b]$.

`d3)` $(\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow f'(x) \leq 0) \wedge (\{x : x \in\,]a|b[\, \wedge 0 = f'(x)\}$ endlich)
$\Rightarrow \quad f$ streng fallend auf $[a|b]$.

Auch gilt:

$$\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists c : c \in \mathbb{R} \wedge \forall x : x \in [a|b] \Rightarrow f(x) = c,$$

sowie

$$c \in \mathbb{R} \wedge \forall x : x \in [a|b] \Rightarrow f(x) = c \quad \Rightarrow \quad \forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow f'(x) = 0.$$

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis) Seien $f = \sqrt{.}$ und $a = 0$ und $b = 1$. Dann ist f stetig auf $[a|b]$ stetig und differenzierbar $]a|b[$. Auch gilt

$$\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow 0 < \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = f'(x).$$

Somit ist f auf $[a|b]$ streng wachsend. Explizit: $\sqrt{.}$ ist auf $[0|1]$ streng wachsend. $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Seien $f = |.|$ und $a = -100$ und $b = 0$. Dann ist f stetig auf $[a|b]$, differenzierbar auf $]a|b[$ und f ist streng fallend auf $[a|b]$. Es folgt

$$\forall x : x \in \,]a|b[\, \Rightarrow f'(x) \leq 0,$$

oder expliziter

$$\forall x : x \in \,]-100|0[\, \Rightarrow |.|'(x) \leq 0.$$

In der Tat gilt sogar

$$\forall x : x \in \,]-100|0[\, \Rightarrow |.|'(x) = -1 < 0.$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Seien $a = -1$ und $b = 1$ und

$$f : [-1|1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = (\arcsin x) + (\arccos x).$$

Sowohl arcsin als auch arccos sind stetig auf $[-1|1]$ und differenzierbar auf $]-1|1[$. Somit ist auch f stetig auf $[-1|1]$ und differenzierbar auf $]-1|1[$. Auch gilt

$$\begin{aligned}\forall x : x \in \,]-1|1[\, \Rightarrow f'(x) &= (\arcsin'(x)) + (\arccos'(x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\exists c : c \in \mathbb{R} \wedge \forall x : x \in [-1|1] \Rightarrow (\arcsin x) + (\arccos x) = c.$$

In der Tat gilt bekannter Maßen

$$\forall x : x \in [-1|1] \Rightarrow (\arcsin x) + (\arccos x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$(Beispiel)

3 Konvexität/Konkavität

3.1 f differenzierbar auf I

Es gelten in diesem Unterkapitel diese

Voraussetzungen

$\quad f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ differenzierbar auf I

Dann folgt:

a) f konvex auf $I \quad \Leftrightarrow \quad f'$ wachsend auf I.

b) f konkav auf $I \quad \Leftrightarrow \quad f'$ fallend auf I.

Beispiel (ohne Beweis) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot [x]^-,$$

ist differenzierbar und die Funktion

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = [x]^-,$$

ist fallend. Also ist f konkav (auf $\mathbb{R}$). $\square$(Beispiel)

3.2 f zweimal differenzierbar auf I

Es gelten in diesem Unterkapitel diese

Voraussetzungen

$\quad f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge \quad I$ echtes reelles Intervall

$\wedge \quad f$ zweimal differenzierbar auf I

Dann folgt:

a) f konvex auf $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : x \in I \Rightarrow 0 \leq f''(x)$.

b) f konkav auf $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : x \in I \Rightarrow f''(x) \leq 0$.

