Vorkurs Mathematik
Binomialkoeffizient

Andreas Unterreiter

21. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1 $\binom{x}{k}$

Neue Terme. "Binomialkoeffizienten" sind in Abhängigkeit von "x" für natürliche "k" rekursiv definiert.

$$\binom{x}{0} = 1, \tag{1}$$

$$\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x-k}{1+k}, \tag{2}$$

so dass im Speziellen für reelle x,

$$\binom{x}{0} = 1,$$

$$\binom{x}{1} = \binom{x}{1+0} = \binom{x}{0} \cdot \frac{x-0}{1+0} = 1 \cdot \frac{x}{1} = x,$$

$$\binom{x}{2} = \binom{x}{1+1} = \binom{x}{1} \cdot \frac{x-1}{1+1} = x \cdot \frac{x-1}{2} = \frac{x \cdot (x-1)}{2},$$

$$\binom{x}{3} = \binom{x}{1+2} = \binom{x}{2} \cdot \frac{x-2}{1+2} = \frac{x(x-1)}{2} \cdot \frac{x-2}{3} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{6},$$

$$\begin{aligned}\binom{x}{4} = \binom{x}{1+3} = \binom{x}{3} \cdot \frac{x-3}{1+3} &= \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{6} \cdot \frac{x-3}{4} \\ &= \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{24},\end{aligned}$$

und hieraus durch sorgfältige Beobachtung die Vermutung entsteht,

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\binom{x}{k} &= \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+k))}{k!} \\ &= \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+k))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k},\end{aligned} \tag{3}$$

wobei beim letzten Term auffällt, dass die Anzahl der Faktoren im Zähler und Nenner gleich k sind.

In der Tat ist (3) richtig - vorausgesetzt, der neue Term "$x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+k))$" ist rekursiv via

$$x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+0)) = 1,$$

$$\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x - (-1 + (1+k)))$$
$$= (x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x - (-1+k))) \cdot (x-k),$$

festgelegt. Beweis als UE.

Satz - binom - 1

a) $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{x}{k} \in \mathbb{R}.$

b) $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N}$
$$\Rightarrow \quad (1+x-k) \cdot \binom{1+x}{k} = (1+x) \cdot \binom{x}{k}.$$

c) $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x+1}{1+k}.$

d) $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{1+k}.$

e) $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \binom{x}{1+k} = 0.$

Beweis als UE.

Satz - binom - 1 d) lässt sich ansprechend mit dem “PASCALschen Dreieck” visualisieren.

Entsprechend nachfolgenden Satzes ist - unter anderem - für natürliche n, k der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ebenfalls eine natürliche Zahl.

Satz - binom - $\mathbb{N}$

a) $1 \leq k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{0}{k} = 0.$

b) $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{n} = 1.$

c) $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq n \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$

d) $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq n \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

e) $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$

f) $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge n < k \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k} = 0.$

Beweis als UE.

Der folgende Satz ist von eher theoretischem Interesse und wird deshalb im Vorkurs nicht weiter durch Beispiele erläutert. Dass er dennoch hier erscheint liegt an den Beweisen von `a) - c)`. Im Beweis von `a)` kommt es zum Einsatz eines Satzes über natürliche Zahlen, wonach jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum hat. *Dieser* Satz wird erst später im Abschnitt "**Maximum und Minimum**" von Kapitel "$<$ **und** $\leq$" vorgestellt. Der Beweis von `a)` wird im Übungsteil von Kapitel "$<$ **und** $\leq$" nachgereicht.

Der Beweis von `b)` ist *indirekt.* Dies ist eine wichtige Art der Beweisführung. Aussage `a)` wird beim Beweis von `b)` als wahr vorausgesetzt. `c)` folgt in indirekter Weise aus `b)`. Jedoch muss hier die zum indirekten Beweisen benötigte wahre Aussage selbst gefunden werden.

Satz - binom - 2

`a)` $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{N} \wedge x < k.$

`b)` $x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{x}{k} \neq 0.$

`c)` $x \in \mathbb{R} \wedge x < 0 \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{x}{k} \neq 0.$

Beweis `a)` siehe **UE -** $<$ **und** $\leq$.

Beweis `b)` VS $x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}$.

INDIREKT.

Intermezzo. Egal, ob eine Hausaufgabe bearbeitet, eine Rechenaufgabe gelöst oder ein Beweis geführt werden soll - es wird immer von Voraussetzungen - den Prämissen - "ausgegangen" - das heisst, es wird angenommen, dass die Prämissen *wahr* sind. Danach werden bekannte mathematische Sätze zur Lösung des jeweiligen Problems eingesetzt. So ist mathematisch genau genommen etwa mit der unscheinbaren

Aufgabe Bestimme alle x mit $x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$.

"implizit" - also ohne spezielle Erwähnung - gemeint: Es gibt - mindestens - ein x, für das die Aussage "$x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$" *wahr* ist. Unter stillschweigender Annahme, dass es so ein x gibt, werden bekannte Manipulationen durchgeführt. Wenn sich am Ende ein erwartetes Resultat einstellt - im vorliegenden Fall wäre es typischer Weise die Aussage "$x = 2 \vee x = 3$" -, gilt das "A priori - Problem " als gelöst und mit einfachem Einsetzen kann man sich "A posteriori " davon überzeugen, dass sowohl aus "$x = 2$" als auch "$x = 3$" die Aussage "$x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$" folgt. Damit ist die Aufgabe komplett gelöst.

Anders ist es, wenn man an eine “ unlösbar ” genannte Aufgabe wie

Aufgabe Bestimmen Sie alle reellen x, y mit $x^2 + y^2 = 36$ und $x + y = 10$.

gerät. Man geht bei der Bearbeitung unbedarft von reellen x, y mit $x^2 + y^2 = 36$ und $x + y = 10$ aus, schlussfolgert richtiger Weise $y = 10 - x$ und hieraus $x^2+(10-x)^2 = 36$, also auch $x^2+x^2-20\cdot x+100 = 36$, so dann $2\cdot x^2-20\cdot x+64 = 0$, vereinfacht zu $x^2 - 10 \cdot x + 32 = 0$ und erhält mit quadratischer Ergänzung $(x-5)^2+7 = 0$, also $(x-5)^2 = -7$, während aus $x \in \mathbb{R}$ zunächst $x-5 \in \mathbb{R}$ und dann $0 \leq (x-5)^2$ folgt, so dass sich befremdlicher Weise $0 \leq -7$ ergibt, während doch bekannter Massen $-7 < 0$ gilt, so dass $0 < 0$ und demnach $0 \neq 0$ folgt. Spätestens hier man stellt verwundert bis verägert fest, dass dies falsch ist und sagt, dass “ die Aufgabe nicht lösbar” sei und zeigt jedem, der “ Warum?” fragt, als Begründung den logisch einwandfreien Rechenweg und legt die Aufgabe ad acta, da dem Anspruch des Aufgabenstellers, reelle x, y mit $x^2 + y^2 = 36$ und $x + y = 10$ zu benennen, nicht nachgekommen werden kann.

Trotz der Enttäuschung ist die Bearbeitung nicht völlig umsonst gewesen, denn genau genommen wurde einwandfrei der mathematische Satz

Satz - Intermezzo - 1

$x \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad y \in \mathbb{R}$

$\wedge \quad x^2 + y^2 = 36$

$\wedge \quad x + y = 10$

$\Rightarrow$

$0 \neq 0$

bewiesen.

Logisch äquivalent zu der “ Prämissen $\Rightarrow$ Konklusion” -Formulierung von **Satz - Intermezzo - 1** ist die “ $\neg$(Prämissen) $\vee$ (Konklusion)” -Darstellung

$$\neg(x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 36 \wedge x + y = 10) \vee (0 \neq 0),$$

die wegen der Wahrheit von “ $\neg(0 \neq 0)$” - also von “ $0 = 0$” - logisch äquivalent zu

$$\neg(x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 36 \wedge x + y = 10),$$

ist. Mit **Satz - Intermezzo - 1** wurde also der universell gültigen

Satz - Intermezzo - 2

$$\neg(x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 36 \wedge x + y = 10)$$

bewiesen. **Satz - Intermezzo - 2** kann auf mehrere Arten in eine "Prämissen $\Rightarrow$ Konklusion"-Darstellung übergeführt werden. So ist **Satz - Intermezzo - 2** logisch äquivalent zu

$$\neg(x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 36) \vee (\neg(x + y = 10)),$$

woraus via der logischen Äquivalenz von "$\neg(x + y = 10)$" und "$x + y \neq 10$",

Satz - Intermezzo - 3

$$\begin{array}{ll} & x \in \mathbb{R} \\ \wedge & y \in \mathbb{R} \\ \wedge & x^2 + y^2 = 36 \\ \Rightarrow & \\ & x + y \neq 10 \end{array}$$

folgt. Als Übung sei die - sehr ähnliche - Herleitung von

Satz - Intermezzo - 4

$$\begin{array}{ll} & x^2 + y^2 = 36 \\ \wedge & x + y = 10 \\ \Rightarrow & \\ & x \notin \mathbb{R} \vee y \notin \mathbb{R} \end{array}$$

empfohlen.

Man sieht: Führt ein Bündel von Prämissen zu einer falschen Aussage sind dennoch einige mathematische Sätze verfügbar.

Dies ist das Wesen indirekter Beweise. Intermezzo Ende

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die (auch ohne Vorlegen eines Beweises) wahre Aussage `a)`:

$$x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

wobei die ebenfalls via `a)` verfügbare Konklusion " $x < k$" hier nicht weiter interessiert. Nach den Ausführungen des Intermezzos ist (4) logisch äquivalent zu

$$\neg\left(x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{k} = 0\right) \vee x \in \mathbb{N},$$

und wenn man hier die Negation auflöst erhält man die zwar universell gültige, ansonsten aber eher unverständliche Aussage,

$$x \notin \mathbb{R} \vee k \notin \mathbb{N} \vee \binom{x}{k} \neq 0 \vee x \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Nun kommt die VS ins Spiel. Die VS ist $x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}$.

