# Komplexe Zahlen

Andreas Unterreiter

16. August 2020

## Inhaltsverzeichnis



## 1 Vorstellung

$\mathbb{C}$ ist die Menge aller komplexen Zahlen. Es gilt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl. So sind etwa $0, 1, 2, e, \sqrt{2}, \pi$ komplexes Zahlen. In Kurzform: $0, 1, 2, e, \sqrt{2}, \pi \in \mathbb{C}$. Es gibt unendlich viele komplexe Zahlen, die *keine* reellen Zahlen sind. Also gilt $\mathbb{C} \not\subseteq \mathbb{R}$ und somit $\mathbb{R} \neq \mathbb{C}$. Die bekannteste komplexe Zahl, die *keine* reelle Zahl ist, ist die imaginäre Einheit

$$\mathsf{i}.$$

Es gilt $\mathsf{i} \notin \mathbb{R}$, $\mathsf{i} \in \mathbb{C}$. Weder $+\infty$ noch $-\infty$ noch $\mathsf{nan}$ sind komplexe Zahlen.

⋆

Von komplexen *Zahlen* zu sprechen leitet sich vermutlich aus der Möglichkeit ab, mit komplexen Zahlen ähnlich wie mit reellen Zahlen *rechnen* zu können. Die komplexe Arithmetik beruht auf folgenden Aussagen.

Komplexer Vorzeichenwechsel. Für reelle Zahlen stimmt der komplexe Vorzeichenwechsel mit dem reellen Vorzeichenwechsel überein. Ist $z$ eine komplexe Zahl, so wird das Ergebnis des Vorzeichenwechsels ähnlich wie im Reellen mit $-z$ bezeichnet. Es gilt

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow -z \in \mathbb{C} \wedge -(-z) = z.$$

Komplexer Reziprokwert. Für reelle Zahlen stimmt der komplexe Reziprokwert mit dem reellen Reziprokwert überein. Ist $z$ eine komplexe Zahl, so wird der Reziprokwert ähnlich wi im Reellen mit $\frac{1}{z}$ oder $1/z$ beheichnet. Es gilt

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{C} \wedge \frac{1}{\frac{1}{z}} = z.$$

Kompexe Addition. Für reelle Zahlen stimmt die komplexe Addition mit der reellen Addition überein. Sind $z, w$ komplexe Zahlen, so wird die komplexe Summe - also das Ergebnis der komplexen Addition - von $z$ und $w$ ähnlich wie im Reellen mit $z + w$ bezeichnet. Es gilt

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow z + w \in \mathbb{C} \wedge z + w = w + z,$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow z + 0 = 0 + z = z \wedge z + (-z) = (-z) + z = 0,$$

$$\forall z, w, u : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \wedge u \in \mathbb{C} \Rightarrow z + (w + u) = (z + w) + u.$$

Komplexe Subtraktion. Für reelle Zahlen stimmt die komplexe Subtraktion mit der reellen Subtraktion überein. Sind $z, w$ komplexe Zahlen, so wird deren komplexe Differenz - also das Ergebnis der komplexen Subtraktion - ähnlich wie im Reellen mit $z - w$ bezeichnet. Es gilt

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow z - w \in C \wedge z - w = z + (-w) \wedge z - w = -(w - z),$$

$$\forall z, w, u : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \wedge u \in \mathbb{C} \Rightarrow z - (w - u) = (z - w) + u,$$

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow -(z + w) = -z - w \wedge -(z + w) = (-z) + (-w),$$

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow -(z - w) = w - z.$$

komplexe Multiplikation. Für reelle Zahlen stimmt die komplexe Multiplikation mit der reellen Multiplikation überein. Sind $z, w$ komplexe Zahlen, so wird das komplexe Produkt - also das Ergebnis der komplexen Multliplikation - von $z$ und $w$ ähnlich wie im Reellen mit $z \cdot w$ bezeichnet. Es gilt

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot w \in \mathbb{C} \wedge z \cdot w = w \cdot z,$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot 1 = 1 \cdot z = z \wedge z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0,$$

$$\forall z : 0 \neq z \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1,$$

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow (-z) \cdot (-w) = z \cdot w \wedge -z \cdot w = (-z) \cdot w = z \cdot (-w).$$

$$\forall z, w, u : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \wedge u \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot (w \cdot u) = (z \cdot w) \cdot u \wedge z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u,$$

wobei in der komplexen Arithmetik wie im Reellen die Regel "Punktrechnung vor Strichrechnung" gilt. Das vermutlich bekanntteste Produkt komplexer Zahlen ist

$$\mathsf{i} \cdot \mathsf{i} = -1.$$

kompexe Division. Für reelle Zahlen stimmt die komplexe Division mit der reellen Division überein. Sind $z, w$ komplexe Zahlen, so wird der komplexe Quotient - also das Ergebnis der komplexen Division - von $z$ und $w$ ähnlich wie im Reellen mit $\frac{z}{w}$ oder $z/w$ bezeichnet. Es gilt

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{z}{w} \in \mathbb{C} \wedge \frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{1}{w} \cdot z,$$

$$\forall z : 0 \neq z \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{z}{z} = 1,$$

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{\frac{z}{w}} = \frac{w}{z} \wedge \frac{1}{z \cdot w} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{w},$$

$$\forall z, w, u, v : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \wedge u \in \mathbb{C} \wedge v \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{z}{w} \cdot \frac{u}{v} = \frac{z \cdot u}{w \cdot v} \wedge \frac{\frac{z}{w}}{\frac{u}{v}} = \frac{z \cdot v}{w \cdot u},$$

und es gilt die Kürzungsregel,

$$\forall z, w, u : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \wedge 0 \neq u \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{u \cdot z}{u \cdot w} = \frac{z}{w} = \frac{z \cdot u}{w \cdot u},$$

und die mathematisch äquivalente Erweiterungsregel

$$\forall z, w, u : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \wedge 0 \neq u \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{u \cdot z}{u \cdot w} = \frac{z \cdot u}{w \cdot u}.$$