Beispiel (ohne Beweis) Die Funktion $f = (. \uparrow 4)$ ist zweimal differenzierbar und es gilt

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \leq 12 \cdot x^2 = f''(x).$$

Somit ist $f = (. \uparrow 4)$ konvex (auf $\mathbb{R}$). $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Die Funkton $f = \arctan$ ist zweimal differenzierbar und f ist konkav auf $[0| + \infty[$. Es folgt

$$\forall x : x \in [0| + \infty[\Rightarrow \arctan'' x \leq 0.$$

In der Tat gilt

$$\forall x :\in [0| + \infty[\Rightarrow \arctan'' x = -\frac{2 \cdot x}{(1 + x^2)^2} \leq 0.$$

$\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Die Funktion $f = \ln$ ist zweimal differenzierbar und es gilt

$$\forall x : x \in]0| + \infty[\Rightarrow \ln'' x = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Konsquenter Weise ist $f = \ln$ konkav (auf $]0| + \infty[$). $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Für $a \in]0| + \infty[$ ist $f = (a \wedge .)$ zweimal differenzierbar und konvex. In der Tat gilt

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 \leq (\ln a)^2 \cdot (a \wedge x)\,,$$

wobei hier der Fall $a = 1$ besonderes Interesse verdient. $\square$(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Die Funktion $f = \coth$ ist zweimal differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und es gilt

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \coth'' x = \frac{2 \cdot \cosh x}{\sinh^3 x}.$$

Es folgen die bekannten Aussagen: coth ist konvex auf $]0| + \infty[$ und coth ist konkav auf $]-\infty|0[$. $\square$(Beispiel)

4 Satz von Rolle

<u>**Satz von Rolle**</u>

$f : D \to B$ reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ f stetig auf $[a|b]$

$\wedge$ f differenzierbar auf $]a|b[$

$\wedge$ $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$

$\exists \xi : \xi \in\,]a|b[\, \wedge\, 0 = f'(\xi)$

<u>BeweisSkizze</u> Nach dem **Satz vom Maximum** $\exists \eta : \eta \in [a|b] \wedge f$ hat in η Maximum auf $[a|b]$.

<u>1.Fall</u> $\eta \in\,]a|b[$. Dann gemäß Voraussetzungen, $0 = f'(\eta)$. Man setzt $\xi = \eta$.

<u>2.Fall</u> $\eta \in \{a, b\}$. Nach dem **Satz vom Minimum** $\exists \mu : \mu \in [a|b] \wedge f$ hat in μ Minimum auf $[a|b]$.

<u>2.1.Fall</u> $\mu \in\,]a|b[$. Dann gemäß Voraussetzungen $0 = f'(\mu)$. Man setzt $\mu = \xi$.

<u>2.2.Fall</u> $\mu \in \{a, b\}$. Dann nimmt f sowohl Maximum und Minimum am Rand an. Wegen $f(a) = f(b)$ folgt hieraus nach einiger Argumentatiion:

$$\forall x : x \in [a|b] \Rightarrow f(x) = f(a) = f(b).$$

Dann ist f differenzierbar auf $[a|b]$ mit

$$f' : [a|b] \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = 0.$$

Man setzt $\xi = \frac{a+b}{2}$. □(BeweisSkizze)

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis) Mit $f = \sin$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\sin a = \sin b$ folgt mit dem **Satz von Rolle**:

$$\exists \xi : \xi \in\,]a|b[\, \wedge\, 0 = \cos \xi = \sin' x,$$

so dass zwischen je zwei unterschiedlichen Stellen, in denen sin den gleichen Wert annimmt, cos (mindestens) eine Nullstellen hat. Im Speziellen liegt zwischen zwei unterschiedlichen Nullstellen von sin (mindestens) eine Nullstelle von cos. □(Beispiel)

5 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz - 1MWSDR

$f : D \to \mathbb{B}$ reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ f stetig auf $[a|b]$

$\wedge$ f differenzierbar auf $]a|b[$

$\Rightarrow$

$$\exists \xi : \xi \in \,]a|b[\, \wedge f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis Die Funktion

$$g : [a|b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (b - x) \cdot (f(x) - f(a)) - (x - a) \cdot (f(b) - f(x)),$$

erfüllt die Voraussetzungen vom **Satz von Rolle**. Also gibt es $\xi \in \,]a|b[$ mit

$$0 = g'(\xi) = -(f(\xi) - f(a)) + (b - \xi) \cdot f'(\xi) - (f(b) - f(\xi)) + (\xi - a) \cdot f'(\xi).$$

so dass

$$0 = f(a) - f(b) + (b - a) \cdot f'(\xi).$$

$\square$(Beweis)

