Lagrange-Mechanik 3

Andreas Unterreiter

20. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 $\gamma^{\bullet\bullet} + \omega^2 \cdot \gamma = 0$ und Energiegleichung **2**
1.1 A posteriori. $E_\circ - \Phi(\gamma) = 0$ und nicht zweimal differenzierbar. . . 2

2 $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ und Energiegleichung (+2) **4**
2.1 A posteriori. γ konstant und keine ODE 4
2.2 A posteriori. $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ am Rand von I 5
2.3 A posteriori. $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ am Rand von I. Λ. 7

3 $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ und Energiegleichung (+3). $0 = T''(0)$ **und $E_\circ = \Phi(\eta)$ und $0 \neq \Phi'(\eta)$.** **13**
3.1 A posteriori 13
3.2 A priori 15
3.3 A posteriori. Λ 16

4 $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ und Energiegleichung (+4) **20**
4.1 A posteriori. γ bei $\pm\infty$ reell 20
4.2 A posteriori. γ bei $\pm\infty$ reell. Λ 25
4.3 A posteriori. γ bei $\pm\infty$ gleich $\pm\infty$ 32
4.4 A posteriori. γ bei $\pm\infty$ gleich $\pm\infty$. Λ 34

5 $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ und Energiegleichung (+5) **35**
5.1 A posteriori. γ bei $t_\circ$ gleich $\pm\infty$ 35
5.2 A posteriori. γ bei $t_\circ$ gleich $\pm\infty$. Λ 37

1 $\gamma^{\bullet\bullet} + \omega^2 \cdot \gamma = 0$ und Energiegleichung

1.1 A posteriori. $E_\circ - \Phi(\gamma) = 0$ und nicht zweimal differenzierbar.

Satz lm3.1

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$ und $0 < k \in \mathbb{R}$ und $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

V2. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \frac{k}{2} \cdot |x|^2$.

V3. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(v) = \frac{1}{2} \cdot |v|^2$ und $\tilde{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

V4. $0 < E_\circ \in \mathbb{R}$.

V5. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_\circ}{m}} & , \quad t \leq -\frac{\pi}{2 \cdot \omega} \\ \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_\circ}{m}} \cdot \sin(\omega \cdot t) & , \quad -\frac{\pi}{2 \cdot \omega} < t < \frac{\pi}{2 \cdot \omega} \\ \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_\circ}{m}} & , \quad \frac{\pi}{2 \cdot \omega} \leq t \end{cases}$

$\Rightarrow$

a) $\Phi \in \mathtt{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$.

b) $T \in \mathtt{C}^2(] - \infty | + \infty [: \mathbb{R})$ und $\tilde{T} = T$.

c) γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$.

d) $\gamma^\bullet : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \gamma^\bullet(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq -\frac{\pi}{2 \cdot \omega} \\ \sqrt{\frac{2 \cdot E_\circ}{m}} \cdot \cos(\omega \cdot t) & , \quad -\frac{\pi}{2 \cdot \omega} < t < \frac{\pi}{2 \cdot \omega} \\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2 \cdot \omega} \leq t \end{cases}$

e) $\forall t : t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad |\gamma^\bullet(t)|^2 + \omega^2 \cdot |\gamma(t)|^2 = 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

f) $\gamma^\bullet$ nicht differenzierbar in $-\frac{\pi}{2 \cdot \omega}$ und in $\frac{\pi}{2 \cdot \omega}$.

g) $\neg(\gamma$ ist 2-Kurve in $\mathbb{R})$.

h) $\gamma^{\bullet\bullet} : \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{\pi}{2 \cdot \omega}\right\} \to \mathbb{R}$,

$$\gamma^{\bullet\bullet}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -\frac{\pi}{2 \cdot \omega} \\ -\omega \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_\circ}{m}} \cdot \sin(\omega \cdot t) & , \quad -\frac{\pi}{2 \cdot \omega} < t < \frac{\pi}{2 \cdot \omega} \\ 0 & , \quad \frac{\pi}{2 \cdot \omega} < t \end{cases}$$

`i)` $\neg\Big(\forall t : t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t) = 0\Big).$

`j)` $\forall t : t \in \,]-\frac{\pi}{2\cdot\omega}|\frac{\pi}{2\cdot\omega}[\quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t) = 0.$

`k)` $\forall t : t \in \mathbb{R} \setminus \,]-\frac{\pi}{2\cdot\omega}|\frac{\pi}{2\cdot\omega}[\quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t) \neq 0.$

Beweis `a), b)` trivial.