# 2 Realteil und Imaginärteil

$\mathbb{C}$ kann in kanonischer Weise bijektiv auf $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden. Diese kanonische Bijektion wird hier mit `reim` bezeichnet. Es gilt

$$\texttt{reim} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{bijektiv.}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ ist $\texttt{reim}(x)$ ein geordnetes Paar $(a, b)$ reeller Zahlen. Sowohl die erste als auch zweite Koordinate hängen von $z$ ab, so dass man

$$\texttt{reim}(z) = (\texttt{reim}_1(z), \texttt{reim}_2(z)),$$

schreiben kann, wobei

$$\texttt{reim}_{1,2} : \mathbb{C} \to \mathbb{R},$$

reell*wertige* Funktionen sind. $\mathtt{reim}_1$ ist die Realteilfunktion und wird mit $\mathsf{Re}$ bezeichnet. $\mathtt{reim}_2$ ist die Imaginärteilfunktion und wird mit $\mathsf{Im}$ bezeichnet. Es gilt also

$$\mathtt{reim} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad \mathtt{reim}(z) = (\mathsf{Re}z, \mathsf{Im}z).$$

Auch gilt

$$\mathsf{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R},$$

und

$$\mathsf{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}.$$

Trotz ihres Namens ist die die Imaginärteilfunktion reellwertig. Der kanaonische Charakter von $\mathtt{reim}$ wird sichtbar, wenn die Umkehrfunktion

$$\mathtt{reim}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C},$$

betrachtet wird. $\mathtt{reim}^{-1}$ ordnet jedem geordneten Paar $(a, b)$ reeller Zahlen eine komplexe Zahl. Dies geschieht in - eben - kanonischer Weise via

$$\forall a, b : (a, b) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathtt{reim}^{-1}((a, b)) = a + \mathsf{i} \cdot b.$$

Hier sind mit $+$ und $\cdot$ die komplexen arithmetischen Operationen gemeint. Es gilt

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = (\mathsf{Re}z) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}z),$$

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \wedge \mathsf{Re}z = \mathsf{Re}w \wedge \mathsf{Im}z = \mathsf{Im}w \Rightarrow z = w.$$

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathsf{Re}x = x \wedge \mathsf{Im}x = 0,$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \wedge \mathsf{Im}z = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \wedge \mathsf{Re}z = z,$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathsf{Re}(\mathsf{Re}z) = \mathsf{Re}z \wedge \mathsf{Im}(\mathsf{Re}z) = 0,$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathsf{Re}(\mathsf{Im}z) = \mathsf{Im}z \wedge \mathsf{Im}(\mathsf{Im}z) = 0.$$

Bezüglich komplexer Arithmetik gilt

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{Re}(-z) = -\mathsf{Re}z \quad \wedge \quad \mathsf{Im}(-z) = -\mathsf{Im}z,$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{Re}(1/z) = \frac{\mathsf{Re}z}{(\mathsf{Re}z)^2 + (\mathsf{Im}z)^2} \quad \wedge \quad \mathsf{Im}(1/z) = \frac{-\mathsf{Im}z}{(\mathsf{Re}z)^2 + (\mathsf{Im}z)^2},$$

$$\begin{aligned} &\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \\ &\qquad \Rightarrow \quad \mathsf{Re}(z + w) = (\mathsf{Re}z) + (\mathsf{Re}w) \quad \wedge \quad \mathsf{Im}(z + w) = (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \\ &\qquad \Rightarrow \quad \mathsf{Re}(z - w) = (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Re}w) \quad \wedge \quad \mathsf{Im}(z - w) = (\mathsf{Im}z) - (\mathsf{Im}w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall z,w: z\in\mathbb{C}\land w\in\mathbb{C}\\ &\Rightarrow\quad \mathsf{Re}(z\cdot w)=(\mathsf{Re}z)\cdot(\mathsf{Re}w)-(\mathsf{Im}z)\cdot(\mathsf{Im}w)\\ &\qquad\qquad\land\quad \mathsf{Im}(z\cdot w)=(\mathsf{Re}z)\cdot(\mathsf{Im}w)+(\mathsf{Im}z)\cdot(\mathsf{Re}w).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall z,w: z\in\mathbb{C}\land w\in\mathbb{C}\\ &\Rightarrow\quad \mathsf{Re}(z/w)=\frac{(\mathsf{Re}z)\cdot(\mathsf{Re}w)+(\mathsf{Im}z)\cdot(\mathsf{Im}w)}{(\mathsf{Re}z)^2+(\mathsf{Im}z)^2},\\ &\qquad\qquad\land\quad \mathsf{Im}(z/w)=\frac{-(\mathsf{Re}z)\cdot(\mathsf{Im}w)+(\mathsf{Im}z)\cdot(\mathsf{Re}w)}{(\mathsf{Re}z)^2+(\mathsf{Im}z)^2}.\end{aligned}$$

⋆

Für praktische Rechnungen empfiehlt es sich, mit komplexen Zahlen der Form $a+\mathsf{i}\cdot b$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ zu hantieren. Wegen

$$\texttt{reim}^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}\quad\text{bijektiv},$$

gibt es zu jeder komplexen Zahl $z$ *genau ein* geordnetes Paar $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ mit $z=a+\mathsf{i}\cdot b$ und für jedes geordnete Paar $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ist $a+\mathsf{i}\cdot b$ eine komplexe Zahl. Darüber hinaus gilt

$$\forall a,b: a\in\mathbb{R}\land b\in\mathbb{R}\quad\Rightarrow\quad \mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)=a\quad\land\quad\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)=b,$$

so dass sich etwa aus

$$1=1+\mathsf{i}\cdot 0\quad\land\quad\mathsf{i}=0+\mathsf{i}\cdot 1,$$

und $0,1\in\mathbb{R}$ die Aussagen

$$\mathsf{Re}1=1\quad\land\quad\mathsf{Im}1=0,$$

$$\mathsf{Im}\mathsf{i}=0\quad\land\quad\mathsf{Im}\mathsf{i}=1,$$

ergeben. In Anwendung komplexer Rechenregeln ergeben sich folgende Aussagen.