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \sin$ und $a = 0$ und $b = x$, $0 < x \in \mathbb{R}$, und dem 1MWSDR gibt es (mindestens) ein $\xi \in \,]0|x[$, so dass

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin' \xi,$$

also

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \xi.$$

Demnach ist für jedes x mit $0 < x \in \mathbb{R}$ die Menge

$$E(x) = \left\{ \xi \in \,]0|x[\, : \frac{\sin x}{x} = \cos \xi \right\},$$

nichtleer, so dass mit Hilfe des Auswahlaxioms eine Funktion

$$\texttt{xi} : \,]0|\infty[\, \to \,]0| + \infty[,$$

gefunden werden dann, so dass

$$\forall x : x \in \left]0|+\infty\right[\Rightarrow 0 < \mathtt{xi}(x) < x \wedge \frac{\sin x}{x} = \mathtt{xi}(x).$$

Offenbar gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} \mathtt{xi}(x) = 0,$$

und es folgt

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\downarrow 0} \cos \mathtt{xi}(x) = \cos 0 = 1.$$

□(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \sqrt{\cdot}$ und $a = 0$ und $b = x$, $0 < x \in \mathbb{R}$, sind die Voraussetzugen des 1MWSDR erfüllt, da f stetig auf $\left[0|x\right]$ und differenzierbar auf $\left]0|x\right[$ ist. Die Differenzierbarkeit in 0 wird im 1MWSDR ausdrücklich *nicht* verlangt. Im vorliegenden Fall ist f nicht differenzierbar in 0. Aus dem 1MWSDR folgt

$$\exists \xi : \xi \in \left]0|x\right[\wedge \sqrt{\cdot}'(\xi) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0},$$

also

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

so dass

$$\sqrt{\xi} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x},$$

woraus sich via $\xi \in \left]0|x\right[$, $x \in \left]0|+\infty\right[$,

$$\xi = \frac{x}{4},$$

ergibt. Konsequenz:

$$\forall x : x \in \left]0|+\infty\right[\Rightarrow \sqrt{\cdot}'\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{\sqrt{x}}{x}.$$

□(Beispiel)

6 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz - 2MWSDR

$f: D \to \mathbb{B}$ reelle Funktion $\wedge$ $g: C \to A$ reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ f stetig auf $[a|b]$ $\wedge$ g stetig auf $[a|b]$

$\wedge$ f differenzierbar auf $]a|b[$ $\wedge$ g differenzierbar auf $]a|b[$

$\wedge$ $\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow 0 \neq g'(x)$

$\Rightarrow$

$0 \neq g(b) - g(a)$

$\wedge$ $\exists \xi : \xi \in\,]a|b[\, \wedge \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - (a)}.$

Beweis Via **Satz von Rolle** gilt

$((g : C \to A$ reelle Funktion$\wedge(a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b) \wedge (g$ stetig auf $[a|b]) \wedge (g$ differenzierbar auf $]a|b[) \wedge (g(a) = g(b)) \Rightarrow (\exists \eta : \eta \in\,]a|b[\, \wedge 0 = g'(\eta)).$

Hieraus und aus den Voraussetzungen, insbesondere aus $\forall x : x \in\,]a|b[\, \Rightarrow 0 \neq g'(x)$, folgt indirekt

$$\neg(g(a) = g(b)),$$

also $g(a) \neq g(b)$, woraus, da es sich bei g um eine reelle Funktiom mit $[a|b] \subseteq \operatorname{\mathsf{dom}} g$ handelt,

$$0 \neq g(b) - g(a),$$

folgt.