Beweis `c), d), e), f)` Rechnung.

Beweis `g), h)` trivial.

Beweis `i)` Es gilt $\frac{\pi}{2\cdot\omega} \in \mathbb{R}$, jedoch $\frac{\pi}{2\cdot\omega} \notin \mathsf{dom}\,(\gamma^{\bullet\bullet})$, so dass

$$\gamma^{\bullet\bullet}\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega}\right) = \mathcal{U},$$

wobei $\mathcal{U}$ das Universum ist. $\mathcal{U}$ ist eine Unmenge. Es folgt

$$T''\left(\gamma^\bullet\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega}\right)\right) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega}\right) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2\cdot\omega}\right)\right)$$

$$= 2 \cdot \mathcal{U} + \frac{1}{m} \cdot k \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_\circ}{m}} = \mathcal{U} + \omega^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_\circ}{m}} = \mathcal{U} \neq 0.$$

Beweis `j), k)` Rechnung. $\square$

2 $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ und Energiegleichung (+2)

2.1 A posteriori. γ konstant und keine ODE

Satz

`V1.` $0<m\in\mathbb{R}$.

`V2.` $0\neq O\subseteq\mathbb{R}$ offen. $\Phi\in\mathtt{C}^1(O:\mathbb{R})$.

`V3.` $0<a$ und $0<b$ und $T\in\mathtt{C}^2(]-a|b[:\mathbb{R})$ und $0=T(0)$ und $\tilde{T}:]-a|b[\to\mathbb{R}$, $\tilde{T}(v)=v\cdot T'(v)-T(v)$.

`V3.` $E_\circ\in\mathbb{R}$.

`V4.` $x_\circ\in O$ und $E_\circ=\Phi(x_\circ)$ und $0\neq\Phi'(x_\circ)$.

`V5.` J echtes reelles Intervall.

`V6.` $\gamma=x_\circ^{on}J$, wobei $x_\circ^{on}J:J\to\mathbb{R}$, $x_\circ^{on}J(t)=x_\circ$.

$\Rightarrow$

`a)` $0=\tilde{T}(0)$.

`b)` γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$.

`c)` $\forall t:t\in\mathsf{dom}\,\gamma\quad\Rightarrow\quad 2\cdot\tilde{T}(\gamma^\bullet(t))+\dfrac{2}{m}\cdot\Phi(\gamma(t))=\dfrac{2\cdot E_\circ}{m}$.

`d)` $\forall t:t\in\mathsf{dom}\,\gamma\quad\Rightarrow\quad \tilde{T}(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t)+\dfrac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\neq 0$.

<u>Beweis</u> trivial. $\square$

$\star$

2.2 A posteriori. $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ am Rand von I

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V3. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(] - a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $] - a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :] - a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$ und $w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft [0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft] - a|0]\right)^{-1}$.

V4. γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

V5. $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \frac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

V6. $t_\circ \in I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und $t_\circ$ ist Randpunkt von I und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $I \setminus \{t_\circ\}$.

V7. $\lambda \in \{\pm 1\}$ und $\lambda = \mathsf{sgn}\,(\gamma^\bullet)$ auf $I \setminus \{t_\circ\}$.

$\Rightarrow$

a) $w_\lambda \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.)) \right)$ stetig und $\neq 0$ auf $I \setminus \{t_\circ\}$.

b) Falls $s \in I \setminus \{t_\circ\}$, dann

$$\int_{\gamma(s)}^{\gamma(t_\circ)} \frac{dx}{w_\lambda \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)) \right)} \in \mathbb{R},$$

und

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(t)}^{\gamma(t_\circ)} \frac{dx}{w_\lambda \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)) \right)} = t_\circ - t.$$

c) γ ist zweimal stetig differenzierbar auf $I \setminus \{t_\circ\}$.

d) $\forall t : t \in I \setminus \{t_\circ\} \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0$.

e) $\lim_{t \to t_\circ} T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t_\circ))$.

<u>Beweis</u> a) Via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ evident.