$$\begin{aligned}\forall a,b: a\in\mathbb{R}\land b\in\mathbb{R}\quad&\Rightarrow\quad -(a+\mathsf{i}\cdot b)=(-a)+\mathsf{i}\cdot(-b)=-a-\mathsf{i}\cdot b\\ &\land\quad \mathsf{Re}(-(a+\mathsf{i}\cdot b))=-a\quad\land\quad\mathsf{Im}(-(a+\mathsf{i}\cdot b))=-b,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall a,b: a\in\mathbb{R}\land b\in\mathbb{R}\quad&\Rightarrow\quad \frac{1}{a+\mathsf{i}\cdot b}=\frac{a}{a^2+b^2}-\mathsf{i}\cdot\frac{b}{a^2+b^2}\\ &\land\quad \mathsf{Re}\left(\frac{1}{a+\mathsf{i}\cdot b}\right)=\frac{a}{a^2+b^2}\quad\land\quad\mathsf{Im}\left(\frac{1}{a+\mathsf{i}\cdot b}\right)=\frac{-b}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

beispielsweise
$$\frac{1}{\mathsf{i}} = -\mathsf{i},$$

$$\begin{aligned} &\forall a,b,c,d : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \\ &\qquad (a+\mathsf{i}\cdot b)+(c+\mathsf{i}\cdot d) = (a+c)+\mathsf{i}\cdot(b+d) \\ &\wedge \quad \mathsf{Re}((a+\mathsf{i}\cdot b)+(c+\mathsf{i}\cdot d)) = a+c \quad \wedge \quad \mathsf{Im}((a+\mathsf{i}\cdot b)+(c+\mathsf{i}\cdot d)) = b+d, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall a,b,c,d : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \\ &\qquad (a+\mathsf{i}\cdot b)-(c+\mathsf{i}\cdot d) = (a-c)+\mathsf{i}\cdot(b-d) \\ &\wedge \quad \mathsf{Re}((a+\mathsf{i}\cdot b)-(c+\mathsf{i}\cdot d)) = a-c \quad \wedge \quad \mathsf{Im}((a+\mathsf{i}\cdot b)-(c+\mathsf{i}\cdot d)) = b-d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall a,b,c,d : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \\ &\qquad (a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d) = (a\cdot c-b\cdot d)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot d+b\cdot c) \\ &\wedge \quad \mathsf{Re}((a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d)) = a\cdot c-b\cdot d \quad \wedge \quad \mathsf{Im}((a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d)) = a\cdot d+b\cdot c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\forall a,b,c,d : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \\ &\qquad \frac{a+\mathsf{i}\cdot b}{c+\mathsf{i}\cdot d} = \frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2} + \mathsf{i}\cdot\frac{-a\cdot d+b\cdot c}{c^2+d^2} \\ &\wedge \quad \mathsf{Re}\left(\frac{a+\mathsf{i}\cdot b}{c+\mathsf{i}\cdot d}\right) = \frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2} \quad \wedge \quad \mathsf{Im}\left(\frac{a+\mathsf{i}\cdot b}{c+\mathsf{i}\cdot d}\right) = \frac{-a\cdot d+b\cdot c}{c^2+d^2}. \end{aligned}$$

⋆

Es gilt
$$\mathsf{i}^0 = 1, \quad \mathsf{i}^1 = \mathsf{i}, \quad \mathsf{i}^2 = -1, \quad \mathsf{i}^2 = -\mathsf{i},$$
und allgemeiner
$$\forall n : n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{i}^{4\cdot n} = 1, \quad \mathsf{i}^{1+4\cdot n} = \mathsf{i}, \quad \mathsf{i}^{2+4\cdot n} = -1, \quad \mathsf{i}^{3+4\cdot n} = -\mathsf{i}.$$

⋆

Die komplexe Zahl
$$5+\mathsf{i}\cdot(-2),$$
kann in Einklang mit komplexer Arithmetik auf verschiedene Weise geschrieben werden,
$$5+\mathsf{i}\cdot(-2) = 5+(-2)\cdot\mathsf{i} = 5-2\cdot\mathsf{i} = 5-\mathsf{i}\cdot 2.$$
Es gilt
$$-(5-2\cdot\mathsf{i}) = -5+2\cdot\mathsf{i}.$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{5-2\cdot\mathsf{i}}$ wird am besten ein Trick eingesetzt: Zähler und Nenner werden mit dem "konjugiert Komplexen" des Nenners - Erklärung folgt bald - multlipliziert und die Produkte werden nicht per Formel sondern unter Einsatz des komplexen Distributivgesetzes und $\mathsf{i}\cdot\mathsf{i}=-1$ berechnet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{5-2\cdot\mathsf{i}} &= \frac{1}{5-2\cdot\mathsf{i}}\cdot\frac{5+2\cdot\mathsf{i}}{5+2\cdot\mathsf{i}} = \frac{1\cdot(5+2\cdot\mathsf{i})}{(5-2\cdot\mathsf{i})\cdot(5+2\cdot\mathsf{i})}\\ &= \frac{5+2\cdot\mathsf{i}}{25+10\cdot\mathsf{i}-10\cdot\mathsf{i}-4\cdot\mathsf{i}\cdot\mathsf{i}} = \frac{5+2\cdot\mathsf{i}}{25-4\cdot(-1)} = \frac{5+2\cdot\mathsf{i}}{25+4} = \frac{5+2\cdot\mathsf{i}}{29}\\ &= \frac{5}{29}+\mathsf{i}\cdot\frac{2}{29}.\end{aligned}$$