Es wird bei jedem Beweis davon ausgegangen, dass die VS wahr ist.

Es gilt also nicht nur (5), es gilt auch

$$x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

(5) und (6) sind beide wahr. Aus (5) und " $x \in \mathbb{R}$" von (6) folgt

$$k \notin \mathbb{N} \vee \binom{x}{k} \neq 0 \vee x \in \mathbb{N}.$$

woraus via " $k \in \mathbb{N}$" von (6) die Aussage

$$\binom{x}{k} \neq 0 \vee x \in \mathbb{N},$$

folgt, aus der sich via " $x \notin \mathbb{N}$" von (6) schliesslich

$$\binom{x}{k} \neq 0,$$

ergibt.

Damit ist `b)` bewiesen. □ `b)`

<u>Beweis</u> `c)` VS $x \in \mathbb{R} \wedge x < 0 \wedge k \in \mathbb{N}$.

INDIREKT.

Aus " $x < 0$" folgt offenbar " $x \notin \mathbb{N}$" . Hieraus und aus der VS

$$x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N},$$

ergibt sich via des bereits bewiesenen `b)` die Aussage $\binom{x}{k} \neq 0$.

Etwas präziser gesprochen wird mit der wahren Aussage

$$x \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \le x,$$

begonnen, die als

$$x \notin \mathbb{N} \vee 0 \le x, \tag{7}$$

reformulierbar ist. Aus der VS"$x < 0$" folgt mit Schulmathematik

$$\neg(0 \le x),$$

so dass sich nun mit (7) in der Tat

$$x \notin \mathbb{N},$$

ergibt. Somit gilt unter Verwendung der VS,

$$x \in \mathbb{R} \wedge x < 0 \wedge k \in \mathbb{N} \wedge x \notin \mathbb{N},$$

woraus

$$x \in \mathbb{R} \wedge x \notin \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N},$$

folgt. Dies sind die Prämissen von `b)`, so dass via `b)` die Aussage $\binom{x}{k} \neq 0$ folgt. $\square$ `c)`

Zum Abschluss des Abschnitts "$\binom{x}{k}$" sei hauptsächlich als logische Übung die Ausarbeitung eines Beweises von

Satz - binom - $\mathbb{N}$ +1

`a)` $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \le n \quad \Rightarrow \quad 1 \le \binom{n}{k}.$

`b)` $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge 1 \le \binom{n}{k} \quad \Rightarrow \quad k \in n.$

empfohlen. Es darf auf **Satz - binom - 2** `a)` zurück gegriffen werden. Ein Beweis ist in UE - Binomialkoeffizient - $\mathbb{N}$ zu finden.

2 Beispiele

In nicht mathematisch präziser, doch in typisch Übungsaufgaben-artiger Form sind hier einige Übungsaufgaben gestellt. Zumeist zeigt erst die Bearbeitung, was mit der Übungsaufgabe gemeint ist.

2.1 $\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1}$

Aufgabe Berechnen Sie

a) $\binom{0}{0}$,

b) $\binom{0}{1}$,

c) $\binom{1}{1}$,

d) $\binom{1}{0}$.

Ausarbeitung a) Für alle x gilt $\binom{x}{0} = 1$. Es folgt $\binom{0}{0} = 1$.

Ausarbeitung b) Für alle k mit $1 \leq k \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{0}{k} = 0$. Hieraus folgt wegen $1 \leq 1 \in \mathbb{N}$: $\binom{0}{1} = 0$.

Ausarbeitung c) Für alle n mit $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{n} = 1$. Hieraus folgt via $1 \in \mathbb{N}$: $\binom{1}{1} = 1$.

Ausarbeitung d) Für alle x gilt $\binom{x}{0} = 1$. Es folgt $\binom{1}{0} = 1$.

$\square$

2.2 $\binom{\frac{1}{2}}{0}, \binom{\frac{1}{2}}{1}, \binom{\frac{1}{2}}{2}, \binom{\frac{1}{2}}{3}$

Aufgabe Berechnen Sie

a) $\binom{\frac{1}{2}}{0}$,

b) $\binom{\frac{1}{2}}{1}$,

c) $\binom{\frac{1}{2}}{2}$,

d) $\binom{\frac{1}{2}}{3}$.

Ausarbeitung a) Für alle x gilt $\binom{x}{0} = 1$. Es folgt $\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1$.

Ausarbeitung b) Für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gilt $\binom{x}{1} = x$. Hieraus und aus $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ folgt: $\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.

Ausarbeitung c) Für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gilt $\binom{x}{2} = \frac{x\cdot(x-1)}{1\cdot 2}$. Hieraus und aus $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8}.$$

Ausarbeitung/Version 1 d) Für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gilt $\binom{x}{3} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$. Hieraus und aus $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{\frac{3}{8}}{6} = \frac{3}{8\cdot 6} = \frac{1}{8\cdot 2} = \frac{1}{16}.$$

Ausarbeitung/Version 2 d) Für alle x, k mit $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{x}{1+k} = \binom{x}{k}\cdot\frac{x-k}{1+k}$. Hieraus und aus $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ und $2 \in \mathbb{N}$ folgt

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \binom{\frac{1}{2}}{1+2} = \binom{\frac{1}{2}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{1+2} \overset{\text{c)}}{=} -\frac{1}{8}\cdot\frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{8}\cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

□

2.3 $\binom{-\frac{1}{2}}{0}, \binom{-\frac{1}{2}}{1}, \binom{-\frac{1}{2}}{2}, \binom{-\frac{1}{2}}{3}$

Aufgabe Berechnen Sie

a) $\binom{-\frac{1}{2}}{0}$,

b) $\binom{-\frac{1}{2}}{1}$,

c) $\binom{-\frac{1}{2}}{2}$,

d) $\binom{-\frac{1}{2}}{3}$.

Ausarbeitung a) Für alle x gilt $\binom{x}{0} = 1$. Es folgt $\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1$.

Ausarbeitung b) Für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gilt $\binom{x}{1} = x$. Hieraus und aus $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ folgt: $\binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$.

Ausarbeitung c) Für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gilt $\binom{x}{2} = \frac{x\cdot(x-1)}{1\cdot 2}$. Hieraus und aus $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}.$$

Ausarbeitung d)/Version 1 Für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gilt $\binom{x}{3} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$. Hieraus und aus $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{6}$$
$$= \frac{-\frac{15}{8}}{6} = -\frac{15}{8\cdot 6} = -\frac{5}{8\cdot 2} = -\frac{5}{16}.$$

Ausarbeitung d)/Version 2 Für alle x, k mit $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x-k}{1+k}$. Hieraus und aus $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ und $2 \in \mathbb{N}$ folgt

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \binom{-\frac{1}{2}}{1+2} = \binom{-\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{2}-2}{1+2} \overset{\text{c)}}{=} \frac{3}{8}\cdot\frac{-\frac{5}{2}}{3} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{2} = -\frac{5}{16}.$$

□

2.4 $\binom{20}{0}, \binom{20}{2}, \binom{20}{4}, \binom{20}{16}$

Aufgabe Berechnen Sie

a) $\binom{20}{0}$,

b) $\binom{20}{2}$,

c) $\binom{20}{4}$,

d) $\binom{20}{16}$.

Ausarbeitung a) Für alle x gilt $\binom{x}{0} = 1$. Es folgt $\binom{20}{0} = 1$.

Ausarbeitung b) Für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gilt $\binom{x}{2} = \frac{x\cdot(x-1)}{1\cdot 2}$. Hieraus und aus $20 \in \mathbb{R}$ folgt

$$\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 10 \cdot 19 = 190.$$

Ausarbeitung c) Für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gilt $\binom{x}{4} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$. Hieraus und aus $20 \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{10 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 4} = \frac{10 \cdot 19 \cdot 6 \cdot 17}{4}$$
$$= \frac{5 \cdot 19 \cdot 6 \cdot 17}{2} = 5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17 = 95 \cdot 51$$
$$= 90 \cdot 50 + 90 \cdot 1 + 5 \cdot 50 + 5 \cdot 1 = 4500 + 90 + 250 + 5 = 4750 + 95 = 4845.$$

Ausarbeitung d)/Version 1 Für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\binom{x}{16} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-15)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 16}.$$

Hieraus und aus $20 \in \mathbb{R}$ folgt

$$\binom{20}{16} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}$$
$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}$$
$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{10 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 4} = \frac{10 \cdot 19 \cdot 6 \cdot 17}{4}$$
$$= \frac{5 \cdot 19 \cdot 6 \cdot 17}{2} = 5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17 = 95 \cdot 51$$
$$= 90 \cdot 50 + 90 \cdot 1 + 5 \cdot 50 + 5 \cdot 1 = 4500 + 90 + 250 + 5 = 4750 + 95 = 4845.$$

Ausarbeitung `d)`/Version 2 Für alle n, k mit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Hieraus, aus $20 \in \mathbb{N}$, $16 \in \mathbb{N}$, $16 \leq 20$, folgt

$$\binom{20}{16} = \binom{20}{20-16} = \binom{20}{4} \overset{\texttt{c)}}{=} 4845.$$

$\square$

2.5 $f(x) = 1 + 2 \cdot x - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4$

Aufgabe Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + 2 \cdot x - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4.$$

Bestimmen Sie die ersten vier Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$, werten diese für $x = 0$ aus und erstellen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{4!} \cdot x^4.$$

Sind f und g gleich?