<u>Beweis</u> `b), c), d), e)` $I \setminus \{t_\circ\}$ ist ein echtes reelles Intervall$\subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und es gilt $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $I \setminus \{t_\circ\}$. Somit gilt via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **(+1) A posteriori**

$$\forall t : t \in I \setminus \{t_\circ\} \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)\right)} = t - s.$$

Da $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma$ und da γ stetig ist folgt hieraus

$$\int_{\gamma(s)}^{\gamma(t_\circ)} \frac{dx}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)\right)} = \lim_{t \uparrow t_\circ} \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)\right)} = t_\circ - s \in \mathbb{R},$$

so dass nun auch

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)\right)} = t - s,$$

und somit

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(t)}^{\gamma(t_\circ)} \frac{dx}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)\right)}$$
$$= \left(\int_{\gamma(s)}^{\gamma(t_\circ)} \frac{dx}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)\right)}\right) - \left(\int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dx}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)\right)}\right)$$
$$= (t_\circ - s) - (t - s) = t_\circ - t.$$

Weiterhin folgt aus $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **(+1) A posteriori**, dass γ auf $I \setminus \{t_\circ\}$ zweimal stetig differenzierbar ist und

$$\forall t : t \in I \setminus \{t_\circ\} \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0,$$

so dass

$$\forall t : t \in I \setminus \{t_\circ\} \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)).$$

Wegen der Stetigkeit von Φ' und γ folgt hieraus

$$\lim_{t \uparrow t_\circ} T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) = \lim_{t \uparrow t_\circ} -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t_\circ)).$$

$\square$

2.3 A posteriori. $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ am Rand von I. Λ.

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V3. $x_\circ \in J \subseteq O$. J echtes reelles Intervall. $J \subseteq [x_\circ| + \infty[$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(] - a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $] - a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :] - a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$ und $w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright] - a|0]\right)^{-1}$.

V5. $\lambda \in \{\pm 1\}$.

V6. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V7. $\forall x : x \in J \setminus \{x_\circ\} \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(x)$

und ($\lambda = +1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$ auf J, wobei $\overline{\beta} = \lim_{v \uparrow b} \tilde{T}(v)$)

und ($\lambda = -1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\alpha}$ auf J, wobei $\overline{\alpha} = \lim_{v \downarrow -a} \tilde{T}(v)$).

V8. $\tilde{x} \in J \setminus \{x_\circ\}$ und $\displaystyle\int_{x_\circ}^{\tilde{x}} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} \in \mathbb{R}$.

V9. $\Lambda = \left\{\left(x, \displaystyle\int_{x_\circ}^{x} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)}\right) : x \in J\right\}$.

V10. $t_\circ \in \mathbb{R}$ und $\gamma = \left\{\left(t, \Lambda^{-1}(t - t_\circ)\right) : t - t_\circ \in \mathsf{ran}\,\Lambda\right\}$.

$\Rightarrow$

a) $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x)) \in \mathsf{dom}\, w_\lambda$ und $w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig auf $J \setminus \{x_\circ\}$ und $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad \Lambda(x) = \displaystyle\int_{x_\circ}^{x} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)}$

und $\Lambda \in \mathtt{C}(J : \mathbb{R})$ und $0 = \Lambda(x_\circ)$ und $\mathsf{ran}\,\Lambda$ echtes reelles Intervall

und ($\lambda = +1 \Rightarrow \Lambda$ streng wachsend und $\mathsf{ran}\,\Lambda \subseteq [0| + \infty[$)

und ($\lambda = -1 \Rightarrow \Lambda$ streng fallend und $\mathsf{ran}\,\Lambda \subseteq] - \infty|0]$).

b) Λ stetig differenzierbar auf $J \setminus \{x_\circ\}$

und $\forall x : x \in J \setminus \{x_\circ\} \quad \Rightarrow \quad \Lambda'(x) = \dfrac{1}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)}$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow \lim_{x \downarrow x_\circ} \Lambda'(x) \in \,]0| + \infty])$

und $(\lambda = -1 \Rightarrow \lim_{x \downarrow x_\circ} \Lambda'(x) \in [-\infty|0[)$.

c) $\Lambda^{-1} \in \mathsf{C}(\mathsf{ran}\,\Lambda : \mathbb{R})$ und $\Lambda^{-1} : \mathsf{ran}\,\Lambda \to J$ bijektiv und $x_\circ = \Lambda^{-1}(0)$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow \Lambda^{-1}$ streng wachsend$)$

und $(\lambda = -1 \Rightarrow \Lambda^{-1}$ streng fallend$)$.

d) $\Lambda^{-1} \in \mathsf{C}^1(\mathsf{ran}\,\Lambda : \mathbb{R})$

und $\forall t : t \in \mathsf{ran}\,\Lambda \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\bullet(t) = w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\Lambda^{-1}(t)))\right)$

und $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\bullet(\Lambda(x)) = w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(x))\right)$.