Auch gilt mit vertrauten komplexen Rechenregeln etwa,

$$(5-2\cdot\mathsf{i})+(3+\mathsf{i}) = 5-2\cdot\mathsf{i}+3+\mathsf{i} = 8-2\cdot\mathsf{i}+1\cdot\mathsf{i} = 8+(-2+1)\cdot\mathsf{i} = 8+(-1)\cdot\mathsf{i} = 8-\mathsf{i},$$

$$(5-2\cdot\mathsf{i})-(3+\mathsf{i}) = 5-3-2\cdot\mathsf{i}-\mathsf{i} = 2-2\cdot\mathsf{i}-1\cdot\mathsf{i} = 2+(-2-1)\cdot\mathsf{i} = 2-3\cdot\mathsf{i},$$

sowie

$$\begin{aligned}(5-2\cdot\mathsf{i})\cdot(3+\mathsf{i}) &= 5\cdot3+5\cdot\mathsf{i}-2\cdot\mathsf{i}\cdot3-2\cdot\mathsf{i}\cdot\mathsf{i} = 15+5\cdot\mathsf{i}-6\cdot\mathsf{i}-2\cdot(-1)\\ &= 15-1\cdot\mathsf{i}+2 = 17-\mathsf{i},\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{5-2\cdot\mathsf{i}}{3+\mathsf{i}} &= \frac{5-2\cdot\mathsf{i}}{3+\mathsf{i}}\cdot\frac{3-\mathsf{i}}{3-\mathsf{i}} = \frac{(5-2\cdot\mathsf{i})\cdot(3-\mathsf{i})}{(3+\mathsf{i})\cdot(3-\mathsf{i})} = \frac{15-5\cdot\mathsf{i}-6\cdot\mathsf{i}+2\cdot\mathsf{i}\cdot\mathsf{i}}{3^2-\mathsf{i}^2}\\ &= \frac{15-11\cdot\mathsf{i}+2\cdot(-1)}{9-(-1)} = \frac{15-11\cdot\mathsf{i}-2}{9+1} = \frac{13-11\cdot\mathsf{i}}{10} = \frac{13}{10}-\mathsf{i}\cdot\frac{11}{10},\end{aligned}$$

wobei hier die natürlich auch für komplexe Zahlen gültige Formel

$$\forall z,w: z\in\mathbb{C}\wedge w\in\mathbb{C}\Rightarrow(z+w)\cdot(z-w)=z^2-w^2,$$

eingesetzt wird.

# 3 Die konjugiert komplexe Zahl

Ist $z$ eine komplexe Zahl, so wird die durch Vorzeichenwechsel des Imaginärteils von $z$ gewonnene Zahl "konjugiert komplexe Zahl von $z$" genannt und mit $\overline{z}$ bezeichnet:

$$\forall z: z\in\mathbb{C}\Rightarrow\overline{z}\in\mathbb{C}\wedge\overline{z}=(\mathsf{Re}z)-\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}z).$$

Es folgt

$$\forall z: z\in\mathbb{C}\Rightarrow \mathsf{Re}\overline{z}=\mathsf{Re}z \quad\wedge\quad \mathsf{Im}\overline{z}=-\mathsf{Im}z.$$

Stellt man $\mathbb{C}$ mit Hilfe von `reim` als Ebene - die "Gaußsche Ebene" - dar, so erhält man $\overline{z}$ aus $z$ durch Spiegelung an der Abszisse, also der reellen Achse. Es gilt

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{\overline{z}} = z,$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{-z} = -\overline{z} \wedge \overline{1/z} = \frac{1}{\overline{z}},$$

$$\begin{aligned}\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow z \cdot \overline{z} &= ((\mathsf{Re}z) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}z)) \cdot ((\mathsf{Re}z) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}z)) = (\mathsf{Re}z)^2 - \mathsf{i}^2 \cdot (\mathsf{Im}z)^2 \\ &= (\mathsf{Re}z)^2 + (\mathsf{Im}z)^2 \in [0| + \infty],\end{aligned}$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{(\mathsf{Re}z)^2 + (\mathsf{Im}z)^2},$$

wobei hier alle Gleichungen auch im Fall $z = 0$ richtig sind,

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{x} = x,$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \wedge \overline{z} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R},$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathsf{Re}z = \frac{1}{2} \cdot (z + \overline{z}) \wedge \mathsf{Im}z = \frac{1}{2 \cdot i} \cdot (z - \overline{z}),$$

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w},$$

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \overline{z/w} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},$$

$$\forall a, b : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a + \mathsf{i} \cdot b} = a - \mathsf{i} \cdot b \wedge \overline{a - \mathsf{i} \cdot b} = a + \mathsf{i} \cdot b,$$

$$\forall a, b : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \overline{(a + \mathsf{i} \cdot b)} = a^2 + b^2 \in [0| + \infty[.$$

# 4 Der komplexe Betrag

Visualisiert man die Menge der komplexen Zahlen als Gaußsche Zahlenebene, so ist der "komplexe Betrag" einer komplexen Zahl $z$ gleich dem Abstand, den der $z$ visualieserende Punkt von 0 hat. Der komplexe Betrag stimmt für reelle Zahlen mit dem reellen Betrag überein und wird wie im Reellen mit Hilfe zweier senktrechter Striche | bezeichnet. Es gilt

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = \sqrt{(\mathsf{Re}z)^2 + (\mathsf{Im}z)^2} \in [0| + \infty[,$$

so dass auch

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\forall x : x \in [0| + \infty[ \Rightarrow |x| = x,$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \wedge |z| = z \Rightarrow z \in [0| + \infty[,$$

$$\forall x : x \in ]-\infty|0] \Rightarrow |x| = -x,$$
$$\forall z : z \in \mathbb{C} \wedge |z| = -z \Rightarrow z \in ]-\infty|0],$$
$$\forall z : z \in \mathbb{C} \wedge |z| = 0 \Rightarrow z = 0,$$
$$z = 0 \Rightarrow |z| = 0.$$

