Lagrange-Mechanik
KoordinatenTransformationen

Andreas Unterreiter

14. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Notationen

1.1 $\Psi_{,j}$ für $j \in \{1, \ldots, d\}$

Falls $1 \le d, n \in \mathbb{N}$ und $\Psi \in \mathtt{C}^1(W : \mathbb{R}^n)$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, dann ist für $x \in W$ und $j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$(\partial_j \Psi)(x) = \Psi_{,j}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\Psi \left(x + h \cdot \mathfrak{e}_j^d \right) - \Psi(x) \right),$$

wobei $\mathfrak{e}_j^d$ der j-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^d$ ist, die j-partielle Ableitung von Ψ an der Stelle x und für

$$\Psi_{,j} = \{(x, \Psi_{,j}(x)) : x \in W\},$$

gilt $\Psi_{,j} \in \mathtt{C}(W : \mathbb{R}^d)$ und

$$\Psi_{,j} : W \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \Psi_{,j}(x).$$

1.2 $(\mathtt{P}\Psi)$ und $(\mathtt{P}^\perp \Psi)$

Falls $1 \le d, n \in \mathbb{N}$ und $\Psi \in \mathtt{C}^1(W : \mathbb{R}^n)$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, dann ist

$$\begin{aligned}(\mathtt{P}\Psi) = \{(x, (\mathtt{P}\Psi)(x)) :\\ &(\mathtt{P}\Psi)(x) \text{ Projektion des } \mathbb{R}^n \text{ auf } \mathbb{H}[\{\Psi_{,1}(x), \ldots \Psi_{,d}(x)\}]\},\end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned}(\mathtt{P}^\perp\Psi) = \{\left(x, (\mathtt{P}^\perp\Psi)(x)\right) :\\ &(\mathtt{P}^\perp\Psi)(x) \text{ Projektion des } \mathbb{R}^n \text{ auf } (\mathbb{H}[\{\Psi_{,1}(x), \ldots \Psi_{,d}(x)\}])^\perp\}.\end{aligned}$$

1.3 $\Psi_{,j,k}$ für $j, k \in \{1, \ldots, d\}$

Falls $1 \le d, n \in \mathbb{N}$ und $\Psi \in \mathtt{C}^2(W : \mathbb{R}^n)$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, dann ist für $x \in W$ und $j, k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$(\partial_k \partial_j \Psi)(x) = \Psi_{,j,k}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\Psi_{,j} \left(x + h \cdot \mathfrak{e}_k^d \right) - \Psi_{,j}(x) \right),$$

wobei $\mathfrak{e}_k^d$ der k-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^d$ ist und für

$$\Psi_{,j,k} = \{(x, \Psi_{,j,k}(x)) : x \in W\},$$

gilt $\Psi_{,j,k} \in \mathtt{C}(W : \mathbb{R}^d)$ und

$$\Psi_{,j,k} : W \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \Psi_{,j,k}(x).$$

.

1.4 $\Psi^{\mathtt{k}}$

Falls $1 \leq d, n \in \mathbb{N}$ und $\Psi \in \mathtt{C}^1(W : \mathbb{R}^n)$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, dann ist

$$\Psi^{\mathtt{k}} = \{((t,x),(t,\Psi(x))) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in W\},$$

und es gilt $\Psi^{\mathtt{k}} \in \mathtt{C}^1(\mathbb{R} \times W : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, sowie

$$\Psi^{\mathtt{k}} : \mathbb{R} \times W \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad \Psi^{\mathtt{k}}((t,x)) = (t, \Psi(x)).$$

1.5 $\Psi^{\mathtt{g}}$

Falls $1 \leq d, n \in \mathbb{N}$ und $\Psi \in \mathtt{C}^1(W : \mathbb{R}^n)$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, dann ist

$$\Psi^{\mathtt{g}} = \left\{ \left(((t,x),v), \sum_{j=1}^{d} v_j \cdot \Psi_{,j}(x) \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in W \wedge v \in \mathbb{R}^d \right\},$$

und es gilt $\Psi^{\mathtt{g}} \in \mathtt{C}((\mathbb{R} \times W) \times \mathbb{R}^d : \mathbb{R}^n)$, sowie

$$\Psi^{\mathtt{g}} : (\mathbb{R} \times W) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, \quad \Psi^{\mathtt{g}}(((t,x),v)) = \sum_{j=1}^{d} v_j \cdot \Psi_{,j}(x).$$

1.6 $(\Psi \circ \gamma)^\bullet$ und $\Psi^{\mathtt{g}} \circ \gamma^*$

Satz

`V1.` $1 \leq d, n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\Psi \in \mathtt{C}^1(W : \mathbb{R}^n)$.

`V2.` γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}^d$ und $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq W$.

$\Rightarrow$

`a)` $\Psi \circ \gamma$ ist 1-Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $\Psi \circ \gamma : \mathsf{dom}\,\gamma \to \mathbb{R}^n$ und $(\Psi \circ \gamma)^\bullet \in \mathtt{C}(\mathsf{dom}\,\gamma : \mathbb{R}^n)$.

`b)` $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad (\Psi \circ \gamma)^\bullet(t) = \sum_{j=1}^{d} \gamma_j^\bullet(t) \cdot (\Psi_{,j} \circ \gamma)(t) = (\Psi^{\mathtt{g}} \circ \gamma^*)(t).$

`c)` $(\Psi \circ \gamma)^\bullet = \Psi^{\mathtt{g}} \circ \gamma^*$.

<u>Beweis</u> trivial. $\square$

1.7 $\Psi^{\mathtt{gg}}$

Falls $1 \leq d, n \in \mathbb{N}$ und $\Psi \in \mathtt{C}^1(W : \mathbb{R}^n)$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, dann ist

$$\Psi^{\mathtt{gg}} = \left\{ \left(((t,x),v), \left((t, \Psi(x)), \sum_{j=1}^{d} v_j \cdot \Psi_{,j}(x) \right) \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in W \wedge v \in \mathbb{R}^d \right\},$$

und es gilt $\Psi^{\mathtt{gg}} \in \mathtt{C}((\mathbb{R} \times W) \times \mathbb{R}^d : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n)$, sowie

$$\begin{aligned} &\Psi^{\mathtt{gg}} : (\mathbb{R} \times W) \times \mathbb{R}^d \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n, \\ &\qquad \Psi^{\mathtt{g}}(((t,x),v)) = \left((t, \Psi(x)), \sum_{j=1}^{d} v_j \cdot \Psi_{,j}(x) \right) \\ &\qquad = ((t, \Psi(x)), \Psi^{\mathtt{g}}(((t,x),v))) = \left(\Psi^{\mathtt{k}}((t,x)), \Psi^{\mathtt{g}}(((t,x),v)) \right). \end{aligned}$$

1.8 $(\Psi \circ \gamma)^*$ und $\Psi^{\mathtt{gg}} \circ \gamma^*$

Satz

`V1.` $1 \leq d, n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\Psi \in \mathtt{C}^1(W : \mathbb{R}^n)$.

`V2.` γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}^d$ und $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq W$.

$\Rightarrow$

$$(\Psi \circ \gamma)^* = \Psi^{\mathtt{gg}} \circ \gamma^*.$$

<u>Beweis</u> trivial. □

2 $L_\Psi = L \circ \Psi^{\mathtt{gg}}$

Satz - KT

`V1.` L ist n, Ω-Lagrange-Funktion.