e) $\mathsf{dom}\,\gamma$ echtes reelles Intervall und $\gamma : \mathsf{dom}\,\gamma \to J$ bijektiv und $x_\circ = \gamma(t_\circ)$ und $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma = \{\tau + t_\circ : \tau \in \mathsf{ran}\,\Lambda\}$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow \gamma$ streng wachsend und $\mathsf{dom}\,\gamma \subseteq [t_\circ| + \infty[)$

und $(\lambda = -1 \Rightarrow \gamma$ streng fallend und $\mathsf{dom}\,\gamma \subseteq \,]-\infty|t_\circ])$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \Lambda^{-1}(t - t_\circ) \wedge \Lambda(\gamma(t)) = t - t_\circ,$$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \int_{x_\circ}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} = t - t_\circ.$$

f) γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right),$$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow 0 \leq \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma)$ und $(\lambda = -1 \Rightarrow -a < \gamma^\bullet \leq 0$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma)$ und

$$\forall t : t_\circ \neq t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \gamma^\bullet(t).$$

g) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}.$

h) γ zweimal stetig differenzierbar auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ und

$$\forall t : t_\circ \neq t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0,$$

und

$$\lim_{t \to t_\circ} T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(x_\circ).$$

<u>Beweis</u> `a), b), c)` Via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ evident.

<u>Beweis</u> `d)` Stetige Differenzierbarkeit von Λ^{-1} auf $(\mathsf{ran}\,\Lambda) \setminus \{0\}$ und Formeln auf $(\mathsf{ran}\,\Lambda)\setminus\{0\}$ / auf $J\setminus\{x_\circ\}$ via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ klar. Aus der Stetigkeit von Φ und Λ^{-1} folgt dann

$$\lim_{t\to 0}(\Lambda^{-1})^\bullet(t) = w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\Lambda^{-1}(0)))\right) = w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x_\circ))\right) \in \mathbb{R},$$

so dass, da Λ^{-1} stetig ist, die stetige Differenzierbarkeit von Λ^{-1} in 0 und die Gültigkeit der Formel für $(\Lambda^{-1})^\bullet(t)$ für alle $t \in \mathsf{ran}\,\Lambda$ folgt. Via $0 = \Lambda(x_\circ)$ folgt nun die Gültigkeit der zweiten Formel für alle $x \in J$.

<u>Beweis</u> `e)` trivial.

<u>Beweis</u> `f)` Lediglich die letzte Aussage ist nicht trivial. Wegen $\gamma : \mathsf{dom}\,\gamma \to J$ bijektiv und $x_\circ = \gamma(t_\circ)$ gilt für alle $t \in (\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ die Aussage $x_\circ \neq \gamma(t)$. Nach Voraussetzung ist $x_\circ$ die einzige Stelle$\in J$, in der $E_\circ = \Phi(x_\circ)$, also $0 = E_\circ - \Phi(x_\circ)$ gelten *könnte*. In den Stellen $x_\circ \neq x \in J$ gilt $E_\circ - \Phi(x) > 0$, so dass $0 \neq w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x)\right)$. Da γ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\}$ Werte in J ungleich $x_\circ$ annimmt, folgt dort via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$, $\gamma^\bullet(t) = w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \neq 0$.

<u>Beweis</u> `g)` Via `f)` und T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ evident.

<u>Beweis</u> `h)` Die stetige Differenzierbarkeit von Φ und γ und die via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ für Argumente$\neq 0$ bestehende stetige Differenzierbarkeit von w_λ impliziert, da $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ ein $\mathsf{dom}\,\gamma$-relativ offenes, echtes reelles Intervall ist, die stetige Differenzierbarkeit von $\gamma^\bullet$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$. Es folgt, dass γ zweimal stetig differenzierbar auf $(\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\}$ ist und für alle $t \in (\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\}$ gilt via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_\pm$,

$$\begin{aligned}
&T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\\
&= T''(\gamma^\bullet(t))\cdot w_\lambda'\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\cdot\left(-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\right)\cdot\gamma^\bullet(t) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\\
&\qquad= T''(\gamma^\bullet(t))\cdot w_\lambda'\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\cdot\left(-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\right)\cdot\\
&\qquad\qquad w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\\
&\qquad= T''\left(w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\right)\cdot w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\\
&\qquad\cdot w_\lambda'\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\cdot\left(-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\right) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\\
&\qquad\qquad\qquad = 1\cdot\left(-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\right) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von Φ' und γ folgt hieraus

$$\lim_{t\to t_\circ} T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t) = \lim_{t\to t_\circ} -\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t)) = -\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t_\circ)) = -\frac{1}{m}\cdot\Phi(x_\circ).$$

⋆

Satz*

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O:\mathbb{R})$.