Bezüglich $|.|$ und komplexer Arithmetik gilt

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow |-z| = |z| \wedge \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|},$$
$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow ||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|,$$
$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow ||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|,$$
$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w| \wedge \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$
$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow |\overline{z}| = |z|.$$

Auch gilt

$$\forall a, b : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a + \mathsf{i} \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$\forall a, b : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \Rightarrow ||a| - |b|| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|.$$

# 5 Die Eulersche Formel

Die Funktionen $\exp, \sin, \cos$ können auf kanonische Weise auch für komplexe Zahlen derartig definiert werden, dass sie für reelle Zahlen mit den jeweiligen reellen Funktionen übereinstimmen. Es gilt dann für die entsprechenden Erweiterungen,

$$\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \sin_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \cos_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$
$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \exp_{\mathbb{C}} z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots,$$
$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \sin_{\mathbb{C}} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \ldots,$$
$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \cos_{\mathbb{C}} z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \ldots,$$

insbesondere gilt die Eulersche Formel,

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot z) = \cos_{\mathbb{C}} z + \mathsf{i} \cdot \sin_{\mathbb{C}} z,$$

und es gilt unter anderem

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \exp_{\mathbb{C}}(-z) = \frac{1}{\exp_{\mathbb{C}} z} \wedge \sin_{\mathbb{C}}(-z) = -\sin_{\mathbb{C}} z \wedge \cos_{\mathbb{C}}(-z) = \cos_{\mathbb{C}} z,$$

Auch die Additionstheoreme bleiben strukturell gleich,

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow \exp_{\mathbb{C}}(z + w) = (\exp_{\mathbb{C}} z) \cdot (\exp_{\mathbb{C}} w),$$

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow \sin_{\mathbb{C}}(z + w) = (\sin_{\mathbb{C}} z) \cdot (\cos_{\mathbb{C}} w) + (\cos_{\mathbb{C}} z) \cdot (\sin_{\mathbb{C}} z),$$

$$\forall z, w : z \in \mathbb{C} \wedge w \in \mathbb{C} \Rightarrow \cos_{\mathbb{C}}(z + w) = (\cos_{\mathbb{C}} z) \cdot (\sin_{\mathbb{C}} w) - (\sin_{\mathbb{C}} z) \cdot (\sin_{\mathbb{C}} w),$$

so dass sich unter Einbeziehung der Eulerschen Formel

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \sin_{\mathbb{C}} z = \frac{1}{2 \cdot \mathsf{i}} \cdot ((\exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot z)) - (\exp(-\mathsf{i} \cdot z))),$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \cos_{\mathbb{C}} z = \frac{1}{2} \cdot ((\exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot z)) + (\exp(-\mathsf{i} \cdot z))),$$

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow (\cos_{\mathbb{C}} z)^2 + (\sin_{\mathbb{C}} z)^2 = 1,$$

ergibt. Werden an Stelle komplexer reelle Zahlen betrachtet, so zeigt sich zunächst ein Spezialfall der Eulerschen Formel,

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot x) = (\cos x) + \mathsf{i} \cdot (\sin x),$$

und weiter

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathsf{Re}(\exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot x)) = \cos x \wedge \mathsf{Im}(\exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot x)) = \sin x,$$

und

$$\forall x : x \in \mathbb{R} \Rightarrow |\exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot x)| = 1.$$

# 6 Ebene Polarkoordinatenfunktion. `wnkl`.

Betrachtet man in der Ebene $\mathbb{R}^2$ die Einheitskreislinie

$$\mathtt{EK} = \left\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1\right\},$$

so stellt man fest, dass es zu jedem $(x, y) \in \mathtt{EK}$ *genau* ein $\phi \in \,]-\pi|\pi]$ - an Stelle von $]-\pi|\pi]$ kann auch jedes andere Intervall der Form $]a|a+\pi]$ oder $[a|a+\pi[$ mit $a \in \mathbb{R}$ betrachtet werden, doch im Vorkurs soll es das Intervall $]-\pi|\pi]$ sein - gibt, so dass

$$x = \cos\phi \quad \wedge \quad y = \sin\phi.$$

Damit ist eine Funktion

$$\mathtt{phi} : \mathtt{EK} \to \,]-\pi|\pi] \quad \text{bijektiv},$$

festgelegt.

<u>**ACHTUNG**</u> `phi` unstetig in $(-1, 0)$.

Die entscheidende Eigenschaften dieser Funktion sind

$$\forall p : p \in \texttt{EK} \Rightarrow p = (\cos(\texttt{phi}(p)), \sin(\texttt{phi}(p))),$$

$$\forall \phi : \phi \in \left]-\pi|\pi\right] \Rightarrow \texttt{phi}^{-1}(\phi) \in \texttt{EK}.$$

Ist $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$, so gilt mit Hilfe des Betrags von Vektoren im $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{1}{|(x, y|} \cdot (x, y) \in \texttt{EK}, \quad \text{wobei} \quad |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

woraus ohne viel Weiteres,

$$(x, y) = |(x, y)| \cdot \left(\cos\left(\texttt{phi}\left(\frac{1}{|(x, y)|} \cdot (x, y)\right)\right), \sin\left(\texttt{phi}\left(\frac{1}{|(x, y)|} \cdot (x, y)\right)\right)\right),$$

folgt. Schreibt man in dieser doch eher aufwändigen Notation

$$\forall x, y : (0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \texttt{wnkl}((x, y)) = \texttt{phi}\left(\frac{1}{|(x, y)|} \cdot (x, y)\right),$$

und ergänzt eher willkürlich,

$$\texttt{wnkl}((0, 0)) = 0,$$

so ergibt sich die Funktion

$$\texttt{wnkl} : \mathbb{R}^2 \to \left]-\pi|\pi\right],$$

$$\texttt{wnkl}((x, y)) = \begin{cases} \texttt{phi}\left(\frac{1}{|(x,y)|} \cdot (x, y)\right) & , \ (0, 0) \neq (x, y) \\ 0 & , \ (0, 0) = (x, y) \end{cases}.$$