Die Funktion

$$h : [a|b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = (g(b)-g(x))\cdot(f(x)-f(a))-(g(x)-g(a))\cdot(f(b)-f(x)),$$

erfüllt die Voraussetzungen vom **Satz von Rolle**. Also gibt es $\xi \in\,]a|b[$ mit

$$0 = h'(\xi) = -g'(\xi)\cdot(f(\xi) - f(a)) + (g(b) - g(\xi))\cdot f'(\xi) \\ - g'(\xi)\cdot(f(b) - f(\xi)) + (g(\xi) - g(a))\cdot f'(\xi).$$

so dass

$$0 = f(a)\cdot g'(\xi) + (g(b) - g(\xi))\cdot f'(\xi) - f(b)\cdot g'(\xi) + (g(\xi) - g(a))\cdot f'(\xi),$$

und demnach

$$0 = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi) + (f(a) - f(b)) \cdot g'(\xi),$$

woraus wegen $0 \neq g(b) - g(a)$,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(b) - g(a)},$$

folgt. $\square$(Beweis)

Beispiel (ohne Beweis) Mit $f = \cos$ und $g = (. \uparrow 2)$ und $a = 0$ und $b = x$ mit $0 < x \in \mathbb{R}$ sind die Voraussetzungen vom 2MWSDR, insbesondere

$$\forall z : z \in \,]0|x[\, \Rightarrow 0 \neq 2 \cdot z = g'(z),$$

erfüllt. Konsequenter Weise,

$$\exists \xi : \xi \in \,]0|x[\, \wedge \frac{(\cos x) - (\cos 0)}{x^2 - 0^2} = \frac{\cos'(\xi)}{(. \uparrow 2)'(\xi)},$$

also

$$\frac{(\cos x) - 1}{x^2} = -\frac{\sin \xi}{2 \cdot \xi}.$$

Demnach ist für jedes x mit $0 < x \in \mathbb{R}$ die Menge

$$E(x) = \left\{ \xi \in \,]0|x[\, : \frac{(\cos x) - 1}{x^2} = -\frac{\sin \xi}{2 \cdot \xi} \right\},$$

nichtleer, so dass mit Hilfe des Auswahlaxioms eine Funktion

$$\mathtt{xi} : \,]0|\infty[\, \to \,]0| + \infty[,$$

gefunden werden dann, so dass

$$\forall x : x \in \,]0| + \infty[\, \Rightarrow 0 < \xi(x) < x \wedge \frac{(\cos x) - 1}{x^2 - 1} = \mathtt{xi}(x).$$

Offenbar gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} \mathtt{xi}(x) = 0,$$

und es folgt

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{(\cos x) - 1}{x^2} = \lim_{x \downarrow 0} -\frac{\sin \mathtt{xi}(x)}{2 \cdot \mathtt{xi}(x)} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sin \mathtt{xi}(x)}{\mathtt{xi}(x)} = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}.$$

$\square$(Beispiel)

7 Satz von Darboux

Die Ableitungsfunktion einer differenzierbaren reellen Funktion muss nicht stetig sein. Hierzu folgendes

Beispiel (ohne Beweis) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x) & , \quad 0 \neq x \\ 0 & , \quad 0 = x \end{cases}$$

Offensichtlich ist f für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und es gilt

$$\forall x : 0 \neq x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Auch gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \sin(1/x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin(1/x) = 0,$$

so dass f auch differenzierbar in 0 mit

$$0 = f'(0),$$

ist. Es folgt

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x) & , \quad 0 \neq x \\ 0 & , \quad 0 = x \end{cases}$$

Wegen

$$\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} 2 \cdot x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x) = \mathsf{nan} \neq 0 = f'(0),$$

ist f' nicht stetig in 0. Konsequenz: $\neg(f'$ stetig). $\square$(Beispiel)

Andererseits kann die Ableitung einer reellen Funktion auf echten reellen Intervallen auch keine Sprünge haben.

Satz von Darboux. Teil 1.

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to B \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & I \text{ echtes reelles Intervall} \\
\wedge & f \text{ differenzierbar auf } I \\
\wedge & x \in I \\
\wedge & z : \mathbb{N} \to I \wedge \forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow x < z_n \wedge \lim\limits_{n \uparrow +\infty} z_n = x \\
\Rightarrow & \\
 & \exists \xi : \xi : \mathbb{N} \to I \wedge \forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow x < \xi_n < z_n \\
 & \qquad \wedge \lim\limits_{n \uparrow +\infty} \xi_n = x \wedge \lim\limits_{n \uparrow +\infty} f'(\xi_n) = f'(x).
\end{array}
$$