`V2.` $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\Psi \in \mathtt{C}^2(W : \mathbb{R}^n)$ und $0 \neq \Omega_\Psi$.

`V3.` $\Omega_\Psi = (\Psi^{\mathtt{gg}})^{-1}[\Omega]$ und $L_\Psi = L \circ \Psi^{\mathtt{gg}}$.

$\Rightarrow$

`a)` $0 \neq \Omega_\Psi \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $L_\Psi \in \mathtt{C}^1(\Omega_\Psi : \mathbb{R})$

$$\text{und} \quad L_\Psi : \Omega_\Psi \to \mathbb{R}, \quad L_\Psi(((t,x),v)) = L\left(((t, \Psi(x)), \sum_{j=1}^{d} v_j \cdot \Psi_{,j}(x)) \right).$$

b) $\partial_{\mathtt{t}} L_\Psi : \Omega_\Psi \to \mathbb{R}, \quad (\partial_{\mathtt{t}} L_\Psi) = (\partial_{\mathtt{t}} L) \circ \Psi^{\mathtt{gg}}$.

c) $\forall k : k \in \{1, \dots, d\}$

$$\Rightarrow \quad (\partial_{\mathtt{x}k} L_\Psi) : \Omega_\Psi \to \mathbb{R},$$

$$(\partial_{\mathtt{x}k} L_\Psi)(((t,x),v)) = \sum_{\alpha=1}^{n} ((L_{,\alpha} \circ \Psi^{\mathtt{gg}}) \cdot \cdot \Psi_{\alpha,k})(((t,x),v))$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} v_j \cdot \sum_{\alpha=1}^{n} ((\partial_{\mathtt{v}\alpha} L) \circ \Psi^{\mathtt{gg}}) \cdot \cdot \Psi_{\alpha,j,k})(((t,x),v))$$

$$= \langle (\nabla_{\mathtt{x}} L) \circ \Psi^{\mathtt{gg}} | \Psi_{,k} \rangle (((t,x),v)) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ \Psi^{\mathtt{gg}} | (\Psi^{\mathtt{g}})_{,k} \rangle (((t,x),v)),$$

wobei $(\Psi^{\mathtt{g}})_{,k} = \sum_{j=1}^{d} v_j \cdot \Psi_{,j,k}(((t,x),v))$.

d) $\forall k : k \in \{1, \dots, d\}$

$$\Rightarrow \quad (\partial_{\mathtt{v}k} L_\Psi)(((t,x),v)) = \sum_{\alpha=1}^{n} ((\partial_{\mathtt{v}\alpha} L) \circ \Psi^{\mathtt{gg}}) \cdot \cdot \Psi_{\alpha,k})(((t,x),v))$$

$$= \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ \Psi^{\mathtt{gg}} | \Psi_{,k} \rangle (((t,x),v)).$$

e) L_Ψ ist d, Ω_Ψ-Lagrange-Funktion.

f) γ ist d, Ω_Ψ-Kurve von L_Ψ

$$\Leftrightarrow \quad \gamma \text{ ist 2-Kurve in } \mathbb{R}^d \text{ und } \mathsf{ran}\,(\gamma^*) \subseteq \Omega_\Psi$$
$$\Leftrightarrow \quad \gamma \text{ ist 2-Kurve in } \mathbb{R}^d \text{ und } \mathsf{ran}\,(\Psi^{\mathtt{gg}} \circ \gamma^*) \subseteq \Omega.$$

g) γ ist d, Ω_Ψ-Kurve von $L_\Psi \quad \Rightarrow \quad \Psi \circ \gamma$ ist n, Ω-Kurve von L.

h) Falls γ eine d, Ω_Ψ-Kurve von L_Ψ ist, falls Δ_Ψ die d, Ω_Ψ, L_Ψ-ELK von γ ist und falls Δ die n, Ω, L-ELK von $\Psi \circ \gamma$ ist, dann gilt

$$\Delta_\Psi = \sum_{j=1}^{d} \langle \Delta | \Psi_{,j} \circ \gamma \rangle \cdot \mathfrak{e}_j^d.$$

i) Falls γ eine d, Ω_Ψ-Kurve von L_Ψ ist, falls Δ die n, Ω, L-ELK von $\Psi \circ \gamma$ ist und falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad (\mathsf{P}\Psi)(\gamma(t))(\Delta(t)) = \mathfrak{o}^n.$$

dann ist γ eine d, Ω_Ψ-Zustandskurve von L_Ψ.

`j)` Falls γ eine d, Ω_Ψ-Zustandskurve von L_Ψ ist und falls Δ die n, Ω, L-ELK von $\Psi \circ \gamma$ ist, dann gilt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad (\mathtt{P}\Psi)(\gamma(t))(\Delta(t)) = \mathfrak{o}^n.$$

<u>Beweis</u> `a), b), c), d), e), f), g)` trivial.

<u>Beweis</u> `h)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `i), j)` trivial. $\square$

⋆

Ist γ eine d, Ω_Ψ-Zustandskurve von L_Ψ und ist Δ die n, Ω, L-ELK von $\Psi \circ \gamma$, so ist gemäß mechanischer Interpretation für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$(\mathtt{P}^\perp\Psi)(\gamma(t))(\Delta(t)),$$

die Kraft, die erforderlich ist, um $\Psi \circ \gamma$ zur Zeit t in der Mannigfaltigkeit $\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \mathbb{R}^n$ zu halten.

3 lf - stnd-d-$m(i,j)(t,x)/\Phi(t,x)$ (+1)

Satz stnd-d-KT

V1. $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

V2. $0 \neq B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen.

V3. $\Omega = B \times \mathbb{R}^n$.

V4. $m : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathtt{C}^1(B : \mathbb{R})$.

V5. $\forall \alpha, \beta : \alpha \in \{1, \ldots, n\} \wedge \beta \in \{1, \ldots, n\} \quad \Rightarrow \quad m((\alpha, \beta)) = m((\beta, \alpha))$.

V6. $\Phi \in \mathtt{C}^1(B : \mathbb{R})$.

V7. $L : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} m((\alpha,\beta))((t,x)) \cdot v_\alpha \cdot v_\beta \right) - \Phi((t,x)).$$

V8. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\Psi \in \mathtt{C}^2(W : \mathbb{R}^n)$ und $0 \neq (\Psi^{\mathtt{k}})^{-1}[B]$.

V9. $\Omega_\Psi = (\Psi^{\mathtt{gg}})^{-1}[\Omega]$ und $L_\Psi = L \circ \Psi^{\mathtt{gg}}$.

V10. $\forall i, j : i, j \in \{1, \ldots, j\} \quad \Rightarrow \quad m_\Psi((i,j))$

$$= \left\{ \left((t,x), \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} (m((\alpha,\beta)) \circ \Psi^{\mathtt{k}})((t,x)) \cdot \Psi_{\alpha,i}(x) \cdot \Psi_{\beta,j}(x) \right) : \\ t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^d \wedge (t,x) \in (\Psi^{\mathtt{k}})^{-1}[B] \right\}.$$

V11. $m_\Psi = \{((i,j), m_\Psi((i,j))) : i, j \in \{1, \ldots, d\}\}$.