Mit den Mitteln des Vorkurses gelingt eine Darstellung von `wnkl` mit Hilfe von arctan und einer Fallunterscheidung:

$$\forall x, y : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \texttt{wnkl}((x, y)) = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \wedge y = 0 \\ \arctan \frac{y}{x} & , \ 0 < x \\ \frac{\pi}{2} & , \ x = 0 \wedge 0 < y \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & , \ x < 0 \wedge 0 < y \\ \pi & , \ x < 0 \wedge y = 0 \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x} & , \ x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

**ACHTUNG** `wnkl` unstetig entlang $\left]-\infty|0\right] \times \{0\}$.

Es folgt weiterhin,

$$\forall x, y : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x, y) = |(x, y)| \cdot (\cos(\texttt{wnkl}((x, y)), \sin(\texttt{wnkl}((x, y))).$$

Mit dieser Gleichung ist die Grundlage für die “Ebene Polarkoordinatenfunktion ” epk gelegt:

$$\begin{aligned} \texttt{epk} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \texttt{epk}((x, y)) &= (\texttt{r}((x, y)), \texttt{wnkl}((x, y)) \\ &= (|(x, y)|, \texttt{wnkl}((x, y))) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \texttt{wnkl}((x, y))), \end{aligned}$$

so dass

$$\forall x, y; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x, y) = \texttt{r}((x, y)) \cdot (\cos(\texttt{wnkl}((x, y)), \sin(\texttt{wnkl}((x, y))),$$

In der Tat gilt

$$\texttt{epk} : \mathbb{R}^2 \to \{(0, 0)\} \cup \,]0| + \infty[\, \times \,] - \pi|\pi] \quad \text{bijektiv}$$

**ACHTUNG** epk unstetig entlang $] - \infty|0] \times \{0\}$.

## 7 wnCl. Eine komplexe Wurzelfunktion. wrzl.

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit Hilfe von reim bijektiv auf $\mathbb{R}^2$ abgebildet. Damit kann die Funktion wnkl via reim ins Komplexe übertragen werden:

$$\texttt{wnCl} := \texttt{wnkl} \circ \texttt{reim},$$

oder etwas expliziter,

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow \texttt{wnCl}z = \texttt{wnkl}(\mathsf{Re}z, \mathsf{Im}z).$$

Es gilt

$$\texttt{wnCl} : \mathbb{C} \to \,] - \pi|\pi].$$

**ACHTUNG** wnCl unstetig entlang $\{z : z \in \mathbb{C} \wedge \mathsf{Re}z \leq 0\}$.

Beispielsweise gilt

$$\begin{gathered} \forall x : x \in [0| + \infty[\, \Rightarrow \texttt{wnCl}x = 0, \\ \forall x : x \in \,] - \infty|0[\, \Rightarrow \texttt{wnCl}x = \pi, \\ \texttt{wnCl}(\mathsf{i}) = \frac{\pi}{2}, \quad \texttt{wnCl}(-i) = -\frac{\pi}{2}, \quad \texttt{wnCl}(1 + \mathsf{i}) = \frac{\pi}{4}, \\ \forall x : x \in \,]0| + \infty[\, \Rightarrow \texttt{wnCl}(\mathsf{i} \cdot x) = \frac{\pi}{2}, \\ \forall x : x \in \,] - \infty|0[\, \Rightarrow \texttt{wnCl}(\mathsf{i} \cdot x) = -\frac{\pi}{2}. \end{gathered}$$

Mit Hilfe der komplexen Betragsfunktion und der Eulerschen Formel kann man

$$\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = |z| \cdot \exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot \mathtt{wnCl}z),$$

zeigen. Diese Darstellung und die Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion erlauben es, eine kanonische Erweiterung der reellen Wurzelfunktion anzugeben. Diese Fortsetzung ist

$$\begin{aligned}\mathtt{wzzl} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \mathtt{wrzl}z &= \sqrt{|z|} \cdot \exp_{\mathbb{C}}\left(\mathsf{i} \cdot \frac{\mathtt{wnCl}z}{2}\right)\\ &= \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\mathtt{wnCl}z}{2}\right) + \mathsf{i} \cdot \sin\left(\frac{\mathtt{wnCl}z}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Zum Nachweis, dass $\mathtt{wrzl}$ die entscheidenen Eigenschaften einer kanonischen Fortsetzung der reellen Wurzelfunktion hat, sei Folgendes festgestellt:

$$\begin{aligned}\forall z : z \in \mathbb{C} \Rightarrow (\mathtt{wrzl}z)^2 &= \left(\sqrt{|z|} \cdot \exp_{\mathbb{C}}\left(\mathsf{i} \cdot \frac{\mathtt{wnCl}z}{2}\right)\right)^2\\ &= \left(\sqrt{|z|}\right)^2 \cdot \left(\exp_{\mathbb{C}}\left(\mathsf{i} \cdot \frac{\mathtt{wnCl}z}{2}\right)\right)^2\\ &= |z| \cdot \exp_{\mathbb{C}}\left(2 \cdot \mathsf{i} \cdot \frac{\mathtt{wnCl}z}{2}\right) = |z| \cdot \exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot \mathtt{wnCl}z) = z,\end{aligned}$$

so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die komplexe Zahl $\mathtt{wrzl}z$ mit sich selbst multipliziert$= z$ ist. Auch gilt