Ausarbeitung Via Aufgabenstellung und Schulmathematik gilt für alle reellen x,

$$f(x) = 1 + 2 \cdot x - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4, \tag{8}$$

$$f'(x) = 2 - 6 \cdot x + 15 \cdot x^2 - 32 \cdot x^3, \tag{9}$$

$$f''(x) = -6 + 30 \cdot x - 96 \cdot x^2, \tag{10}$$

$$f'''(x) = 30 - 192 \cdot x, \tag{11}$$

$$f''''(x) = -192. \tag{12}$$

Aus (8) - (12) folgt für $x = 0$,

$$f(0) = 1, \tag{13}$$

$$f'(0) = 2, \tag{14}$$

$$f''(0) = -6, \tag{15}$$

$$f'''(0) = 30, \tag{16}$$

$$f''''(0) = -192, \tag{17}$$

so dass nun für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gemäß Aufgabenstellung,

$$\begin{aligned}
g(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{4!} \cdot x^4 \\
\overset{(13)}{=} 1 + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{4!} \cdot x^4 \\
\overset{(14)}{=} 1 + \frac{2}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{4!} \cdot x^4 \\
\overset{(15)}{=} 1 + \frac{2}{1!} \cdot x + \frac{-6}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{4!} \cdot x^4 \\
\overset{(16)}{=} 1 + \frac{2}{1!} \cdot x + \frac{-6}{2!} \cdot x^2 + \frac{30}{3!} \cdot x^3 + \frac{f''''(0)}{4!} \cdot x^4 \\
\overset{(17)}{=} 1 + \frac{2}{1!} \cdot x + \frac{-6}{2!} \cdot x^2 + \frac{30}{3!} \cdot x^3 + \frac{-192}{4!} \cdot x^4 \\
= 1 + \frac{2}{1} \cdot x + \frac{-6}{2} \cdot x^2 + \frac{30}{6} \cdot x^3 + \frac{-192}{24} \cdot x^4 \\
= 1 + 2 \cdot x - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 - 8 \cdot x^4 = f(x).
\end{aligned}$$

Es folgt $f = g$.

$\square$

2.6 $f(x) = -2 + 3 \cdot x - 2 \cdot x^2 + x^3$

Aufgabe Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) - 2 + 3 \cdot x - 2 \cdot x^2 + x^3.$$

Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen $f'(x), f''(x), f'''(x)$, werten diese für $x = 1$ aus und erstellen

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3.$$

Sind f und g gleich?

Ausarbeitung Via Aufgabenstellung und Schulmathematik gilt für alle reellen x,

$$f(x) = -2 + 3 \cdot x - 2 \cdot x^2 + x^3, \tag{18}$$

$$f'(x) = 3 - 4 \cdot x + 3 \cdot x^2, \tag{19}$$

$$f''(x) = -4 + 6 \cdot x, \tag{20}$$

$$f'''(x) = 6. \tag{21}$$

Aus (18) - (21) folgt für $x = 1$,

$$f(1) = -2 + 3 - 2 + 1 = 0, \tag{22}$$

$$f'(1) = 3 - 4 + 3 = 2, \tag{23}$$

$$f''(1) = -4 + 6 = 2, \tag{24}$$

$$f'''(1) = 6, \tag{25}$$

so dass nun für alle x mit $x \in \mathbb{R}$ gemäß Aufgabenstellung,

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 \\
&\overset{(22)}{=} 0 + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 \\
&\overset{(23)}{=} 0 + \frac{2}{1!} \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 \\
&\overset{(24)}{=} 0 + \frac{2}{1!} \cdot (x-1) + \frac{2}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!} \cdot (x-1)^3 \\
&\overset{(25)}{=} 0 + \frac{2}{1!} \cdot (x-1) + \frac{2}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{6}{3!} \cdot (x-1)^3 \\
&= \frac{2}{1!} \cdot (x-1) + \frac{2}{2!} \cdot (x-1)^2 + \frac{6}{3!} \cdot (x-1)^3 \\
&= \frac{2}{1} \cdot (x-1) + \frac{2}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{6}{6} \cdot (x-1)^3 \\
&= 2 \cdot (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 \\
&= (2 \cdot x - 2) + (x^2 - 2 \cdot x + 1) + (x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1) \\
&= (-2 + 1 - 1) + (2 - 2 + 3) \cdot x + (1 - 3) \cdot x^2 + x^3 \\
&= -2 + 3 \cdot x - 2 \cdot x^2 + x^3 = f(x).
\end{aligned}$$

Es folgt $f = g$.

$\square$

2.7 $f(x) = \sqrt{1+x}$

Aufgabe Sei

$$f : \,]-1|1[\, \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Bestimmen Sie für n mit $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f (mit der Konvention 0-te Ableitung von f gleich $f^{(0)}$ gleich f) und stellen Sie für x mit $x \in \,]-1|1[$ den Term $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ mit Hilfe eines geeigneten Binomialkoeffizienten dar. Spezialisieren Sie die Darstellung für $x = 0$.

HINWEIS: Für $x \in \,]-1|1[$ gilt $f(x) = (1+x)^{1/2}$.

Ausarbeitung Via Aufgabenstellung, HINWEIS und Schulmathematik gilt für alle reellen x,

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{1/2}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-1/2}, \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-3/2}, \\ f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot (1+x)^{-5/2}, \\ f''''(x) &= \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} \cdot (1+x)^{-7/2}, \end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot (1+x)^{1/2}, \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-1/2}, \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot (1+x)^{-3/2}, \\ f'''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdot (1+x)^{-5/2}, \\ f''''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 3\right) \cdot (1+x)^{-7/2}, \end{aligned}$$

so dass der Verdacht

$$\begin{aligned} &\forall x, n : x \in \,]-1|1[\, \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} - (-1+n)\right) \cdot (1+x)^{-(-1+2\cdot n)/2} \end{aligned}$$

$$? \quad (26)$$

entsteht. Aus (26) folgt unmittelbar

$$\forall x, n : x \in \,]-1|1[\, \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}-2\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2}-(-1+n)\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \cdot (1+x)^{-(-1+2 \cdot n)/2}$$
$$?$$

und hieraus per definitionem

$$\forall x, n : x \in \,]-1|1[\, \wedge n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (1+x)^{-(-1+2 \cdot n)/2} \quad ? \qquad (27)$$

Via

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1^{-(-1+2 \cdot n)/2} = 1,$$

folgt aus (27)

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\frac{1}{2}}{n} \quad ?$$

Doch ist (26) wahr und sind - wenn ja - die Fragezeichen "?" in den nachfolgenden Formeln überflüssig ? Die Antwort ist "ja". (26) wird mit Vollständiger Induktion bewiesen. Die als Übung empfohlene Ausarbeitung des Beweises ist in den "**Exempla 1**" zu finden. □

2.8 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$

Aufgabe Sei

$$f : \left]-\infty|3\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}.$$

Bestimmen Sie für n mit $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f (mit der Konvention 0-te Ableitung von f gleich $f^{(0)}$ gleich f) und stellen Sie für x mit $x \in \left]-\infty|3\right[$ den Term $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ mit Hilfe eines geeigneten Binomialkoeffizienten dar. Spezialisieren Sie die Darstellung für $x = -1$.

HINWEIS: Für $x \in \left]-\infty|3\right[$ gilt $f(x) = (3-x)^{-1/2}$.

Ausarbeitung Via Aufgabenstellung, HINWEIS und Schulmathematik gilt für alle reellen x,

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (3-x)^{-1/2}, \\
f^{(1)}(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (3-x)^{-3/2} = \frac{1}{2} \cdot (3-x)^{-3/2}, \\
f^{(2)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot (-1) \cdot (3-x)^{-5/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (3-x)^{-5/2}, \\
f^{(3)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} \cdot (-1) \cdot (3-x)^{-7/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot (3-x)^{-7/2}, \\
f^{(4)}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot -\frac{7}{2} \cdot (-1) \cdot (3-x)^{-9/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (3-x)^{-9/2},
\end{aligned}$$

also auch

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= 1 \cdot (3-x)^{-1/2}, \\
f^{(1)}(x) &= (-1) \cdot -\frac{1}{2} \cdot (3-x)^{-3/2}, \\
f^{(2)}(x) &= 1 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdot (3-x)^{-5/2}, \\
f^{(3)}(x) &= (-1) \cdot -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \cdot (3-x)^{-7/2}, \\
f^{(4)}(x) &= 1 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - 3\right) \cdot (3-x)^{-9/2},
\end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(0)}(x)}{0!} = \frac{1 \cdot (3-x)^{-1/2}}{1} = \frac{1}{1} \cdot (3-x)^{-1/2} &= 1 \cdot (3-x)^{-1/2} \\
&= 1 \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{0} \cdot (3-x)^{-1/2},
\end{aligned}$$

$$\frac{f^{(1)}(x)}{1!} = \frac{(-1)\cdot -\frac{1}{2}\cdot(3-x)^{-3/2}}{1} = (-1)\cdot -\frac{1}{2}\cdot(3-x)^{-3/2} = (-1)\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{1}\cdot(3-x)^{-3/2},$$

$$\frac{f^{(2)}(x)}{2!} = \frac{1\cdot -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot(3-x)^{-5/2}}{1\cdot 2} = 1\cdot\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot(3-x)^{-5/2} = 1\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{2}\cdot(3-x)^{-5/2},$$

$$\frac{f^{(3)}(x)}{3!} = \frac{(-1)\cdot -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot(3-x)^{-7/2}}{1\cdot 2\cdot 3} = (-1)\cdot\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(3-x)^{-7/2} = (-1)\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{3}\cdot(3-x)^{-7/2},$$

$$\frac{f^{(4)}(x)}{4!} = \frac{1\cdot -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-3\right)\cdot(3-x)^{-9/2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1\cdot\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(3-x)^{-9/2} = 1\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{4}\cdot(3-x)^{-9/2},$$

so dass der Verdacht

$$\forall x,n : x\in\,]-\infty|3[\,\wedge n\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = (-1)^n\cdot\binom{-\frac{1}{2}}{n}\cdot(3-x)^{-(1+2\cdot n)/2} \quad ? \qquad (28)$$

entsteht. Offenbar gilt

$$\forall n : n\in\mathbb{N} \Rightarrow (3-(-1))^{-(1+2\cdot n)/2} = 4^{-(1+2\cdot n)/2} = \left(2^2\right)^{-(1+2\cdot n)/2} = 2^{2\cdot -(1+2\cdot n)/2} = 2^{-1-2\cdot n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2\cdot n},$$

so dass aus (28)

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2\cdot n} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n} \quad ? \tag{29}$$

folgen würde.