<u>BeweisSkizze</u> Die Funktion f ist für alle $n \in \mathbb{N}$ auf dem Intervall $[x|z_n]$ differenzierbar. Also gibt es nach dem 1MWSDR für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\eta_n \in \,]x|z_n[$, so dass

$$f'(\eta) = \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x}.$$

Konsequenter Weise ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$E(n) = \left\{ \omega : \omega \in \,]x|z_n[\wedge f'(\omega) = \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x} \right\},$$

nichtleer. Dank Auswahlaxiom gibt es eine Funktion

$$\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

so dass

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi_n \in E(n).$$

Es folgt

$$\xi : \mathbb{N} \to I, \quad \wedge \quad \forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi_n \in \,]x|z_n[\wedge f'(\xi_n) = \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \xi_n = x,$$

und

$$\lim_{n \uparrow +\infty} f'(\xi_n) = \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x} = f'(x).$$

□(BeweisSkizze)

Satz von Darboux. Teil 2.

$$
\begin{array}{ll}
 & f : D \to B \text{ reelle Funktion} \\
\wedge & I \text{ echtes reelles Intervall} \\
\wedge & f \text{ differenzierbar auf } I \\
\wedge & x \in I \\
\wedge & z : \mathbb{N} \to I \wedge \forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow z_n < x \wedge \lim\limits_{n \uparrow +\infty} z_n = x \\
\Rightarrow & \\
 & \exists \xi : \xi : \mathbb{N} \to I \wedge \forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow z_n < \xi_n < x \\
 & \qquad \wedge \lim\limits_{n \uparrow +\infty} \xi_n = x \wedge \lim\limits_{n \uparrow +\infty} f'(\xi_n) = f'(x).
\end{array}
$$

Beispiel (ohne Beweis) Es soll gezeigt werden, dass die Funktion sgn *nicht* die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sein kann. Dies wird indirekt bewiesen, indem im **Satz von Darboux. Teil 1.** von einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ausgegangen wird, die (auf $\mathbb{R}$) differenzierbar mit $f' = \mathsf{sgn}$ ist und es wird die Folge

$$z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad z_n = \frac{1}{1+n},$$

betrachtet, für die offenbar

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < z_n \quad \wedge \quad \lim_{n \uparrow +\infty} z_n = 0,$$

gilt. Unter der Annahme, dass all diese Aussagen zutreffen, folgt aus dem **Satz von Darboux. Teil 1.**, dass es ξ gibt, so dass

$$\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad \forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < \xi_n < z_n,$$

und

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \xi_n = 0,$$

und

$$\lim_{n \uparrow +\infty} f'(\xi_n) = f'(0),$$

gilt. Entsprechend Voraussetzungen folgt

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \mathsf{sgn}\,(\xi_n) = \mathsf{sgn}\,(0) = 0.$$

Andererseits folgt aus

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < \xi_n < \frac{1}{1+n},$$

die Aussage

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathsf{sgn}\,(\xi_n) = 1.$$

Konsequenz:

$$\lim_{n\uparrow+\infty} 1 = 0.$$

Dies ist falsch. Also ist die Kombination der Voraussetzungen nicht wahr und es gibt keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Ableitung gleich sgn ist. □(Beispiel)

Beispiel (ohne Beweis) Vorhin wurde die Ableitung von

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(1/x) & 0 \neq x \\ 0 \quad , & 0 = x \end{cases}$$

mit

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2 \cdot x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x) & , \quad 0 \neq x \\ 0 & , \quad 0 = x \end{cases}$$

ermittelt. Obwohl f' nicht stetig in 0 ist, ist **Satz von Darboux. Teil 1.** mit $I = \mathbb{R}$ und $x = 0$ anwendbar. Sei etwa

$$z : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad z_n = \frac{1}{(1 + 2 \cdot n) \cdot \pi}.$$

Dann gilt

$$z : \mathbb{N} \to I,$$

und

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < z_n,$$

und

$$\lim_{n\uparrow+\infty} z_n = 0.$$

In der Tat gibt es eine Folge

$$\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

so dass

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < \xi_n < z_n,$$

und

$$\lim_{n\uparrow+\infty} \xi_n = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\uparrow+\infty} f'(\xi_n) = f'(0).$$