$\Rightarrow$

a) $0 \neq (\Psi^{\mathtt{k}})^{-1}[B] \subseteq \mathbb{R} \times W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen.

b) $0 \neq \Omega_\Psi \subseteq (\mathbb{R} \times W) \times \mathbb{R}^d \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ offen.

c) $\Omega_\Psi = (\Psi^{\mathtt{k}})^{-1}[B] \times \mathbb{R}^d$.

d) $\forall t, x, i, j : t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^d \wedge (t,x) \in (\Psi^{\mathtt{k}})^{-1}[B] \wedge i, j \in \{1, \ldots, d\}$

$$\Rightarrow \quad m_\Psi((i,j))((t,x)) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} (m((\alpha,\beta)) \circ \Psi^{\mathtt{k}})((t,x)) \cdot \Psi_{\alpha,i}(x) \cdot \Psi_{\beta,j}(x).$$

e) $\forall i, j : i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad m_\Psi((i,j)) \in \mathtt{C}^1((\Psi^{\mathtt{k}})^{-1}[B] : \mathbb{R})$.

f) $m_\Psi : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1((\Psi^{\mathtt{k}})^{-1}[B] : \mathbb{R})$.

g) $\Phi \circ \Psi^{\mathtt{k}} \in \mathtt{C}^1((\Psi^{\mathtt{k}})^{-1}[B] : \mathbb{R})$.

h) $L_\Psi : \Omega_\Psi \to \mathbb{R}$,

$$L_\Psi(((t,x),v)) = \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} m_\Psi((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j\right) - (\Phi \circ \Psi^{\mathtt{k}})((t,x)).$$

i) $L_\Psi \in \mathtt{C}^1(\Omega_\Psi : \mathbb{R})$.

j) L_Ψ ist d, Ω_Ψ-Lagrange-Funktion.

<u>Beweis</u> a), b), c), d), e), f), g) trivial.

<u>Beweis</u> h) Rechnung.

<u>Beweis</u> i) trivial. □

4 lf - stnd-3-$m/\Phi(x)$ und pend-1-$m$via$\Phi(x)$

Satz - ebPend

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^3$.

V3. $L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \Phi(x)$.

V4. $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$ und $0 < l \in \mathbb{R}$ und

$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi(\phi) = \mathfrak{p} + l \cdot \cos\phi \cdot \mathfrak{f} + l \cdot \sin\phi \cdot \mathfrak{g}.$$

V5. $0 \neq \Psi^{-1}[O]$.

V6. $\Omega_\Psi = (\Psi^{\mathtt{gg}})^{-1}[\Omega]$ und $L_\Psi = L \circ \Psi^{\mathtt{gg}}$.

$\Rightarrow$

a) L ist $3, \Omega$-Lagrange-Funktion.

b) $\Psi \in \mathtt{C}^{+\infty}(\mathbb{R} : \mathbb{R}^3)$.

c) $0 \neq \Omega_\Psi = (\mathbb{R} \times \Psi^{-1}[O]) \times \mathbb{R}$.

d) $L_\Psi : \Omega_\Psi \to \mathbb{R}$,

$$L_\Psi(((t,\phi),\hat{\phi})) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot|\hat{\phi}|^2 - \Phi(\mathfrak{p}+l\cdot\cos\phi\cdot\mathfrak{f}+l\cdot\sin\phi\cdot\mathfrak{g}).$$

e) Falls γ eine $1,\Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ ist, dann gilt für alle $t\in\mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\begin{aligned}\gamma^{\bullet\bullet}(t) - \frac{\sin\gamma(t)}{m\cdot l}&\cdot\langle(\nabla\Phi)(\mathfrak{p}+l\cdot(\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+l\cdot(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g})|\mathfrak{f}\rangle\\ +\frac{\cos\gamma(t)}{m\cdot l}&\cdot\langle(\nabla\Phi)(\mathfrak{p}+l\cdot(\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+l\cdot(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g})|\mathfrak{g}\rangle = 0,\end{aligned}$$

und es gibt $E_\circ\in\mathbb{R}$, so dass für alle $t\in\mathsf{dom}\,\gamma$,

$$|\gamma^\bullet(t)|^2 + \frac{2}{m\cdot l^2}\cdot\Phi(\mathfrak{p}+l\cdot(\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+l\cdot(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g}) = \frac{2\cdot E_\circ}{m\cdot l^2},$$

und für alle $t\in\mathsf{dom}\,\gamma$ ist

$$\begin{aligned}&\langle(\nabla\Phi)(\mathfrak{p}+l\cdot(\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+l\cdot(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g})|\mathfrak{e}\rangle\cdot\mathfrak{e}\\ &+\langle(\nabla\Phi)(\mathfrak{p}+l\cdot(\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+l\cdot(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g})|(\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g}\rangle\\ &\qquad\cdot((\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g})\\ &\qquad - m\cdot l^2\cdot|\gamma^\bullet(t)|^2\cdot((\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g}),\end{aligned}$$

jene Kraft, die erforderlich ist, um $\Psi\circ\gamma$ zur Zeit t in der Mannigfaltigkeit $\mathsf{ran}\,\Psi\subseteq\mathbb{R}^3$ zu halten.

f) Falls γ eine $1,\Omega_\Psi$-Kurve von L_Ψ ist und falls für alle $t\in\mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\begin{aligned}\gamma^{\bullet\bullet}(t) - \frac{\sin\gamma(t)}{m\cdot l}&\cdot\langle(\nabla\Phi)(\mathfrak{p}+l\cdot(\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+l\cdot(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g})|\mathfrak{f}\rangle\\ +\frac{\cos\gamma(t)}{m\cdot l}&\cdot\langle(\nabla\Phi)(\mathfrak{p}+l\cdot(\cos\gamma(t))\cdot\mathfrak{f}+l\cdot(\sin\gamma(t))\cdot\mathfrak{g})|\mathfrak{g}\rangle = 0,\end{aligned}$$

dann ist γ eine $1,\Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ.

Bewweis a), b), c) trivial.

Beweis d), e), f) Rechnung. □

5 lf - stnd-3-m/Nwt0 und pend-1-$m$viaNwt0

Satz - Nwt0Pend

`V1.` $0 < m, M, G \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{m} \in \mathbb{R}^3$ und $O = \{x : \mathfrak{m} \neq x \in \mathbb{R}^3\}$.

`V2.` $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^3$.

`V3.` $\Phi = \left\{\left(x, -\frac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|}\right) : \mathfrak{m} \neq x \in \mathbb{R}^3\right\}$.

`V3.` $L = \left\{\left(((t, x), v), \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 + \frac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|}\right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge v \in \mathbb{R}^3\right\}$.

`V4.` $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$ und $0 < l \in \mathbb{R}$ und

$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi(\phi) = \mathfrak{p} + l \cdot \cos\phi \cdot \mathfrak{f} + l \cdot \sin\phi \cdot \mathfrak{g}.$$

`V5.` $\Omega_\Psi = (\Psi^{\mathtt{gg}})^{-1}[\Omega]$ und $L_\Psi = L \circ \Psi^{\mathtt{gg}}$.

$\Rightarrow$

`a)` $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^3$ offen.

`b)` $\Phi : O \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = -\frac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|}$.

`c)` $\Phi \in \mathtt{C}^{+\infty}(O : \mathbb{R})$.

`d)` $L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t, x), v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 + \frac{G \cdot m \cdot M}{|x - \mathfrak{m}|} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \Phi(x)$.

`e)` L ist $3, \Omega$-Lagrange-Funktion.

`f)` $\Psi \in \mathtt{C}^{+\infty}(\mathbb{R} : \mathbb{R}^3)$.