$$\begin{aligned}\forall x : x \in [0| + \infty[ \Rightarrow \mathtt{wrzl}x &= \sqrt{|x|} \cdot \exp_{\mathbb{C}}\left(\mathsf{i} \cdot \frac{\mathtt{wnCl}x}{2}\right)\\ &= \sqrt{|x|} \cdot \exp_{\mathbb{C}}\left(\mathsf{i} \cdot \frac{0}{2}\right) = \sqrt{|x|} \cdot \exp_{\mathbb{C}}(\mathsf{i} \cdot 0) = \sqrt{|x|} \cdot \exp_{\mathbb{C}} 0\\ &= \sqrt{|x|} \cdot \exp 0 = \sqrt{|x|} \cdot 1 = \sqrt{|x|} = \sqrt{x},\end{aligned}$$

so dass $\mathtt{wrzl}$ für reelle Zahlen tatsächlich mit $\sqrt{\cdot}$ übereinstimmt. In vermutlich erwarteter Weise gilt

$$\begin{aligned}\forall x : x \in ] - \infty|0[ \Rightarrow \mathtt{wrzl}x &= \sqrt{|x|} \cdot \exp_{\mathbb{C}}\left(\mathsf{i} \cdot \frac{\mathtt{wnCl}x}{2}\right)\\ &= \sqrt{|x|} \cdot \exp_{\mathbb{C}}\left(\mathsf{i} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{|x|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathsf{i} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \sqrt{|x|} \cdot (0 + \mathsf{i} \cdot 1) = \sqrt{|x|} \cdot \mathsf{i} = \mathsf{i} \cdot \sqrt{|x|},\end{aligned}$$

so dass im Speziellen

$$\mathtt{wrzl}(-1) = \mathsf{i}.$$

**<u>ACHTUNG</u>** `wrzl` ist im Gegensatz zu $\sqrt{\cdot}$ nicht stetig. Dies wirkt sich unter anderem dadurch aus, dass nicht jede für nichtnegative reelle Zahlen und $\sqrt{\cdot}$ gültige Formel auch für `wrzl` gültig ist. So gibt es etwa komplexe Zahlen $z, w$ mit

$$\texttt{wrzl}(z \cdot w) \neq (\texttt{wrzl}z) \cdot (\texttt{wrzl}w),$$

und hierfür ist $z = w = -1$ vermutlich das einfachste Beispiel:

$$\texttt{wrzl}((-1) \cdot (-1)) = \texttt{wrzl}(1) = 1 \neq -1 = \mathsf{i} \cdot \mathsf{i} = (\texttt{wrzl}(-1)) \cdot (\texttt{wrzl}(-1)).$$

Mit Hilfe von `wrzl` kann man bei gegebenem komplexen $a$ die Gleichung

$$z^2 = a,$$

nach $z$ auflösen. Mathematisch präziser gesprochen: Aus $a \in \mathbb{C}$ folgt $\texttt{wrzl}a \in \mathbb{C}$ und $(\texttt{wrzl}a)^2 = a$. Auch gilt offenbar $(-\texttt{wrzl}a)^2 = (\texttt{wrzl}a)^2 = a$, so dass

$$\forall a : a \in \mathbb{C} \Rightarrow \pm\texttt{wrzl}a \in \{z : z \in \mathbb{C} \land z^2 = a\},$$

so dass

$$\forall a : a \in \mathbb{C} \Rightarrow \{-\texttt{wrzl}a, \texttt{wrzl}a\} \subseteq \{z : z \in \mathbb{C} \land z^2 = a\}.$$

Ist umgekehrt

$$\lambda \in \{z : z \in \mathbb{C} \land z^2 = a\},$$

so folgt $\lambda \in \mathbb{C}$ und

$$\lambda^2 = a = (\texttt{wrzl}a)^2,$$

so dass

$$\lambda^2 - (\texttt{wrzl}a)^2 = 0,$$

also auch

$$(\lambda + \texttt{wrzl}a) \cdot (\lambda - \texttt{wrzl}a) = 0,$$

woraus

$$\lambda = -\texttt{wrzla} \quad \lor \quad \lambda = \texttt{wrzl}a,$$

folgt, aus dem sich

$$\lambda \in \{-\texttt{wrzl}a, \texttt{wrzl}a\},$$

ergibt. Als weitere Schlussfolgerung zeigt sich nun

$$\forall a : a \in \mathbb{C} \Rightarrow \{-\texttt{wrzl}a, \texttt{wrzl}a\} = \{z : z \in \mathbb{C} \land z^2 = a\},$$

und somit auch

$$\forall a, z : z \in \mathbb{C} \land a \in \mathbb{C} \land z^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{C} \land a \in \mathbb{C} \land (z = \texttt{wrzl}a \lor z = -\texttt{wrzl}a).$$

Zur Lösung der Gleichung $z^2 = a$ bei gegebenem komplexen $a$ und gesuchtem komplexen $z$ kann man, muss man aber nicht die Darstellung von `wrzl` mit $\exp_{\mathbb{C}}$ und `wnCl` zurück greifen. Es reicht aus, wenn man reelle quadratische Gleichungen in $\mathbb{R}$ lösen kann. Dazu ein Beispiel.

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis) Gesucht sind all jene komplexen $z$ für die

$$z^2 = 5 - 2 \cdot \mathsf{i},$$

gilt. Unter der Voraussetzung, dass es derartige $z$ gibt, gibt es auch reelle $a, b$ mit $z = a + \mathsf{i} \cdot b$. Es folgt

$$(a + \mathsf{i} \cdot b)^2 = 5 - 2 \cdot \mathsf{i},$$

und hieraus

$$a^2 - b^2 + i \cdot (2 \cdot a \cdot b) = 5 - 2 \cdot \mathsf{i}.$$

Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl links muss gleich Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl rechts sein. Da $a, b$ reell sind gilt

$$\mathsf{Re}(a^2 - b^2 + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot a \cdot b)) = a^2 - b^2, \quad \mathsf{Im}(a^2 - b^2 + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot a \cdot b)) = 2 \cdot a \cdot b.$$