Sowohl (28) als auch (29) sind wahr. Ein Beweis mit Vollständiger Induktion ist in den "**Exempla 1**" zu finden. Es wird eigenständige Ausarbeitung des Beweises empfohlen. □

2.9 $(a+b)^5$

<u>**Aufgabe**</u> Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0} \cdot a^5 + \binom{5}{1} \cdot a^4 \cdot b + \binom{5}{2} \cdot a^3 \cdot b^2 + \binom{5}{3} \cdot a^2 \cdot b^3 + \binom{5}{4} \cdot a \cdot b^4 + \binom{5}{5} \cdot b^5.$$

<u>Ausarbeitung</u> Es gilt

$$(a+b)^5 = (a+b)^2 \cdot (a+b)^3 = (a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) \cdot (a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3)$$

$$\begin{aligned} &= a^2 \cdot (a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3) \\ &\quad + 2 \cdot a \cdot b \cdot (a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3) \\ &\quad + b^2 \cdot (a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a^5 + 3 \cdot a^4 \cdot b + 3 \cdot a^3 \cdot b^2 + a^2 \cdot b^3) \\ &\quad + (2 \cdot a^4 \cdot b + 6 \cdot a^3 \cdot b^2 + 6 \cdot a^2 \cdot b^3 + 2 \cdot a \cdot b^4) \\ &\quad + (a^3 \cdot b^2 + 3 \cdot a^2 \cdot b^3 + 3 \cdot a \cdot b^4 + b^5) \end{aligned}$$

$$= a^5 + (3+2) \cdot a^4 \cdot b + (3+6+1) \cdot a^3 \cdot b^2 + (1+6+3) \cdot a^2 \cdot b^3 + (2+3) \cdot a \cdot b^4 + b^5$$

$$= 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5,$$

und mit Hilfe von (1), (2) folgt via “ $5 \in \mathbb{R}$” und “ $0, 1, 2 \in \mathbb{N}$” ,

$$\binom{5}{0} = 1,$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5}{1} = 5,$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10,$$

und dann via **Satz - binom -** $\mathbb{N}$ `d)`,

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3} = \binom{5}{2} = 10,$$

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{5-4} = \binom{5}{1} = 5,$$

$$\binom{5}{5} = \binom{5}{5-5} = \binom{5}{0} = 1,$$

so dass in der Tat,

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^5 \\
&\qquad = \ldots = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5 \\
&= \binom{5}{0} \cdot a^5 + \binom{5}{1} \cdot a^4 \cdot b + \binom{5}{2} \cdot a^3 \cdot b^2 + \binom{5}{3} \cdot a^2 \cdot b^3 + \binom{5}{4} \cdot a \cdot b^4 + \binom{5}{5} \cdot b^5.
\end{aligned}
$$

□

3 UE - Binomialkoeffizient

3.1 $\binom{x}{k} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(-1+k))}{k!} = *$

Es soll die Aussage

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \land k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$\binom{x}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+k))}{k!}$$
$$= \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+k))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}, \quad (30)$$

bewiesen werden. Es stehen die Rekursionen

$$\binom{x}{0} = 1, \quad (31)$$

$$\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x-k}{1+k}, \quad (32)$$

und

$$x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+0)) = 1, \quad (33)$$

$$\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+(1+k)))$$
$$= (x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+k))) \cdot (x-k), \quad (34)$$

zur Verfügung.

<u>Beweis von (30)</u>

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $x \in \mathbb{R}$.

`2:` $\exists E : E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{\omega} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+\omega))}{\omega!}\right\}$.

`3.1:` Via (31) gilt: $\binom{x}{0} = 1$.

`3.2:` Via (33) gilt: $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+0)) = 1$.

`4:` $\binom{x}{0} \stackrel{3.1}{=} 1 = \frac{1}{1} \stackrel{3.2}{=} \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+0))}{1} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+0))}{0!}$.

`5:` Aus "0 Menge", aus "$0 \in \mathbb{N}$" und aus `4` folgt per definitionem E: $0 \in E$.

> $\boxed{\texttt{Thema6}}$ $p \in E$.
>
> `7:` Aus `Thema6` folgt per definitionem E:
> $p \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{p} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-(-1+p))}{p!}$.
>
> `8:` Aus `7` folgt: $p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema6`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": `A1` | "$E \subseteq \mathbb{N}$"

...

`Thema1` $x \in \mathbb{R}$.

...

`Thema7` $\lambda \in E$.

`8:` Aus `Thema7` folgt per definitionem E:

$$\lambda \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{\lambda} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(-1+\lambda))}{\lambda!}.$$

`9.1:` Aus `8`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $1+\lambda \in \mathbb{N}$.

`9.2:` Aus `8` folgt: $\lambda \in \mathbb{N}$.

`9.3:` Aus `8` folgt: $\binom{x}{\lambda} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(-1+\lambda))}{\lambda!}$.

`10.1:` Aus `9.1` folgt: $1+\lambda$ Menge.

`10.2:`
$$\binom{x}{1+\lambda} \overset{\mathtt{9.2},(32)}{=} \binom{x}{\lambda}\cdot\frac{x-\lambda}{1+\lambda} \overset{\mathtt{9.3}}{=} \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(-1+\lambda))}{\lambda!}\cdot\frac{x-\lambda}{1+\lambda}$$
$$= \frac{(x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(-1+\lambda)))\cdot(x-\lambda)}{\lambda!\cdot(1+\lambda)}$$
$$\overset{\mathtt{9.2},(34)}{=} \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(-1+(1+\lambda)))}{\lambda!\cdot(1+\lambda)}$$
$$= \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(-1+(1+\lambda)))}{(1+\lambda)\cdot\lambda!}$$
$$\overset{\mathtt{9.2},\textbf{Satz-FakRek}}{=} \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(-1+(1+\lambda)))}{(1+\lambda)!}.$$

`11:` Aus `10.1`, aus `9.1` und aus `10.2`
folgt per definitionem E: $1+\lambda \in E$.

Ergo `Thema7`: `A2` | "$\forall\lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1+\lambda \in E$"

`8:` Aus `A1`, aus `5` und aus `A2`
folgt via **Satz - Vollständige Induktion**: $E = \mathbb{N}$.

...

`Thema1` $x \in \mathbb{R}$.

...

`Thema9` $k \in \mathbb{N}$.

`10`: Aus `Thema9` und aus `8` folgt: $k \in E$.

`11`: Aus `10` folgt per definitionem E:

$$\binom{x}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x - (-1+k))}{k!}.$$

Ergo `Thema9`:

$$\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{x}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x - (-1+k))}{k!}.$$

Ergo `Thema1`:

`A3` “$\forall x$:

$$\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{x}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x - (-1+k))}{k!}$$ ”

`2`: Aus `A3` folgt:

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\binom{x}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x - (-1+k))}{k!}.$$

`3`: Via Kapitel “**Fakultät**” gilt: $\forall k : k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

`4`: Aus `2` und aus `3` folgt:

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\binom{x}{k} = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x - (-1+k))}{k!}$$

$$= \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x - (-1+k))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}.$$

$\square$

3.2 $\binom{x}{k} \in \mathbb{R}$

Satz - binom - 1 a)

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{x}{k} \in \mathbb{R}.$$

Beweis

`Thema1` $\quad x \in \mathbb{R}.$

2: $\quad \exists E : E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{\omega} \in \mathbb{R}\right\}.$

3: $\quad \binom{x}{0} \stackrel{(1)}{=} 1.$

4: Aus 3 und aus "$1 \in \mathbb{R}$" folgt: $\quad \binom{x}{0} \in \mathbb{R}.$

5: Aus "0 Menge", aus "$0 \in \mathbb{N}$" und aus 4 folgt per definitionem E: $\quad 0 \in E.$

> `Thema6` $\quad p \in E.$
>
> 7: Aus `Thema6` folgt per definitionem E: $\quad p \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{p} \in \mathbb{R}.$
>
> 8: Aus 7 folgt: $\quad p \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema6`: $\quad \forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}.$

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": $\quad$ A1 | "$E \subseteq \mathbb{N}$"

...

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $x \in \mathbb{R}.$

...

$\boxed{\texttt{Thema7}}$ $\lambda \in E.$

`8:` Aus `Thema7` folgt per definitionem E:

$$\lambda \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{\lambda} \in \mathbb{R}.$$

`9.1:` Aus `8`“$\lambda \in \mathbb{N}$” folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}.$

`9.2:` Aus `Thema1` und aus `8`“$\lambda \in \mathbb{N}$” folgt:

$$\frac{x - \lambda}{1 + \lambda} \in \mathbb{R}.$$

`10.1:` Aus `9.1` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

`10.2:` Aus `8`“$\binom{x}{\lambda} \in \mathbb{R}$” und aus `9.2` folgt: $\binom{x}{\lambda} \cdot \frac{x - \lambda}{1 + \lambda} \in \mathbb{R}.$

`10.3:` Aus `8`“$\lambda \in \mathbb{N}$” folgt via (2): $\binom{x}{1 + \lambda} = \binom{x}{\lambda} \cdot \frac{x - \lambda}{1 + \lambda}.$

`11:` Aus `10.3` und aus `10.2` folgt: $\binom{x}{1 + \lambda} \in \mathbb{R}.$

`12:` Aus `10.1`, aus `9.1` und aus `11`
folgt per definitionem E: $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema7`: `A2` | “$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$”

`8:` Aus `A1`, aus `5` und aus `A2`
folgt via **Satz - Vollständige Induktion**: $E = \mathbb{N}.$

...