Man setzt

$$\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad \xi_n = \frac{2}{(1 + 2 \cdot n) \cdot \pi}.$$

Dann gelten die genannten Bedingungen, insbesondere

$$\begin{aligned}\lim_{n\uparrow+\infty} f'(\xi_n) &= \lim_{n\uparrow+\infty} f'\left(\frac{2}{(1+2\cdot n)\cdot\pi}\right)\\ &= \lim_{n\uparrow+\infty} 2\cdot\frac{2}{(1+2\cdot n)\cdot\pi}\cdot\sin\left(\frac{(1+2\cdot n)\cdot\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{(1+2\cdot n)\cdot\pi}{2}\right)\\ &= \lim_{n\uparrow+\infty}\frac{4}{(1+2\cdot n)\cdot\pi}\cdot(-1)^{1+n}-0=\lim_{n\uparrow+\infty}\frac{4\cdot(-1)^{1+n}}{(1+2\cdot n)\cdot\pi}=0\end{aligned}$$

□(Beispiel)

8 Eine Regel von Bernoulli-l'Hospital

Satz - Bernoulli-l'Hospital

$f : D \to B$ reelle Funktion $\wedge$ $g : C \to A$ reelle Funktion

$\wedge$ $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge a < b$

$\wedge$ f stetig auf $[a|b]$ $\wedge$ g stetig auf $[a|b]$

$\wedge$ f differenzierbar auf $]a|b[$ $\wedge$ g differenzierbar auf $]a|b[$

$\wedge$ $\forall x : x \in]a|b[\Rightarrow 0 \neq g'(x)$

$\wedge$ $0 = f(a) \wedge 0 = g(a)$

$\wedge$ $c \in \mathbb{S}$

$\wedge$ $\lim_{x\downarrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = c$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)}{g(x)} = c = \lim_{x\downarrow 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel (ohne Beweis)

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0}\frac{(\exp x)-1}{x\cdot(\cos x)-(\sin x)} &= \text{''}\ \frac{0}{0}\ \text{''}\\ &\overset{BlH}{=} \lim_{x\downarrow 0}\frac{\exp x}{(\cos x)-x\cdot(\sin x)-(\cos x)} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{\exp x}{-x\cdot(\sin x)} = -\infty.\end{aligned}$$

Beispiel (ohne Beweis)

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{(\exp x) - 1}{x \cdot (\cos x) + (\sin x)} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"}$$
$$\overset{BlH}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{\exp x}{(\cos x) - x \cdot (\sin x) + (\cos x)} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\exp x}{2 \cdot (\cos x) - x \cdot (\sin x)} = \frac{1}{2}.$$

$\star$

Es gibt weitere Regeln von Bernoulli-l'Hospital. Einige davon sollen hier im Vorkurs angedeutet werden.

Beispiel (ohne Beweis)

$$\lim_{x\downarrow 0} x \cdot \ln x = \text{"}\ 0 \cdot (-\infty)\ \text{"}$$
$$= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \text{"}\ \frac{-\infty}{+\infty}\ \text{"}$$
$$\overset{BlH}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\downarrow 0} -x = 0.$$

Beispiiel (ohne Beweis)

$$\lim_{x\uparrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = \text{"}\ \frac{+\infty}{+\infty}\ \text{"} \overset{BlH}{=} \lim_{x\uparrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\uparrow +\infty} x = +\infty.$$

Beispiel (ohne Beweis)

$$\lim_{x\downarrow 0} (x \wedge x) = \lim_{x\downarrow 0} \exp(x \cdot \ln x) \overset{\exp \text{ stetig}}{=} \exp\left(\lim_{x\downarrow 0} x \cdot \ln x\right) \overset{\text{s.o.}}{=} \exp 0 = 1.$$

Beispiel (ohne Beweis)

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{(\cos x) - 1}{x^2} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"} \overset{BlH}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cdot x} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"} \overset{BlH}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}.$$