`g)` $0 \neq \Omega_\Psi = (\mathbb{R} \times \Psi^{-1}[O]) \times \mathbb{R}$,

$$\text{wobei } \Psi^{-1}[O] = \left\{\phi : \phi \in \mathbb{R} \wedge \frac{1}{l} \cdot (\mathfrak{m} - \mathfrak{p}) \neq (\cos\phi) \cdot \mathfrak{f} + (\sin\phi) \cdot \mathfrak{g}\right\}.$$

`h)` $L_\Psi : \Omega_\Psi \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L_\Psi(((t, \phi), \hat{\phi})) &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot |\hat{\phi}|^2 + \frac{G \cdot m \cdot M}{|\mathfrak{p} - \mathfrak{m} + l \cdot (\cos\phi) \cdot \mathfrak{f} + l \cdot (\sin\phi) \cdot \mathfrak{g}|} \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot |\hat{\phi}|^2 - \Phi(\mathfrak{p} + l \cdot \cos\phi \cdot \mathfrak{f} + l \cdot \sin\phi \cdot \mathfrak{g}). \end{aligned}$$

i) $\nabla\Phi : O \to \mathbb{R}^3, \quad (\nabla\Phi)(x) = G \cdot m \cdot M \cdot \dfrac{x - \mathfrak{m}}{|x - \mathfrak{m}|^3}.$

j) Falls γ eine $1, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ ist, dann gilt für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\gamma^{\bullet\bullet}(t) - \frac{G \cdot M}{l} \cdot \frac{(\sin\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{p} - \mathfrak{m} | \mathfrak{f} \rangle - (\cos\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{p} - \mathfrak{m} | \mathfrak{g} \rangle}{|\mathfrak{p} - \mathfrak{m} + l \cdot (\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + l \cdot (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g}|^3} = 0,$$

und es gibt $E_\circ \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$|\gamma^\bullet(t)|^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{l^2 \cdot |\mathfrak{p} - \mathfrak{m} + l \cdot (\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + l \cdot (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g}|} = \frac{2 \cdot E_\circ}{m \cdot l^2},$$

und für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ ist

$$\begin{aligned} G \cdot m \cdot M \cdot & \frac{\langle \mathfrak{p} - \mathfrak{m} | \mathfrak{e} \rangle}{|\mathfrak{p} - \mathfrak{m} + l \cdot (\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + l \cdot (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g}|^3} \cdot \mathfrak{e} \\ & + G \cdot m \cdot M \cdot \frac{l + \langle \mathfrak{p} - \mathfrak{m} | (\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g} \rangle}{|\mathfrak{p} - \mathfrak{m} + l \cdot (\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + l \cdot (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g}|^3} \\ & \qquad \cdot ((\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g}) \\ & \qquad - m \cdot l^2 \cdot |\gamma^\bullet(t)|^2 \cdot ((\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g}), \end{aligned}$$

jene Kraft, die erforderlich ist, um $\Psi \circ \gamma$ zur Zeit t in der Mannigfaltigkeit $\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \mathbb{R}^3$ zu halten.

k) Falls γ eine $1, \Omega_\Psi$-Kurve von L_Ψ ist und falls für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\gamma^{\bullet\bullet}(t) - \frac{G \cdot M}{l} \cdot \frac{(\sin\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{p} - \mathfrak{m} | \mathfrak{f} \rangle - (\cos\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{p} - \mathfrak{m} | \mathfrak{g} \rangle}{|\mathfrak{p} - \mathfrak{m} + l \cdot (\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + l \cdot (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g}|^3} = 0,$$

dann ist γ eine $1, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ.

<u>Beweis</u> a), b), c), d), e), f), g), h), i) trivial.

<u>Beweis</u> j), k) Rechnung. □

6 lf - stnd-3-m/kK und pend-1-$m$viakK

Satz - kKPend

`V1.` $0 < m, g \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{n} \in \mathbb{R}^3$ und $|\mathfrak{n}| = 1$.

`V2.` $\Omega = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3$.

`V3.` $\Phi = \big\{(x, -m \cdot g \cdot \langle x|\mathfrak{n}\rangle) : x \in \mathbb{R}^3\big\}$.

`V3.` $L = \left\{\left(((t,x),v), \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 + m \cdot g \cdot \langle x|\mathfrak{n}\rangle\right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^3 \wedge v \in \mathbb{R}^3\right\}$.

`V4.` $\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ ONB $\mathbb{R}^3$ und $0 < l \in \mathbb{R}$ und

$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi(\phi) = \mathfrak{p} + l \cdot \cos\phi \cdot \mathfrak{f} + l \cdot \sin\phi \cdot \mathfrak{g}.$$

`V5.` $\Omega_\Psi = (\Psi^{\mathfrak{gg}})^{-1}[\Omega]$ und $L_\Psi = L \circ \Psi^{\mathfrak{gg}}$.

$\Rightarrow$

`a)` $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = -m \cdot g \cdot \langle x|\mathfrak{n}\rangle$.

`b)` $\Phi \in \mathtt{C}^{+\infty}(\mathbb{R}^3 : \mathbb{R})$.

`c)` $L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 + m \cdot g \cdot \langle x|\mathfrak{n}\rangle = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \Phi(x)$.

`d)` L ist $3, \Omega$-Lagrange-Funktion.

`e)` $\Psi \in \mathtt{C}^{+\infty}(\mathbb{R} : \mathbb{R}^3)$.

`f)` $\Omega_\Psi = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$,

`g)` $L_\Psi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & L_\Psi(((t,\phi),\hat{\phi})) \\ & \quad = \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot |\hat{\phi}|^2 + m \cdot g \cdot \langle \mathfrak{p} + l \cdot (\cos\phi) \cdot \mathfrak{f} + l \cdot (\sin\phi) \cdot \mathfrak{g}|\mathfrak{n}\rangle \\ & \qquad = \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot |\hat{\phi}|^2 - \Phi(\mathfrak{p} + l \cdot \cos\phi \cdot \mathfrak{f} + l \cdot \sin\phi \cdot \mathfrak{g}). \end{aligned}$$

`h)` $\nabla\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (\nabla\Phi)(x) = -m \cdot g \cdot \mathfrak{n}$.

`i)` Falls γ eine $1, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ ist und falls $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, dann gilt für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \omega^2 \cdot (\sin\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{n} | \mathfrak{f} \rangle - \omega^2 \cdot (\cos\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{n} | \mathfrak{g} \rangle = 0,$$

und es gibt $E_\circ \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\begin{aligned} &|\gamma^\bullet(t)|^2 - 2 \cdot \omega^2 \cdot (\cos\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{f} | \mathfrak{n} \rangle - 2 \cdot \omega^2 \cdot (\sin\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{g} | \mathfrak{n} \rangle \\ &\qquad = \frac{2 \cdot E_\circ}{m \cdot l^2} + \frac{2 \cdot \omega^2 \cdot \langle \mathfrak{p} | \mathfrak{n} \rangle}{l}, \end{aligned}$$

alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ ist

$$\begin{aligned} &- m \cdot g \cdot \langle \mathfrak{n} | \mathfrak{e} \rangle \cdot \mathfrak{e} \\ &\quad - m \cdot g \cdot \langle \mathfrak{n} | (\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g} \rangle \cdot ((\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g}) \\ &\qquad - m \cdot l^2 \cdot |\gamma^\bullet(t)|^2 \cdot ((\cos\gamma(t)) \cdot \mathfrak{f} + (\sin\gamma(t)) \cdot \mathfrak{g})\,, \end{aligned}$$

jene Kraft, die erforderlich ist, um $\Psi \circ \gamma$ zur Zeit t in der Mannigfaltigkeit $\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \mathbb{R}^3$ zu halten.