`Thema1` $x \in \mathbb{R}.$

...

`Thema9` $k \in \mathbb{N}.$

`10:` Aus `Thema9` und aus `8` folgt: $k \in E.$

`11:` Aus `10` folgt per definitionem E: $\binom{x}{k} \in \mathbb{R}.$

Ergo `Thema9`: $\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{x}{k} \in \mathbb{R}.$

Ergo `Thema1`: `A3` | "$\forall x : \left(\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{x}{k} \in \mathbb{R}\right)$"

`2:` Aus `A3` folgt:

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{x}{k} \in \mathbb{R}.$$

$\square$

3.3 $(1+x-k)\cdot\binom{1+x}{k} = (1+x)\cdot\binom{x}{k}$

Satz - binom - 1 `b)`

$\forall x,k : x\in\mathbb{R}\wedge k\in\mathbb{N} \quad\Rightarrow\quad (1+x-k)\cdot\binom{1+x}{k} = (1+x)\cdot\binom{x}{k}.$

Beweis

`Thema1` $x\in\mathbb{R}.$

`2:` $\exists E : E = \left\{\omega : \omega\in\mathbb{N}\wedge(1+x-\omega)\cdot\binom{1+x}{\omega} = (1+x)\cdot\binom{x}{\omega}\right\}.$

`3.1:` $(1+x-0)\cdot\binom{1+x}{0} \overset{(1)}{=} (1+x)\cdot 1 \overset{\texttt{Thema1}}{=} 1+x.$

`3.2:` $(1+x)\cdot\binom{x}{0} \overset{(1)}{=} (1+x)\cdot 1 \overset{\texttt{Thema1}}{=} 1+x.$

`4:` Aus `3.1` und aus `3.2` folgt: $(1+x-0)\cdot\binom{1+x}{0} = (1+x)\cdot\binom{x}{0}.$

`5:` Aus “0 Menge”, aus “$0\in\mathbb{N}$” und aus `4` folgt per definitionem E: $0\in E.$

> `Thema6` $p\in E.$
>
> `7:` Aus `Thema6` folgt per definitionem E: $p\in\mathbb{N}\wedge(1+x-p)\cdot\binom{1+x}{p} = (1+x)\cdot\binom{x}{p}.$
>
> `8:` Aus `7` folgt: $p\in\mathbb{N}.$

Ergo `Thema6`: $\forall p : p\in E\Rightarrow p\in\mathbb{N}.$

Konsequenz per definitionem “$\subseteq$”: `A1` | “$E\subseteq\mathbb{N}$”

...

`Thema1` $x \in \mathbb{R}$.

...

`Thema7` $\lambda \in E$.

`8:` Aus `Thema7` folgt per definitionem E:

$$\lambda \in \mathbb{N} \wedge (1 + x - \lambda) \cdot \binom{1+x}{\lambda} = (1 + x) \cdot \binom{x}{\lambda}.$$

`9.1:` Aus `8`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}$.

`9.2:` Aus `8` folgt: $\lambda \in \mathbb{N}$.

`9.3:` Aus `8` folgt: $(1 + x - \lambda) \cdot \binom{1+x}{\lambda} = (1 + x) \cdot \binom{x}{\lambda}$.

`10.1:` Aus `9.1` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

`10.2:` $(1 + x - (1 + \lambda)) \cdot \binom{1+x}{1+\lambda}$

$$\stackrel{\text{9.2,(2)}}{=} (1 + x - (1 + \lambda)) \cdot \binom{1+x}{\lambda} \cdot \frac{(1+x)-\lambda}{1+\lambda}$$

$$= (x - \lambda) \cdot \binom{1+x}{\lambda} \cdot \frac{(1+x)-\lambda}{1+\lambda}$$

$$= (1 + x - \lambda) \cdot \binom{1+x}{\lambda} \cdot \frac{x-\lambda}{1+\lambda}$$

$$\stackrel{\text{9.3}}{=} (1 + x) \cdot \binom{x}{\lambda} \cdot \frac{x-\lambda}{1+\lambda}$$

$$\stackrel{\text{9.2,(2)}}{=} (1 + x) \cdot \binom{x}{1+\lambda}.$$

`11:` Aus `10.1`, aus `9.1` und aus `10.2`
folgt per definitionem E: $1 + \lambda \in E$.

Ergo `Thema7`: `A2` | "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$"

`8:` Aus `A1`, aus `5` und aus `A2`
folgt via **Satz - Vollständige Induktion**: $E = \mathbb{N}$.

...

`Thema1` $x \in \mathbb{R}$.

...

`Thema9` $k \in \mathbb{N}$.

`10:` Aus `Thema9` und aus `8` folgt: $k \in E$.

`11:` Aus `10` folgt per definitionem E in `2`:

$$(1 + x - k) \cdot \binom{1 + x}{k} = (1 + x) \cdot \binom{x}{k}.$$

Ergo `Thema9`:

$$\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 + x - k) \cdot \binom{1 + x}{k} = (1 + x) \cdot \binom{x}{k}.$$

Ergo `Thema1`:

`A3` "$\forall x : \left(\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 + x - k) \cdot \binom{1 + x}{k} = (1 + x) \cdot \binom{x}{k}\right)$"

`2:` Aus `A3` folgt:

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 + x - k) \cdot \binom{1 + x}{k} = (1 + x) \cdot \binom{x}{k}.$$

$\square$

3.4 $\binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x+1}{1+k}$

Satz - binom - 1 `c)`

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x+1}{1+k}.$$

Beweis

`Thema1` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` $\exists E : E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \binom{1+x}{1+\omega} = \binom{x}{\omega} \cdot \frac{x+1}{1+\omega}\right\}$.

`3.1:` $\binom{1+x}{1+0} = \binom{1+x}{1} \stackrel{(2)}{=} \binom{1+x}{0} \cdot \frac{(1+x)-0}{1+0} \stackrel{(1)}{=} 1 \cdot \frac{1+x}{1} = 1 \cdot \frac{x+1}{1}$.

`3.2:` $\binom{x}{0} \cdot \frac{x+1}{1+0} \stackrel{(1)}{=} 1 \cdot \frac{x+1}{1}$.

`4:` Aus `3.1` und aus `3.2` folgt: $\binom{1+x}{1+0} = \binom{x}{0} \cdot \frac{x+1}{1+0}$.

`5:` Aus "0 Menge" , aus "$0 \in \mathbb{N}$" und aus `4` folgt per definitionem E: $0 \in E$.

> `Thema6` $p \in E$.
>
> `7:` Aus `Thema6` folgt per definitionem E in `2`: $p \in \mathbb{N} \wedge \binom{1+x}{1+p} = \binom{x}{p} \cdot \frac{x+1}{1+p}$.
>
> `8:` Aus `7` folgt: $p \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema6`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}$.

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$" : `A1` | "$E \subseteq \mathbb{N}$"

...

`Thema1` $x \in \mathbb{R}$.

...

`Thema7` $\lambda \in E$.

`8:` Aus `Thema7` folgt per definitionem E:

$$\lambda \in \mathbb{N} \wedge \binom{1+x}{1+\lambda} = \binom{x}{\lambda} \cdot \frac{x+1}{1+\lambda}.$$

`9.1:` Aus `8`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}$.

`9.2:` Aus `8` folgt: $\lambda \in \mathbb{N}$.

`9.3:` Aus `8` folgt: $\binom{1+x}{1+\lambda} = \binom{x}{\lambda} \cdot \frac{x+1}{1+\lambda}$.

`10.1:` Aus `9.1` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

`10.2:` $\binom{1+x}{1+(1+\lambda)}$

$$\overset{\texttt{9.1},(2)}{=} \binom{1+x}{1+\lambda} \cdot \frac{(1+x)-(1+\lambda)}{1+(1+\lambda)}$$

$$= \binom{1+x}{1+\lambda} \cdot \frac{x-\lambda}{1+(1+\lambda)}$$

$$\overset{\texttt{9.3}}{=} \binom{x}{\lambda} \cdot \frac{x+1}{1+\lambda} \cdot \frac{x-\lambda}{1+(1+\lambda)}$$

$$= \binom{x}{\lambda} \cdot \frac{x-\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{x+1}{1+(1+\lambda)}$$

$$\overset{\texttt{9.2},(2)}{=} \binom{x}{1+\lambda} \cdot \frac{x+1}{1+(1+\lambda)}.$$

`11:` Aus `10.1`, aus `9.1` und aus `10.2` folgt per definitionem E: $1 + \lambda \in E$.

Ergo `Thema7`: `A2` | "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$"

`8:` Aus `A1`, aus `5` und aus `A2` folgt via **Satz - Vollständige Induktion**: $E = \mathbb{N}$.

...

`Thema1` $x \in \mathbb{R}$.

...

`Thema9` $k \in \mathbb{N}$.

`10:` Aus `Thema9` und aus `8` folgt: $k \in E$.

`11:` Aus `10` folgt per definitionem E:

$$\binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x+1}{1+k}.$$

Ergo `Thema9`:

$$\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x+1}{1+k}.$$

Ergo `Thema1`: `A3` | “$\forall x : \left(\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x+1}{1+k} \right)$”

`2:` Aus `A3` folgt:

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad \forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x+1}{1+k}.$$

$\square$

3.5 $\binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{1+k}$

<u>Satz - binom - 1</u> `d)`

$$\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{1+k}.$$

<u>Beweis</u>

`Thema1` $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N}$.

`1.1:` Aus `Thema1`
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x+1}{1+k}$.

`1.2:` Aus `Thema1`"$k \in \mathbb{N}$" folgt: $0 = k - k$.

`1.3:` Aus `Thema1`"$k \in \mathbb{N}$" folgt via (2): $\binom{x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x-k}{1+k}$.