Es folgen die Gleichungen

$$a^2 - b^2 = 5, \quad 2 \cdot a \cdot b = -2.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $0 \neq a$, $0 \neq b$ und

$$b = -\frac{1}{a},$$

und dies in die erste Gleichung eingesetzt ergibt zunächst

$$a^2 - \frac{1}{a^2} = 5,$$

woraus wegen $0 \neq a$ die biquadratische Gleichung

$$a^4 - 5 \cdot a^2 - 1 = 0,$$

folgt. Via $(a^2)^2 = a^4$ und mit Schulmathematik ergibt sich

$$a^2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1} \quad \vee \quad a^2 = \frac{5}{2} - \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1}.$$

$a^2$ muss als Quadrat einer reellen Zahl nichtnegativ sein. Der Term mit "$-$" ist es nicht. Es folgt

$$a^2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + 1} = \frac{5 + \sqrt{29}}{2},$$

so dass

$$a = \frac{\sqrt{5+\sqrt{29}}}{\sqrt{2}} \quad \vee \quad a = -\frac{\sqrt{5+\sqrt{29}}}{\sqrt{2}},$$

und korresponierend zu $b = -\frac{1}{a}$ folgt jeweils

$$b = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{29}}} \quad \vee \quad b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{29}}},$$

so dass

$$z = \frac{\sqrt{5+\sqrt{29}}}{\sqrt{2}} - \mathsf{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{29}}} \quad \vee \quad z = -\frac{\sqrt{5+\sqrt{29}}}{\sqrt{2}} + \mathsf{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{29}}},$$

folgt. Zur *Probe* wird

$$\begin{aligned}
\left(\pm\left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{29}}}{\sqrt{2}} - \mathsf{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{29}}}\right)\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{29}}}{\sqrt{2}} - \mathsf{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{29}}}\right)^2 \\
= \left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{29}}}{\sqrt{2}}\right)^2 &- 2 \cdot \mathsf{i} \cdot \frac{\sqrt{5+\sqrt{29}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{29}}} + \mathsf{i}^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{29}}}\right)^2 \\
&= \frac{5+\sqrt{29}}{2} - 2 \cdot \mathsf{i} - \frac{2}{5+\sqrt{29}} = \frac{(5+\sqrt{29})^2}{2 \cdot (5+\sqrt{29}} - \frac{4}{2 \cdot (5+\sqrt{29})} - 2 \cdot \mathsf{i} \\
&= \frac{25 + 10 \cdot \sqrt{29} + 29 - 4}{2 \cdot (5+\sqrt{29})} - 2 \cdot \mathsf{i} = \frac{50 + 10 \cdot \sqrt{29}}{2 \cdot (5+\sqrt{29})} - 2 \cdot \mathsf{i} \\
&= \frac{10 \cdot (5+\sqrt{29})}{2 \cdot (5+\sqrt{29})} - 2 \cdot \mathsf{i} = \frac{10}{2} - 2 \cdot \mathsf{i} = 5 - 2 \cdot \mathsf{i},
\end{aligned}$$

berechnet. □(Beispiel)

Mit Hilfe von `wrzl` kann die aus der Schulmathematik vertraute $p, q$-Formel für komplexe Lösungen reformuliert werden. Seien $p, q$ komplexe Zahlen. Gesucht seien all jene komplexen $z$ für die

$$z^2 + p \cdot z + q = 0,$$

gilt. Unter der Voraussetzung, dass derartige $z$ existieren gilt für all diese

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0,$$

also

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

In Worten: $z+\frac{p}{2}$ ist eine komplexe Zahl, deren Quadrat gleich der komplexen Zahl $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ ist. Hierfür gibt es nach aktuellem Wissensstand genau zwei Möglichkeiten: es muss

$$z+\frac{p}{2}=\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)\quad\vee\quad z+\frac{p}{2}=-\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right),$$

gelten. Es folgt

$$z=-\frac{p}{2}+\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)\quad\vee\quad z=-\frac{p}{2}=-\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right),$$

oder einprägsamer, aber bednklicher,

$$z=-\frac{p}{2}\pm\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right).$$

Dies ist die aus der Schulmathematik vertraute $p,q$-Formel, in der $\sqrt{\cdot}$ durch die komplexe Erweiterung `wrzl` ersetzt wird. Zur *Probe* wird in neurlicher etwas bedenklicher Notation,

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{p}{2}\pm\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)\right)^2+p\cdot\left(-\frac{p}{2}\pm\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)\right)+q\\
&\quad=\left(\frac{p}{2}\right)^2\mp 2\cdot\frac{p}{2}\cdot\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)+\left(\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)\right)^2\\
&\qquad+p\cdot\left(-\frac{p}{2}\pm\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)\right)+q\\
&=\left(\frac{p}{2}\right)^2\mp p\cdot\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)+\left(\frac{p}{2}\right)^2-q-\frac{p^2}{2}\pm p\cdot\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)+q\\
&\qquad=\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{2}=0\end{aligned}$$

berechnet.

<u>Beispiel</u> (ohne Beweis) Gesucht sind all jene komplexen $z$ für die

$$z^2+10\cdot z+26=0,$$

gilt. Mit Hilfe der komplexen $p,q$-Formel folgt

$$\begin{aligned}z=-\frac{10}{2}\pm\texttt{wrzl}\left(\left(\frac{10}{2}\right)^2-26\right)&=-5\pm\texttt{wrzl}\left(5^2-26\right)=-5\pm\texttt{wrzl}(-1)\\
&=-5\pm\mathsf{i}.\end{aligned}$$

Zur Probe wird

$$\begin{aligned}(-5+\mathsf{i})^2+10\cdot(-5+\mathsf{i})+26 &= 25-10\cdot\mathsf{i}+\mathsf{i}^2-50+10\cdot\mathsf{i}+26\\ &= 25-1-50+26=0,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(-5-\mathsf{i})^2+10\cdot(-5-\mathsf{i})+26 &= 25+10\cdot\mathsf{i}+\mathsf{i}^2-50-10\cdot\mathsf{i}+26\\ &= 25-1-50+26=0,\end{aligned}$$

berechent. □(Beispiel)