`j)` Falls γ eine $1, \Omega_\Psi$-Kurve von L_Ψ ist und falls für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \omega^2 \cdot (\sin\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{n} | \mathfrak{f} \rangle - \omega^2 \cdot (\cos\gamma(t)) \cdot \langle \mathfrak{n} | \mathfrak{g} \rangle = 0,$$

dann ist γ eine $1, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ.

Beweis `a), b), c), d), e), f), g), h)` trivial.

Beweis `i), j)` Rechnung. □

7 lf - 2-fed-1-m/k-2

Satz - 2fed

V1. $0 < m, k \in \mathbb{R}$ und $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$.

V3. $L = \left\{ \left(((t,x),v), \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot |x|^2 \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^2 \wedge v \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

$\Rightarrow$

a) $L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t,x),v)) = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot |x|^2$.

b) L ist $2, \Omega$-Lagrange-Funktion.

c) Falls γ eine $2, \Omega$-Zustandskurve von L ist, dann gilt

$$\forall t, s : t, s \in \mathsf{dom}\, \gamma$$

$$\Rightarrow \quad \gamma(t) = (\cos(\omega \cdot (t-s)) \cdot \gamma(s) + \frac{\sin(\omega \cdot (t-s))}{\omega} \cdot \gamma^\bullet(s),$$

und

$$\forall t, s : t, s \in \mathsf{dom}\, \gamma \quad \Rightarrow \quad |\gamma^\bullet(t)|^2 + \omega^2 \cdot |\gamma(t)|^2 = |\gamma^\bullet(s)|^2 + \omega^2 \cdot |\gamma(s)|^2.$$

d) Falls I echtes, reelles Intervall, $s \in I$, $x_\circ, v_\circ \in \mathbb{R}^2$ und falls

$$\gamma = \left\{ \left(t, \cos(\omega \cdot (t-s)) \cdot x_\circ + \frac{\sin(\omega \cdot (t-s))}{\omega} \cdot v_\circ \right) : t \in I \right\},$$

dann

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \cos(\omega \cdot (t-s)) \cdot x_\circ + \frac{\sin(\omega \cdot (t-s))}{\omega} \cdot v_\circ,$$

und γ ist $2, \Omega$-Zustandskurve von L und

$$\gamma(s) = x_\circ, \quad \gamma^\bullet(s) = v_\circ,$$

und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad |\gamma^\bullet(t)|^2 + \omega^2 \cdot |\gamma(t)|^2 = |v_\circ|^2 + \omega^2 \cdot |x_\circ|^2.$$

`e)` Falls I echtes, reelles Intervall, $\phi_\circ \in \mathbb{R}$, $x_\circ, v_\circ \in \mathbb{R}^2$ und falls

$$\gamma = \left\{ \left(t, \cos(\phi_\circ + \omega \cdot t) \cdot x_\circ + \frac{\sin(\phi_\circ + \omega \cdot t)}{\omega} \cdot v_\circ \right) : t \in I \right\},$$

dann

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \cos(\phi_\circ + \omega \cdot t) \cdot x_\circ + \frac{\sin(\phi_\circ + \omega \cdot t)}{\omega} \cdot v_\circ,$$

und γ ist $2, \Omega$-Zustandskurve von L und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad |\gamma^\bullet(t)|^2 + \omega^2 \cdot |\gamma(t)|^2 = |v_\circ|^2 + \omega^2 \cdot |x_\circ|^2.$$

<u>Beweis</u> `a), b)` trivial.

<u>Beweis</u> `c), d), e)` Rechnung. $\square$

8 lf - 2-polfed-1-m/k-2

Satz - pol2fed

V1. $0 < m, k \in \mathbb{R}$ und $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$.

V3. $L = \left\{ \left(((t, x), v), \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot |x|^2 \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^2 \wedge v \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

V4. $\Psi = \{((r, \phi), (r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi)) : (r, \phi) \in \mathbb{R}^2\}$.

V5. $W = \mathbb{R}^2$.

V6. $\Omega_\Psi = (\Psi^{\mathsf{gg}})^{-1}[\Omega]$ und $L_\Psi = L \circ \Psi^{\mathsf{gg}}$.

$\Rightarrow$

a) $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Psi \in \mathtt{C}^{+\infty}(W : \mathbb{R}^2)$.

b) $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \Psi((r, \phi)) = (r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi)$.

c) $\Psi^{\mathsf{gg}} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$,

$$\Psi^{\mathsf{gg}}(((t, (r, \phi)), (\hat{r}, \hat{\phi}))) = ((t, \Psi((r, \phi))), \hat{r} \cdot (\cos \phi, \sin \phi) + r \cdot \hat{\phi} \cdot (-\sin \phi, \cos \phi)).$$

d) $\Omega_\Psi = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$.

e) $L_\Psi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$L_\Psi(((t, (r, \phi)), (\hat{r}, \hat{\phi}))) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\hat{r}^2 + r^2 \cdot \hat{\phi}^2 \right) - \frac{1}{2} \cdot k \cdot r^2.$$

f) Falls γ eine $2, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ ist und falls $0 \neq \gamma_1$ auf $\mathsf{dom}\, \gamma$ gilt, dann ist $\Psi \circ \gamma$ eine $2, \Omega$-Zustandskurve von L.

g) Falls γ eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist und falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, \gamma \Rightarrow \gamma_1^{\bullet\bullet}(t) = \gamma_1(t) \cdot \left(-\omega^2 + (\gamma_2^{\bullet})^2 (t) \right) \quad \wedge \quad 0 = \left(\gamma_1^2 \cdot \cdot \gamma_2^{\bullet} \right)^{\bullet} (t),$$

dann ist γ eine $2, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ.

h) Falls $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ und falls ρ eine 2-Kurve in $\mathbb{R}$ ist und falls

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\rho \quad \Rightarrow \quad \rho^{\bullet\bullet}(t) = -\omega^2 \cdot \rho(t) + \frac{\mu^2}{\rho^3(t)},$$

und falls $0 \neq \rho(s)$ für mindestens ein $s \in \mathsf{dom}\,\rho$, dann

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\rho \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \rho(t),$$

und es gibt $E_\circ$ mit $0 < \omega \cdot |\mu| \leq E_\circ \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\rho \quad \Rightarrow \quad (\rho^\bullet(t))^2 + \omega^2 \cdot \rho^2(t) + \frac{\mu^2}{\rho^2(t)} = 2 \cdot E_\circ,$$

und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\rho \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{E_\circ}}{\omega} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \cdot \mu}{E_\circ}\right)^2}} \leq |\rho(t)| \leq \frac{\sqrt{E_\circ}}{\omega} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \cdot \mu}{E_\circ}\right)^2}},$$

wobei

$$0 < \frac{\sqrt{E_\circ}}{\omega} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \cdot \mu}{E_\circ}\right)^2}} \leq \frac{\sqrt{E_\circ}}{\omega} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \cdot \mu}{E_\circ}\right)^2}} \in \mathbb{R},$$

und falls $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\rho$ und $\psi_\circ \in \mathbb{R}$, so ist

$$\psi = \left\{ \left(t, \phi_\circ + \int_{t_\circ}^{t} \frac{\mu}{\rho^2} \right) : t \in \mathsf{dom}\,\rho \right\},$$

eine Stammfunktion von $\dfrac{\mu}{\rho^2}$ auf $\mathsf{dom}\,\rho$ mit

$$\psi \in \mathtt{C}^2(\mathsf{dom}\,\rho : \mathbb{R}), \quad \psi(t_\circ) = \psi_\circ, \quad \psi^\bullet(t_\circ) = \frac{\mu}{\rho^2(t_\circ)},$$

und

$$\gamma = \{(t, (\rho(t), \psi(t)) : t \in \mathsf{dom}\,\rho\},$$

ist eine $2, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ und $\Psi \circ \gamma$ ist eine $2, \Omega$-Zustandskurve von L.