`2.1:` $\binom{1+x}{1+k} \stackrel{1.1}{=} \binom{x}{k} \cdot \frac{x+1}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x+0+1}{1+k} \stackrel{1.2}{=} \binom{x}{k} \cdot \frac{x+(k-k)+1}{1+k}$

$= \binom{x}{k} \cdot \frac{x-k+k+1}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \left(\frac{x-k}{1+k} + \frac{k+1}{1+k}\right)$

$= \binom{x}{k} \cdot \frac{x-k}{1+k} + \binom{x}{k} \cdot \frac{k+1}{1+k} \stackrel{1.3}{=} \binom{x}{1+k} + \binom{x}{k} \cdot \frac{k+1}{1+k} = \binom{x}{1+k} + \binom{x}{k} \cdot \frac{1+k}{1+k}$.

`2.2:` Aus `Thema1` folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\binom{x}{k} \in \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus `Thema1`"$k \in \mathbb{N}$" folgt: $\frac{1+k}{1+k} = 1$.

`3:` Aus `2.2` folgt: $\binom{x}{k} \cdot 1 = \binom{x}{k}$.

`4:` $\binom{1+x}{1+k} \stackrel{2.1}{=} \binom{x}{1+k} + \binom{x}{k} \cdot \frac{1+k}{1+k} \stackrel{2.3}{=} \binom{x}{1+k} + \binom{x}{k} \cdot 1 \stackrel{3}{=} \binom{x}{1+k} + \binom{x}{k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{1+k}$.

Ergo `Thema1`: $\forall x, k : x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{1+x}{1+k} = \binom{x}{k} + \binom{x}{1+k}$.

$\square$

3.6 $\binom{x}{k} = 0$

Satz - binom - 1 e)

$$x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \binom{x}{1+k} = 0.$$

Beweis VS $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{k} = 0$

1: Aus VS“ $k \in \mathbb{N}$” folgt via (2): $\binom{x}{1+k} = \binom{x}{k} \cdot \frac{x-k}{1+k}$.

2: Aus 1 und aus VS“ $\binom{x}{k} = 0$” folgt: $\binom{x}{1+k} = 0 \cdot \frac{x-k}{1+k}$.

3: Aus VS“ $x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N}$” folgt: $\frac{x-k}{1+k} \in \mathbb{R}$.

4: Aus 3 folgt: $0 \cdot \frac{x-k}{1+k} = 0$.

5: Aus 2 und aus 4 folgt: $\binom{x}{1+k} = 0$.

$\square$

4 UE - Binomialkoeffizient

4.1 $\binom{0}{k} = 0$

Satz - binom - $\mathbb{N}$ `a)`

$$1 \leq k \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \binom{0}{k} = 0.$$

Beweis

`1.1:` $\exists l : l = 1.$

`1.2:` $\exists E : E = \left\{\omega : \binom{0}{\omega} = 0\right\}.$

`2.1:` Aus `1.1`"$l = 1$" und aus "$1 \in \mathbb{Z}$" folgt: $l \in \mathbb{Z}.$

`2.2:` Aus "$0 \in \mathbb{N}$" folgt via (2): $\binom{0}{1+0} = \binom{0}{0} \cdot \frac{0-0}{1+0}.$

`3:` $\binom{0}{1} \stackrel{2.2}{=} \binom{0}{0} \cdot \frac{0-0}{10} = \binom{0}{0} \cdot 0 \stackrel{(1)}{=} 1 \cdot 0 = 0.$

`4:` Aus "1 Menge" und aus `3`"$\binom{0}{1} = \ldots = 0$"
folgt via `1.2`"$E = \left\{\omega : \binom{0}{\omega} = 0\right\}$": $1 \in E.$

`5:` Aus `4` und aus `1.1`"$l = 1$" folgt: $l \in E.$

...

`Thema6` $\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda.$

`7.1:` Aus `Thema6`“$\lambda \in E$”
und aus `1.2`“$E = \left\{\omega : \binom{0}{\omega} = 0\right\}$” folgt: $\binom{0}{\lambda} = 0.$

`7.2:` Aus `1.1`“$l = 1$” und aus `Thema6`“$l \leq \lambda$” folgt: $1 \leq \lambda.$

`7.3:` Aus `Thema6`“$\lambda \in \mathbb{Z}$” folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{Z}.$

`8.1:` Aus `7.2` und aus `Thema6`“$\lambda \in \mathbb{Z}$” folgt: $\lambda \in \mathbb{N}.$

`8.2:` Aus `7.3` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

`9:` Aus “$0 \in \mathbb{R}$”, aus `8.1` und aus `7.1`
folgt via **Satz - binom - 1** `e)`: $\binom{0}{1+\lambda} = 0.$

`10:` Aus `8.2` und aus `9` folgt per definitionem E: $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema10`: `A1` | “$\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$”

`7:` Aus `2.1`, aus `5` und aus `A1` folgt via **Satz - vVI**: $\{l, \ldots\} \subseteq E.$

`Thema8` $1 \leq k \in \mathbb{N}.$

`9.1:` Aus `Thema8`“$k \in \mathbb{N}$” folgt: $k \in \mathbb{Z}.$

`9.2:` Aus `Thema8`“$1 \leq k$” und aus `1.1`“$l = 1$” folgt: $l \leq k.$

`10:` Aus `9.2` und aus `9.1` folgt via **Satz - aZ**: $k \in \{l, \ldots\}.$

`11:` Aus `10` und aus `7` folgt: $k \in E.$

`12:` Aus `11` und aus `1.2`“$E = \left\{\omega : \binom{0}{\omega} = 0\right\}$” folgt: $\binom{0}{k} = 0.$

Ergo `Thema8`: $\forall k : 1 \leq k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{0}{k} = 0.$

□

4.2 $\binom{n}{n} = 1$

Satz - binom - $\mathbb{N}$ `b)`

$$\forall n : n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Beweis

`1:` $\exists E : E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \binom{\omega}{\omega} = 1\right\}.$

`2:` Via (1) gilt: $\binom{0}{0} = 1.$

`3:` Aus "0 Menge", aus "$0 \in \mathbb{N}$" und aus `2`
folgt per definitionem E: $0 \in E.$

`Thema4` $p \in E.$

`5:` Aus `Thema4` folgt per definitionem E: $p \in \mathbb{N} \wedge \binom{p}{p} = 1.$

`6:` Aus `5` folgt: $p \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema6`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}.$

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$": `A1` | "$E \subseteq \mathbb{N}$"

...

`Thema5` $\lambda \in E.$

`6:` Aus `Thema5` folgt per definitionem E: $\lambda \in \mathbb{N} \wedge \binom{\lambda}{\lambda} = 1.$

`7.1:` Aus `6`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}.$

`7.2:` Aus `6`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $\lambda \in \mathbb{R}.$

`7.3:` Aus `6`"$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $\frac{1+\lambda}{1+\lambda} = 1.$

`7.4:` Aus `6` folgt: $\binom{\lambda}{\lambda} = 1.$

`8.1:` Aus `7.1` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

`8.2:` Aus `7.2` und aus `6`"$\lambda \in \mathbb{N}$"
folgt via **Satz - binom -1** `c)`: $\binom{1+\lambda}{1+\lambda} = \binom{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\lambda+1}{1+\lambda}.$

`9:` $\binom{1+\lambda}{1+\lambda} \stackrel{8.2}{=} \binom{\lambda}{\lambda} \cdot \frac{\lambda+1}{1+\lambda} \stackrel{7.4}{=} 1 \cdot \frac{\lambda+1}{1+\lambda} = 1 \cdot \frac{1+\lambda}{1+\lambda} \stackrel{7.3}{=} 1 \cdot 1 = 1.$

`10:` Aus `8.1`, aus `7.1` und aus `9`
folgt per definitionem E: $1 + \lambda \in E.$

Ergo `Thema5`: `A2` | "$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$"

`6:` Aus `A1`, aus `3` und aus `A2`
folgt via **Satz - Vollständige Induktion**: $E = \mathbb{N}.$

`Thema7` $n \in \mathbb{N}.$

`8:` Aus `Thema7` und aus `6` folgt: $n \in E.$

`9:` Aus `8` folgt per definitionem E: $\binom{n}{n} = 1.$

Ergo `Thema7`: $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{n}{n} = 1.$

$\square$

4.3 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Satz - binom - $\mathbb{N}$ `c)`

$$n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq n \qquad \Rightarrow \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Beweis

`Thema1` $k \in \mathbb{N}$.

`1.1:` $\exists l : l = k$.

`1.2:` $\exists E : E = \left\{\omega : \binom{\omega}{k} = \frac{\omega!}{k! \cdot (\omega - k)!}\right\}$.

`1.3:` Aus `Thema1` folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\binom{k}{k} = 1$.

`1.4:` Aus `Thema1` folgt via **Satz - Fak - 1**: $1 \leq k! \in \mathbb{N}$.

`1.5:` Aus `Thema1` folgt: k Menge.

`1.6:` Aus `1.1`“$l = k$” und aus `Thema1` folgt: $l \in \mathbb{N}$.

`2.1:` Aus `1.4` folgt: $\frac{k!}{k!} = 1$.

`2.2:` Aus `1.6` folgt: $l \in \mathbb{Z}$.

`3:` $\frac{k!}{k!\cdot(k-k)!} = \frac{k!}{k!\cdot 0!} = \frac{k!}{k!\cdot 1} = \frac{k!}{k!} \overset{2.1}{=} 1$.

`4:` Aus `1.3` und aus `3` folgt: $\binom{k}{k} = \frac{k!}{k!\cdot(k-k)!}$.

`5:` Aus `1.5`, aus `4` und aus `1.2`“$E = \left\{\omega : \binom{\omega}{k} = \frac{\omega!}{k!\cdot(\omega-k)!}\right\}$” folgt: $k \in E$.

`6:` Aus `1.1`“$l = k$” und aus `5` folgt: $l \in E$.

...

`Thema1` $k \in \mathbb{N}$.