i) Falls $\rho_\circ, \phi_\circ, \psi_\circ \in \mathbb{R}$, falls I ein echtes reelles Intervall, falls

$$\rho = \{(t, \rho_\circ \cdot \cos(\phi_\circ + \omega \cdot t)) : t \in I\},$$

falls

$$\psi = \psi_\circ^{on} I,$$

und falls

$$\gamma = \{(t, (\rho(t), \psi(t)) : t \in I\},$$

dann gilt $\rho \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R})$

$$\rho : I \to \mathbb{R}, \quad \rho(t) = \rho_\circ \cdot \cos(\phi_\circ + \omega \cdot t),$$

und γ ist eine $2, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ und $\Psi \circ \gamma \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R}^2)$ und

$$\Psi \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^2, \quad (\Psi \circ \gamma)(t) = \rho_\circ \cdot \cos(\phi_\circ + \omega \cdot t) \cdot (\cos \psi_\circ, \sin \psi_\circ),$$

und $\Psi \circ \gamma$ ist $2, \Omega$-Zustandskurve von L.

`j)` Falls γ eine $2, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ ist, dann gilt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$$
$$\Rightarrow \quad \gamma_1^{\bullet\bullet}(t) = \gamma_1(t) \cdot \left(-\omega^2 + (\gamma_2^\bullet)^2(t)\right) \quad \wedge \quad 0 = \left(\gamma_1^2 \cdot \cdot \gamma_2^\bullet\right)^\bullet(t).$$

<u>Beweis</u> `a)`, `b)` trivial.

<u>Beweis</u> `c)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `d)` trivial.

<u>Beweis</u> `e)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `f)` Via **Satz - KT** in L_Ψ gilt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad (\mathtt{P}\Psi)(\gamma(t))(\Delta(t)) = \mathfrak{o}^2,$$

wobei Δ die $2, \Omega, L$-ELK von $\Psi \circ \gamma$ ist. Für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$ ist $(\mathtt{P}\Psi)(\gamma(t))$ die Projektion des $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{H}[\{\Psi_{,1}(\gamma(t)), \Psi_{,2}(\gamma(t))\}]$, wobei

$$\Psi_{,1}(\gamma(t)) = (\cos(\gamma_2(t)), \sin(\gamma_2(t))), \quad \Psi_{,2}(\gamma(t)) = \gamma_1(t) \cdot (-\sin(\gamma_2(t)), \cos(\gamma_2(t)),$$

für $0 \neq \gamma_1(t)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. Somit gilt im vorliegenden Fall

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{o}^2 = \Delta(t).$$

<u>Beweis</u> `g)`, `h)`, `i)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `j)` trivial. $\square$

⋆

<u>Bemerkung</u> Ungeachtet klassischer Interpretationen ist die Funktion ρ von `i)` für $0 \neq \rho_\circ$ und $\pi <$Länge von I auf echten Teilintervallen von I negativ. Auch hat die Funktion ρ in diesen Fällen mindestens eine Nullstelle in I, so dass `f)` nicht zur Anwendung kommt. Dennoch ist $\Psi \circ \gamma$ eine $2, \Omega$-Zustandskurve von L.

9 lf - ebpendgerfü-$m_1 m_2 l$viakK

Satz - epgfk

V1. $0 < m_1, m_2, l, g \in \mathbb{R}$ und $m = m_1 + m_2$ und $\theta = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$ und $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

V2. $\mathtt{P}_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\mathtt{P}_1((z_1, z_2, z_3, z_r)) = (z_1, z_2)$ und $\mathtt{P}_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\mathtt{P}_2((z_1, z_2, z_3, z_r)) = (z_3, z_4)$.

V3. $\Omega = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$.

V4. $$L = \Bigg\{ \Bigg(((t, x), v), \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot |\mathtt{P}_1(v)|^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot |\mathtt{P}_2(v)|^2 + m_1 \cdot g \cdot \langle \mathtt{P}_1(x) | \mathfrak{e}_1^2 \rangle + m_2 \cdot g \cdot \langle \mathtt{P}_2(x) | \mathfrak{e}_1^2 \rangle \Bigg) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^4 \wedge v \in \mathbb{R}^4 \Bigg\}.$$

V5. $\Psi = \{(((z, \phi), (l \cdot \cos\phi, z + l \cdot \sin\phi, 0, z)) : z \in \mathbb{R} \wedge \phi \in \mathbb{R}\}$.

V6. $W = \mathbb{R}^2$.

V7. $\Omega_\Psi = (\Psi^{\mathrm{gg}})^{-1}[\Omega]$ und $L_\Psi = L \circ \Psi^{\mathrm{gg}}$.

$\Rightarrow$

a) $0 < m, \omega \in \mathbb{R}$ und $0 < \theta < 1$ und $0 < 1 - \theta = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} < 1$.

b) $L \in \mathtt{C}^{+\infty}(\Omega : \mathbb{R})$ und

$$L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t, x), v)) = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot |\mathtt{P}_1(v)|^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot |\mathtt{P}_2(v)|^2 + m_1 \cdot g \cdot \langle \mathtt{P}_1(x) | \mathfrak{e}_1^2 \rangle + m_2 \cdot g \cdot \langle \mathtt{P}_2(x) | \mathfrak{e}_1^2 \rangle.$$

c) L ist $4, \Omega$-Lagrange-Funktion.

d) E ist $4, \Omega$-Energie von L

$$\Leftrightarrow \quad E : \Omega \to \mathbb{R}, \quad E(((t, x), v)) = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot |\mathtt{P}_1(v)|^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot |\mathtt{P}_2(v)|^2 - m_1 \cdot g \cdot \langle \mathtt{P}_1(x) | \mathfrak{e}_1^2 \rangle - m_2 \cdot g \cdot \langle \mathtt{P}_2(x) | \mathfrak{e}_1^2 \rangle.$$

e) $0 \neq W \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Psi \in \mathtt{C}^{+\infty}(W : \mathbb{R}^4)$.

f) $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad \Psi((z,\phi)) = (l \cdot \cos\phi, z + l \cdot \sin\phi, 0, z).$

g) $\Psi^{\mathtt{gg}} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4) \times \mathbb{R}^4,$

$$\Psi^{\mathtt{gg}}(((t,(z,\phi)),(\hat{z},\hat{\phi})) = ((t,\Psi((z,\phi))),(-l \cdot \hat{\phi} \cdot \sin\phi, \hat{z} + l \cdot \hat{\phi} \cdot \cos\phi, 0, \hat{z})).$$

h) $\Omega_\Psi = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2.$

i) $L_\Psi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} L_\Psi((t,(z,\phi)),(\hat{z},\hat{\phi})) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \hat{z}^2 + m_1 \cdot l \cdot (\cos\phi) \cdot \hat{z} \cdot \hat{\phi} + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot l^2 \cdot \hat{\phi}^2 \\ + m_1 \cdot g \cdot l \cdot \cos\phi \end{aligned}$$

j) E_Ψ ist $2, \Omega_\Psi$-Energie von L_Ψ

$$\Leftrightarrow \quad E_\Psi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} E_\Psi((t,(z,\phi)),(\hat{z},\hat{\phi})) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \hat{z}^2 + m_1 \cdot l \cdot (\cos\phi) \cdot \hat{z} \cdot \hat{\phi} + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot l^2 \cdot \hat{\phi}^2 \\ - m_1 \cdot g \cdot l \cdot \cos\phi. \end{aligned}$$

k) Falls γ eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist, falls $p = \gamma_1$, $\alpha = \gamma_2$ und falls

$$\begin{aligned} &\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \\ &\Rightarrow \quad p^{\bullet\bullet}(t) = \theta \cdot l \cdot \sin(\alpha(t)) \cdot \frac{(\alpha^\bullet(t))^2 + \omega^2 \cdot \cos(\alpha(t))}{1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha(t))} \\ &\wedge \quad \alpha^{\bullet\bullet}(t) = -\sin(\alpha(t)) \cdot \frac{\theta \cdot (\alpha^\bullet(t))^2 \cdot \cos(\alpha(t)) + \omega^2}{1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha(t))}, \end{aligned}$$

dann ist γ eine $2, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ und $\exists E_\circ$, so dass $E_\circ \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} &\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot (p^\bullet(t))^2 + m_1 \cdot l \cdot \cos(\alpha(t)) \cdot p^\bullet(t) \cdot \alpha^\bullet(t) + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot l^2 \cdot (\alpha^\bullet(t))^2 \\ &\qquad - m_1 \cdot g \cdot l \cdot \cos(\alpha(t)) = E_\circ. \end{aligned}$$

l) Falls γ eine $2, \Omega_\Psi$-Zustandskurve von L_Ψ ist und falls $p = \gamma_1, \alpha = \gamma_2$, dann gilt

$$\begin{aligned} &\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \\ &\Rightarrow \quad p^{\bullet\bullet}(t) = \theta \cdot l \cdot \sin(\alpha(t)) \cdot \frac{(\alpha^\bullet(t))^2 + \omega^2 \cdot \cos(\alpha(t))}{1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha(t))} \\ &\wedge \quad \alpha^{\bullet\bullet}(t) = -\sin(\alpha(t)) \cdot \frac{\theta \cdot (\alpha^\bullet(t))^2 \cdot \cos(\alpha(t)) + \omega^2}{1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha(t))}, \end{aligned}$$

und $\exists E_\circ$, so dass $E_\circ \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}
&\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \\
\Rightarrow\quad &\frac{1}{2}\cdot m\cdot(p^\bullet(t))^2 + m_1\cdot l\cdot\cos(\alpha(t))\cdot p^\bullet(t)\cdot\alpha^\bullet(t) + \frac{1}{2}\cdot m_1\cdot l^2\cdot(\alpha^\bullet(t))^2 \\
&\qquad - m_1\cdot g\cdot l\cdot\cos(\alpha(t)) = E_\circ.
\end{aligned}$$

`m)` Falls γ eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist, falls $p = \gamma_1$, $\alpha = \gamma_2$, falls

$$\begin{aligned}
&\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \\
&\Rightarrow\quad p^{\bullet\bullet}(t) = \theta\cdot l\cdot\sin(\alpha(t))\cdot\frac{(\alpha^\bullet(t))^2 + \omega^2\cdot\cos(\alpha(t))}{1-\theta\cdot\cos^2(\alpha(t))} \\
&\wedge\quad \alpha^{\bullet\bullet}(t) = -\sin(\alpha(t))\cdot\frac{\theta\cdot(\alpha^\bullet(t))^2\cdot\cos(\alpha(t)) + \omega^2}{1-\theta\cdot\cos^2(\alpha(t))},
\end{aligned}$$

falls I echtes reelles Intervall mit $I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und

$$\forall t : t \in I \quad\Rightarrow\quad 0 = p^{\bullet\bullet}(t) \vee 0 = \alpha^{\bullet\bullet}(t),$$

dann

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad\Rightarrow\quad 0 = p^{\bullet\bullet}(t) \wedge 0 = \alpha^{\bullet\bullet}(t),$$

und

$$\exists n : n \in \mathbb{Z} \quad\wedge\quad \alpha = (n\cdot\pi)^{on}\mathsf{dom}\,\gamma.$$

`n)` Falls I echtes reelles Intervall, falls $p_\circ, p_1 \in \mathbb{R}$, falls $n \in \mathbb{Z}$, falls

$$p = \left\{(t, p_\circ + t\cdot p_1) : t \in I\right\},$$

und falls $\alpha = (n\cdot\pi)^{on}I$ dann ist p eine 2-Kurve in $\mathbb{R}$ und α ist eine 2-Kurve in $\mathbb{R}$ und $p \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R})$ und

$$\forall t : t \in I \quad\Rightarrow\quad p_\circ + t\cdot p_1 = p(t),\quad 0 = p^{\bullet\bullet}(t),$$

$$\forall t : t \in I \quad\Rightarrow\quad n\cdot\pi = \alpha(t),\quad 0 = \alpha^{\bullet\bullet}(t),$$

und

$$\begin{aligned}
\forall t : t \in \mathsf{dom}\,I \Rightarrow\quad &p^{\bullet\bullet}(t) = \theta\cdot l\cdot\sin(\alpha(t))\cdot\frac{(\alpha^\bullet(t))^2 + \omega^2\cdot\cos(\alpha(t))}{1-\theta\cdot\cos^2(\alpha(t))} \\
\wedge\quad &\alpha^{\bullet\bullet}(t) = -\sin(\alpha(t))\cdot\frac{\theta\cdot(\alpha^\bullet(t))^2\cdot\cos(\alpha(t)) + \omega^2}{1-\theta\cdot\cos^2(\alpha(t))}.
\end{aligned}$$

<u>Beweis</u> `a), b), c), d), e), f), g), h)` trivial.