...

`Thema7` $\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda$.

`8.1:` Aus `Thema7`“$\lambda \in \mathbb{Z}$” folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{Z}$.

`8.2:` Aus `Thema7`“$\lambda \in E$”
und aus `1.2`“: $E = \left\{\omega : \binom{\omega}{k} = \frac{\omega!}{k! \cdot (\omega - k)!}\right\}$” folgt:
$\binom{\lambda}{k} = \frac{\lambda!}{k! \cdot (\lambda - k)!}$.

`8.3:` Aus `1.6`, aus `Thema7`“$l \leq \lambda$” und aus `Thema7`“$\lambda \in \mathbb{Z}$”
folgt: $\lambda \in \mathbb{N}$.

`8.4:` Aus `Thema7`“$\lambda \in \mathbb{Z}$” folgt: $\lambda \in \mathbb{R}$.

`8.5:` Aus `8.1` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

`9.1:` Aus `8.4` und aus `Thema1`
folgt via **Satz - binom - 1** `b)`:
$(1 + \lambda - k) \cdot \binom{1+\lambda}{k} = (1 + \lambda) \cdot \binom{\lambda}{k}$.

`9.2:` Aus `8.3` folgt via **Satz - FakRek**: $(1 + \lambda)! = (1 + \lambda) \cdot \lambda!$.

`9.3:` Aus `Thema7`“$l \leq \lambda$” und aus `2.2` folgt: $0 \leq \lambda - l$.

`9.4:` Aus `Thema7`“$\lambda \in \mathbb{Z}$” und aus `2.2` folgt: $\lambda - l \in \mathbb{Z}$.

`9.5:` Aus `8.4` folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{R}$.

`10.1:` Aus `9.4` und aus `9.3` folgt: $\lambda - l \in \mathbb{N}$.

`10.2:` Aus `9.5` und aus `Thema1`
folgt via **Satz - binom - 1** `a)`: $\binom{1+\lambda}{k} \in \mathbb{R}$.

`11.1:` Aus `10.1` und aus `1.1`“$l = k$” folgt: $\lambda - k \in \mathbb{N}$.

`11.2:` Aus `10.2` folgt: $1 \cdot \binom{1+\lambda}{k} = \binom{1+\lambda}{k}$.

...

`Thema1` $k \in \mathbb{N}$.

...

`Thema7` $\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda$.

...

`12.1`: Aus `11.1` folgt: $\frac{1+\lambda-k}{1+\lambda-k} = 1$.

`12.2`: Aus `11.1` folgt via **Satz - FakRek**:
$$(1+\lambda-k)! = (1+\lambda-k)\cdot(\lambda-k)!.$$

`13`: $\binom{1+\lambda}{k} \overset{11.2}{=} 1 \cdot \binom{1+\lambda}{k} \overset{12.1}{=} \frac{1+\lambda-k}{1+\lambda-k} \cdot \binom{1+\lambda}{k}$

$= \frac{1}{1+\lambda-k} \cdot \left((1+\lambda-k)\cdot\binom{1+\lambda}{k}\right) \overset{9.1}{=} \frac{1}{1+\lambda-k} \cdot \left((1+\lambda)\cdot\binom{\lambda}{k}\right)$

$= \frac{1+\lambda}{1+\lambda-k} \cdot \binom{\lambda}{k} \overset{8.2}{=} \frac{1+\lambda}{1+\lambda-k} \cdot \frac{\lambda!}{k!\cdot(\lambda-k)!} = \frac{(1+\lambda)\cdot\lambda!}{(1+\lambda-k)\cdot k!\cdot(\lambda-k)!}$

$\overset{9.2}{=} \frac{(1+\lambda)!}{(1+\lambda-k)\cdot k!\cdot(\lambda-k)!} = \frac{(1+\lambda)!}{k!\cdot(1+\lambda-k)\cdot(\lambda-k)!} \overset{12.2}{=} \frac{(1+\lambda)!}{k!\cdot(1+\lambda-k)!}$.

`14`: Aus `8.5` und aus `13`
folgt per definitionem E: $1+\lambda \in E$.

Ergo `Thema7`: `A1` | "$\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1+\lambda \in E$"

`8`: Aus `2.2`, aus `6` und aus `A1`
folgt via **Satz - vVI**: $\{l, \ldots\} \subseteq E$.

...

`Thema1` $k \in \mathbb{N}$.

...

`Thema9` $n \in \mathbb{N} \wedge k \leq n$.

`10.1:` Aus `Thema9`"$n \in \mathbb{N}$" folgt: $n \in \mathbb{Z}$.

`10.2:` Aus `Thema9`"$k \leq n$" und aus `1.1`"$l = k$" folgt: $l \leq n$.

`11:` Aus `10.2` und aus `10.1` folgt via **Satz - aZ**: $n \in \{l, \ldots\}$.

`12:` Aus `11` und aus `8` folgt: $n \in E$.

`13:` Aus `12`
und aus `1.2`"$E = \left\{\omega : \binom{\omega}{k} = \frac{\omega!}{k! \cdot (\omega-k)!}\right\}$" folgt:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Ergo `Thema9`: $\forall n : (n \in \mathbb{N} \wedge k \leq n) \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Ergo `Thema1`: $\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\forall n : (n \in \mathbb{N} \wedge k \leq n) \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\right)$.

Konsequenz: $\forall n, k : (n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq n) \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

$\square$

4.4 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Satz - binom - $\mathbb{N}$ `d)`

$$n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq n \qquad \Rightarrow \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Beweis VS $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \leq n$.

`1.1:` Aus VS folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

`1.2:` Aus VS folgt: $n - k \in \mathbb{N}$.

`1.3:` Aus VS folgt: $n - k \leq n$.

`1.4:` Aus VS"$k \in \mathbb{N}$" folgt: $k = 0 + k$.

`1.5:` Aus VS"$n \in \mathbb{N}$" folgt: $n - n = 0$.

`2.1:` Aus VS"$n \in \mathbb{N}$", aus `1.2` und aus `1.3` folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!}$.

`2.2:` $k \stackrel{1.4}{=} 0 + k \stackrel{1.5}{=} (n - n) + k = n - n + k = n - (n - k)$.

`3:` Aus `2.2` folgt: $k = n - (n - k)$.

`4:` $\binom{n}{k} \stackrel{1.1}{=} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \stackrel{3}{=} \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} \stackrel{2.1}{=} \binom{n}{n-k}$.

$\square$

4.5 $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

Satz - binom - $\mathbb{N}$ `e)`

$$n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Beweis

`1:` $\exists E : E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{\omega}{\nu} \in \mathbb{N}\right\}.$

`Thema2` $p \in E.$

`3:` Aus `Thema2` und aus `1` "$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{\omega}{\nu} \in \mathbb{N}\right\}$" folgt: $p \in \mathbb{N} \wedge \forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{p}{\nu} \in \mathbb{N}.$

`4:` Aus `3` folgt: $p \in \mathbb{N}.$

Ergo `Thema2`: $\forall p : p \in E \Rightarrow p \in \mathbb{N}.$

Konsequenz per definitionem "$\subseteq$" : `A1` | "$E \subseteq \mathbb{N}$"

...

`Thema3` $\nu \in \mathbb{N}$.

4: Aus `Thema3` folgt: $\nu = 0 \vee 1 \leq \nu$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\nu = 0$.

5: Aus `4.1.Fall` folgt: $\binom{0}{\nu} = \binom{0}{0} \stackrel{(1)}{=} 1$.

6: Aus 5 und aus "$1 \in \mathbb{N}$" folgt: $\binom{0}{\nu} \in \mathbb{N}$.

`4.2.Fall` $1 \leq \nu$.

5: Aus `4.2.Fall` und aus `Thema3` folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\binom{0}{\nu} = 0$.

6: Aus 5 und aus "$0 \in \mathbb{N}$" folgt: $\binom{0}{\nu} \in \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\binom{0}{\nu} \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema3`: `A2` "$\forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{0}{\nu} \in \mathbb{N}$."

4: Aus "0 Menge", aus "$0 \in \mathbb{N}$", aus `A2` und aus 1 "$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{\omega}{\nu} \in \mathbb{N}\right\}$" folgt: $0 \in E$.

...

`Thema5` $\lambda \in E$.

`6:` Aus `Thema5` und aus `1` "$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{\omega}{\nu} \in \mathbb{N}\right\}$" folgt: $\lambda \in \mathbb{N} \wedge \forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{\lambda}{\nu} \in \mathbb{N}$.

`Thema7` $\mu \in \mathbb{N}$.

`8:` Aus `Thema7` folgt: $\mu = 0 \vee 1 \leq \mu$.

`Fallunterscheidung`

`8.1.Fall` $\mu = 0$.

`9:` Aus `8.1.Fall` folgt: $\binom{1+\lambda}{\mu} = \binom{1+\lambda}{0} \stackrel{(1)}{=} 1$.

`10:` Aus `9` und aus "$1 \in \mathbb{N}$" folgt: $\binom{1+\lambda}{\mu} \in \mathbb{N}$.

`8.2.Fall` $1 \leq \mu$.

`9.1:` Aus `8.2.Fall` und aus `Thema7` folgt: $\exists \eta : \eta \in \mathbb{N} \wedge \mu = 1 + \eta$.

`9.2:` Aus `6` "$\lambda \in \mathbb{N}$" folgt: $\lambda \in \mathbb{R}$.

`10.1:` Aus `9.2` und aus `9.1` "$\eta \in \mathbb{N}$" folgt via **Satz - binom - 1** `d)`: $\binom{1+\lambda}{1+\eta} = \binom{\lambda}{\eta} + \binom{\lambda}{1+\eta}$.

`10.2:` Aus `9.1` "$\eta \in \mathbb{N}$" folgt: $1 + \eta \in \mathbb{N}$.