<u>Beweis</u> `i), j), k), l)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `m)`

<u>1.Fall</u> $\forall t : t \in I \Rightarrow 0 = p^{\bullet\bullet}(t)$ und $\exists \tau : \tau \in I \wedge 0 \neq \alpha^{\bullet\bullet}(\tau)$.
Dann gibt es echtes reelles Intervall J mit $J \subseteq I$ und $0 \neq \alpha^{\bullet\bullet}$ auf J. Aus zweiter ODE folgt $0 \neq \sin\alpha \cdot (\theta \cdot (\alpha^\bullet)^2 + \omega^2)$ auf J und somit $0 \neq \sin\alpha$ auf J. Demnach via erster ODE und $0 = p^{\bullet\bullet}$ auf I und $J \subseteq I$, $0 = (\alpha^\bullet)^2 + \omega^2 \cdot \cos\alpha$ auf J. Hieraus durch Differenzieren: $0 = \alpha^\bullet \cdot (2 \cdot \alpha^{\bullet\bullet} - \omega^2 \cdot \sin\alpha)$ auf J. Wegen $0 \neq \alpha^{\bullet\bullet}$ auf J ist $(0 < \alpha^{\bullet\bullet}$ auf $J) \vee (\alpha^{\bullet\bullet} < 0$ auf $J)$ und somit ist $\alpha^\bullet$ streng monoton auf J. Damit hat $\alpha^\bullet$ höchstens eine Nullstelle in J und da $2 \cdot \alpha^{\bullet\bullet} - \omega^2 \cdot \cos\alpha$ stetig auf J ist und abseits jeder Nullstelle von $\alpha^\bullet$ gleich 0 ist, gilt $0 = 2 \cdot \alpha^{\bullet\bullet} - \omega^2 \cdot \sin\alpha$ auf J. Es folgt $\alpha^{\bullet\bullet} = (\omega^2/2) \cdot \sin\alpha$ auf J und nun via zweiter ODE,

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad (1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha(t))) \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \sin(\alpha(t)) \\ = -\sin(\alpha(t)) \cdot \left(\theta \cdot (\alpha^\bullet(t))^2 \cdot \cos(\alpha(t)) + \omega^2\right),$$

woraus via $0 \neq \sin\alpha$ auf J die Aussage

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad (1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha(t))) \cdot \frac{\omega^2}{2} = -\theta \cdot (\alpha^\bullet(t))^2 \cdot \cos(\alpha(t)) - \omega^2,$$

folgt, woraus sich via $0 = (\alpha^\bullet)^2 + \omega^2 \cdot \cos\alpha$ auf J - siehe oben -

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad (1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha(t))) \cdot \frac{\omega^2}{2} = \theta \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\alpha(t)) - \omega^2,$$

ergibt. Nach Division durch ω^2 und Multiplikation mit 2 ergibt sich

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad 1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha(t)) = 2 \cdot \theta \cdot \cos^2(\alpha(t)) - 2,$$

so dass

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad 1 = \theta \cdot \cos^2(\alpha(t)),$$

folgt, was $0 < \theta < 1$ widerspricht. Konsequenz: $\forall t : t \in I \Rightarrow 0 = \alpha^{\bullet\bullet}(t)$.

<u>2.Fall</u> $\exists \tau : \tau \in I \wedge 0 \neq p^{\bullet\bullet}(\tau)$ und $\forall t : t \in I \Rightarrow 0 = \alpha^{\bullet\bullet}(t)$.
Dann gibt es echtes reelles Intervall J mit $J \subseteq I$ und $0 \neq p^{\bullet\bullet}$ auf J. Aus erster ODE folgt $0 \neq \theta \cdot l \cdot \sin\alpha \cdot ((\alpha^\bullet)^2 + \omega^2 \cdot \cos\alpha)$ auf J und somit $0 \neq \sin\alpha$ auf J. Demnach via zweiter ODE und $0 = \alpha^{\bullet\bullet}$ auf I und $J \subseteq I$, $0 = \theta \cdot (\alpha^\bullet)^2 \cdot \cos\alpha + \omega^2$ auf J. Hieraus durch Differenzieren: $0 = 2 \cdot \theta \cdot \alpha^\bullet \cdot \alpha^{\bullet\bullet} \cdot \cos\alpha - \theta \cdot (\alpha^\bullet)^3 \cdot \sin\alpha$ auf J, woraus wegen $0 = \alpha^{\bullet\bullet}$ auf I und $J \subseteq I$,

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad 0 = -\theta \cdot (\alpha^\bullet)^3 \cdot \sin\alpha,$$

folgt. Wegen $0 \neq \sin\alpha$ auf J ergibt sich hieraus $0 = \alpha^\bullet$ auf J, woraus wegen $0 = \theta \cdot (\alpha^\bullet)^2 \cdot \cos\alpha + \omega^2$ auf J - siehe oben - die Aussage $0 = \omega^2$ folgt, die $0 < \omega^2$ widerspricht. Konsequenz: $\forall t : t \in I \Rightarrow 0 = p^{\bullet\bullet}(t)$.

Ab nun kann von

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad 0 = p^{\bullet\bullet}(t) = \alpha^{\bullet\bullet}(t),$$

ausgegangen werden.

<u>3.Fall</u> $\forall t : t \in I \Rightarrow 0 = p^{\bullet\bullet}(t) = \alpha^{\bullet\bullet}(t)$ und $\exists \tau : \tau \in I \wedge 0 \neq \sin(\alpha(\tau))$.
Dann gibt es echtes reelles Intervall J mit $J \subseteq I$ und $0 \neq \sin\alpha$ auf J. Aus den ODEs folgt

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad 0 = (\alpha^\bullet(t))^2 + \omega^2 \cdot \cos(\alpha(t)) = \theta \cdot (\alpha^\bullet(t))^2 \cdot \cos(\alpha(t)) + \omega^2,$$

woraus sich

$$\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad (\alpha^\bullet(t))^2 = -\omega^2 \cdot \cos(\alpha(t)),$$

ergibt und

$$\begin{aligned}\forall t : t \in J \quad \Rightarrow \quad 0 &= \theta \cdot (\alpha^\bullet(t))^2 \cdot \cos(\alpha(t)) + \omega^2 \\ &= -\theta \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\alpha(t)) + \omega^2 = \omega^2 \cdot (1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha(t))),\end{aligned}$$

erscheint, woraus sich via $0 \neq J$ die Aussage $0 = \omega^2$ ergibt.
Konsequenz: $\forall t : t \in J \Rightarrow 0 = \sin(\alpha(t))$.

Somit gibt es, da α stetig ist, ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad n \cdot \pi = \alpha(t).$$

Aus $0 = p^{\bullet\bullet}$ auf I folgt,

$$\exists p_\circ, p_1 : p_\circ, p_1 \in \mathbb{R} \wedge \forall t : t \in I \Rightarrow p(t) = p_\circ + t \cdot p_1.$$

Falls

$$p^* : \mathsf{dom}\,\gamma \to \mathbb{R}, \quad p^*(t) = p_\circ + t \cdot p_1,$$

und

$$\alpha^* = (n \cdot \pi)^{on}(\mathsf{dom}\,\gamma),$$

dann gilt trivialer Weise

$$\begin{aligned}&\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \\ &\quad \Rightarrow \quad (p^*)^{\bullet\bullet}(t) = \theta \cdot l \cdot \sin(\alpha^*(t)) \cdot \frac{((\alpha^*)^\bullet(t))^2 + \omega^2 \cdot \cos(\alpha^*(t))}{1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha^*(t))} \\ &\qquad \wedge \quad (\alpha^*)^{\bullet\bullet}(t) = -\sin(\alpha^*(t)) \cdot \frac{\theta \cdot ((\alpha^*)^\bullet(t))^2 \cdot \cos(\alpha^*(t)) + \omega^2}{1 - \theta \cdot \cos^2(\alpha^*(t))},\end{aligned}$$

und p^*, α^* setzen p, α von I auf $\mathsf{dom}\,\gamma$ fort. Via Eindeutigkeitsresultaten der elementaren Theorie von ODEs folgt $p = p^*$ und $\alpha = \alpha^*$, so dass im Speziellen

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 0 = p^{\bullet\bullet}(t) = \alpha^{\bullet\bullet}(t),$$

und

$$\alpha = (n \cdot \pi)^{on}(\mathsf{dom}\,\gamma),$$

folgt.

Beweis `n)` trivial. $\square$