`10.3:` Aus `9.1` "$\eta \in \mathbb{N}$" und aus `6` "$\forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{\lambda}{\nu} \in \mathbb{N}$" folgt: $\binom{\lambda}{\eta} \in \mathbb{N}$.

`11:` Aus `10.2` "$1 + \eta \in \mathbb{N}$" und aus `6` "$\forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{\lambda}{\nu} \in \mathbb{N}$" folgt: $\binom{\lambda}{1+\eta} \in \mathbb{N}$.

`12:` Aus `10.3` und aus `11` folgt: $\binom{\lambda}{\eta} + \binom{\lambda}{1+\eta} \in \mathbb{N}$.

`13:` Aus `10.1` und aus `12` folgt: $\binom{1+\lambda}{1+\eta} \in \mathbb{N}$.

`14:` Aus `13` und aus `9.1` "$\mu = 1 + \eta$" folgt: $\binom{1+\lambda}{\mu} \in \mathbb{N}$.

`Ende Fallunterscheidung`

In beiden Fällen gilt: $\binom{1+\lambda}{\mu} \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema7`: `A3` | "$\forall \mu : \mu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{1+\lambda}{\mu} \in \mathbb{N}$"

...

`Thema5` $\lambda \in E$.

...

`8`: Aus `6`“ $\lambda \in \mathbb{N}$ ” folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{N}$.

`9`: Aus `8` folgt: $1 + \lambda$ Menge.

`10`: Aus `9`, aus `8` und aus `A3` folgt per definitionem E: $1 + \lambda \in E$.

Ergo `Thema5`: `A4` | “$\forall \lambda : \lambda \in E \Rightarrow 1 + \lambda \in E$”

`6`: Aus `A1`, aus `4` und aus `A4` folgt via **Satz - Vollständige Induktion**: $E = \mathbb{N}$.

`Thema7` $n \in \mathbb{N}$.

`8`: Aus `Thema7` und aus `6` folgt: $n \in E$.

`9`: Aus `8` und aus `1`“$E = \left\{\omega : \omega \in \mathbb{N} \wedge \forall \nu : \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{\omega}{\nu} \in \mathbb{N}\right\}$” folgt: $\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema7`: $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\forall k : k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{n}{k} \in \mathbb{N}\right)$.

Konsequenz: $\forall n, k : n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

$\square$

4.6 $\binom{n}{k} = 0$ - A posteriori

Satz - binom - $\mathbb{N}$ `f)`

$$n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge n < k \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{k} = 0.$$

Beweis

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $n \in \mathbb{N}$.

`2.1:` $\exists l : l = 1 + n$.

`2.2:` $\exists E : E = \{\omega : \binom{n}{\omega} = 0\}$.

`2.3:` Aus `Thema1` folgt: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`2.4:` Aus `Thema1` folgt: $n \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.3` folgt: $1 + n \in \mathbb{Z}$.

`3.2:` Aus `Thema1` folgt via (2): $\binom{n}{1+n} = \binom{n}{n} \cdot \frac{n-n}{1+n}$.

`3.3:` Aus `2.4` folgt: $n - n = 0$.

`4.1:` Aus `2.1`"$l = 1 + n$" und aus `3.1` folgt: $l \in \mathbb{Z}$.

`4.2:` Aus `Thema1` folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\binom{n}{n} = 1$.

`4.3:` Aus `3.1` folgt: $1 + n \in \mathbb{R}$.

`4.4:` Aus `3.1` folgt: $1 + n$ Menge.

`5:` Aus `4.3` folgt: $\frac{0}{1+n} = 0$.

`6:` $\binom{n}{1+n} \stackrel{3.2}{=} \binom{n}{n} \cdot \frac{n-n}{1+n} \stackrel{4.2}{=} 1 \cdot \frac{n-n}{1+n} \stackrel{3.3}{=} 1 \cdot \frac{0}{1+n} \stackrel{5}{=} 1 \cdot 0 = 0$.

...

`Thema1` $n \in \mathbb{N}$.

...

`7:` Aus `4.4`, aus `6`"$\binom{n}{1+n} = \ldots = 0$"
und aus `2.2`"$E = \left\{\omega : \binom{n}{\omega} = 0\right\}$" folgt: $1 + n \in E$.

`8:` Aus `2.1`"$l = 1 + n$" und aus `7` folgt: $l \in E$.

> `Thema9` $\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda$.
>
> `10.1:` Aus `Thema9`"$\lambda \in \mathbb{Z}$" folgt: $1 + \lambda \in \mathbb{Z}$.
>
> `10.2:` Aus `Thema9`"$\lambda \in E$"
> und aus `2.2`"$E = \left\{\omega : \binom{n}{\omega} = 0\right\}$" folgt:
> $\binom{n}{\lambda} = 0$.
>
> `10.3:` Aus `Thema9`"$l \leq \lambda$" und aus `2.1`"$l = 1 + n$"
> folgt: $1 + n \leq \lambda$.
>
> `11.1:` Aus `10.1` folgt: $1 + \lambda$ Menge.
>
> `11.2:` Aus `2.3`, aus `10.3` und aus `Thema9`"$\lambda \in \mathbb{Z}$"
> folgt: $\lambda \in \mathbb{N}$.
>
> `12:` Aus `2.4`, aus `11.2` und aus `10.2`
> folgt via **Satz - binom - 1** `e)`: $\binom{n}{1+\lambda} = 0$.
>
> `13:` Aus `11.1` und aus `12`
> folgt per definitionem E: $1 + \lambda \in E$.

Ergo `Thema9`: `A1` | "$\forall \lambda : (\lambda \in \mathbb{Z} \wedge \lambda \in E \wedge l \leq \lambda) \Rightarrow 1 + \lambda \in E$"

`10:` Aus `4.1`, aus `8` und aus `A1` folgt via **Satz - vVI**: $\{l, \ldots\} \subseteq E$.

...

`Thema1` $n \in \mathbb{N}$.

...

`Thema11` $k \in \mathbb{N} \wedge n < k$.

`12.1:` Aus `Thema11`"$k \in \mathbb{N}$" folgt: $k \in \mathbb{Z}$.

`12.2:` Aus `Thema1`"$n \in \mathbb{N}$", aus `Thema11`"$k \in \mathbb{N}$" und aus `Thema11`"$n < k$" folgt: $1 + n \leq k$.

`13:` Aus `12.2` und aus `2.1`"$l = 1 + n$" folgt: $l \leq k$.

`14:` Aus `13` und aus `12.1` folgt via **Satz - aZ**: $k \in \{l, \ldots\}$.

`15:` Aus `14` und aus `10` folgt: $k \in E$.

`16:` Aus `15` und aus `2.1`"$E = \left\{\omega : \binom{n}{\omega} = 0\right\}$" folgt: $\binom{n}{k} = 0$.

Ergo `Thema11`: $\forall k : k \in \mathbb{N} \wedge n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$.

Ergo `Thema1`: $\forall n : n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\forall k : k \in \mathbb{N} \wedge n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0\right)$.

Konsequenz: $\forall n, k : n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge n < k \Rightarrow \binom{n}{k} = 0$.

$\square$

4.7 $1 \le \binom{n}{k}$

<u>Satz - binom - $\mathbb{N}$ - 1+</u>

a) $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \le n \quad \Rightarrow \quad 1 \le \binom{n}{k}$.

b) $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge 1 \le \binom{n}{k} \quad \Rightarrow \quad k \le n$.

<u>Beweis</u> a) VS $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge k \le n$

INDIREKT.

1: Via **Satz - binom - 2** a) gilt: $(x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \binom{x}{k} = 0) \Rightarrow x < k$.

2: Aus 1 folgt: $(x \notin \mathbb{R}) \vee (k \notin \mathbb{N}) \vee (\binom{x}{k} \neq 0) \vee (x < k)$.

3: Aus 2 folgt: $(n \notin \mathbb{R}) \vee (k \notin \mathbb{N}) \vee (\binom{n}{k} \neq 0) \vee (n < k)$.

4: Aus 2 und aus VS"$k \in \mathbb{N}$" folgt: $(n \notin \mathbb{R}) \vee (\binom{n}{k} \neq 0) \vee (n < k)$.

5: Aus VS"$k \le n$" folgt: $\neg(n < k)$.

6: Aus 4 und aus 5 folgt: $(n \notin \mathbb{R}) \vee (\binom{n}{k} \neq 0)$.

7: Aus VS"$n \in \mathbb{N}$" folgt: $n \in \mathbb{R}$.

8: Aus 6 und aus 7 folgt: $\binom{n}{k} \neq 0$.

9: Aus VS"$n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}$" folgt via **Satz - binom - $\mathbb{N}$** e): $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

10: Aus 9 und aus 8 folgt: $1 \le \binom{n}{k}$.

<u>Beweis</u> `b)` VS $n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \binom{n}{k}$

INDIREKT.

`1:` Via **Satz - binom -** $\mathbb{N}$ `f)` gilt: $(n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge n < k) \Rightarrow \binom{n}{k} = 0.$

`2:` Aus `1` folgt: $(n \notin \mathbb{N}) \vee (k \notin \mathbb{N}) \vee (\neg(n < k)) \vee (\binom{n}{k} = 0).$

`3:` Aus VS"$n \in \mathbb{N}$" und aus `2` folgt: $(k \notin \mathbb{N}) \vee (\neg(n < k)) \vee (\binom{n}{k} = 0).$

`4:` Aus VS"$k \in \mathbb{N}$" und aus `3` folgt: $(\neg(n < k)) \vee (\binom{n}{k} = 0).$

`5:` Aus `VS` gleich "$1 \leq \binom{n}{k}$" folgt: $\binom{n}{k} \neq 0.$

`6:` Aus `4` und aus `5` folgt: $\neg(n < k).$

`7:` Aus VS"$n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}$" folgt: $(n < k) \vee (k \leq n).$

`8:` Aus `6` und aus `7` folgt: $k \leq n.$

$\square$