V3. $x_\circ \in J \subseteq O$. J echtes reelles Intervall. $J \subseteq \,]-\infty|x_\circ]$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[\,:\mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\,\setminus\{0\}$ und $\tilde{T} : \,]-a|b[\,\to\mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v\cdot T'(v) - T(v)$ und $w_{+1} = \left(\tilde{T}\downharpoonright[0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1} = \left(\tilde{T}\downharpoonright\,]-a|0]\right)^{-1}$.

V5. $\lambda \in \{\pm 1\}$.

V6. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V7. $\forall x : x \in J\setminus\{x_\circ\} \quad\Rightarrow\quad E_\circ > \Phi(x)$

und ($\lambda = +1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m\cdot\overline{\beta}$ auf J, wobei $\overline{\beta} = \lim\limits_{v\uparrow b}\tilde{T}(v)$)

und ($\lambda = -1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m\cdot\overline{\alpha}$ auf J, wobei $\overline{\alpha} = \lim\limits_{v\downarrow -a}\tilde{T}(v)$)-

V8. $\tilde{x} \in J\setminus\{x_\circ\}$ und $\displaystyle\int_{\tilde{x}}^{x_\circ}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)} \in \mathbb{R}$.

V9. $\Lambda = \left\{\left(x, \displaystyle\int_x^{x_\circ}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)}\right) : x \in J\right\}$.

V10. $t_\circ \in \mathbb{R}$ und $\gamma = \left\{\left(t, \Lambda^{-1}(t_\circ - t)\right) : t_\circ - t \in \mathsf{ran}\,\Lambda\right\}$.

$\Rightarrow$

a) $\forall x : x \in J \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x)) \in \mathsf{dom}\,w_\lambda$ und $w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig auf $J\setminus\{x_\circ\}$ und $\forall x : x \in J \quad\Rightarrow\quad \Lambda(x) = \displaystyle\int_x^{x_\circ}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)}$

und $\Lambda \in \mathtt{C}(J:\mathbb{R})$ und $0 = \Lambda(x_\circ)$ und $\mathsf{ran}\,\Lambda$ echtes reelles Intervall

und ($\lambda = +1 \Rightarrow \Lambda$ streng fallend und $\mathsf{ran}\,\Lambda \subseteq [0|+\infty[$)

und ($\lambda = -1 \Rightarrow \Lambda$ streng wachsend und $\mathsf{ran}\,\Lambda \subseteq \,]-\infty|0]$).

b) Λ stetig differenzierbar auf $J \setminus \{x_\circ\}$

und $\forall x : x \in J \setminus \{x_\circ\} \quad \Rightarrow \quad \Lambda'(x) = -\dfrac{1}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x))\right)}$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow \lim\limits_{x\uparrow x_\circ} \Lambda'(x) \in [-\infty|0[)$

und $(\lambda = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\uparrow x_\circ} \Lambda'(x) \in]0|+\infty])$.

c) $\Lambda^{-1} \in \mathsf{C}(\mathsf{ran}\,\Lambda : \mathbb{R})$ und $\Lambda^{-1} : \mathsf{ran}\,\Lambda \to J$ bijektiv und $x_\circ = \Lambda^{-1}(0)$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow \Lambda^{-1}$ streng fallend)

und $(\lambda = -1 \Rightarrow \Lambda^{-1}$ streng wachsend).

d) $\Lambda^{-1} \in \mathsf{C}^1(\mathsf{ran}\,\Lambda : \mathbb{R})$

und $\forall t : t \in \mathsf{ran}\,\Lambda \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\bullet(t) = -w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\Lambda^{-1}(t)))\right)$

und $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^\bullet(\Lambda(x)) = -w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x))\right)$.

e) $\mathsf{dom}\,\gamma$ echtes reelles Intervall und $\gamma : \mathsf{dom}\,\gamma \to J$ bijektiv und $x_\circ = \gamma(t_\circ)$ und $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma = \{t_\circ - \tau : \tau \in \mathsf{ran}\,\Lambda\}$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow \gamma$ streng wachsend und $\mathsf{dom}\,\gamma \subseteq]-\infty|t_\circ])$

und $(\lambda = -1 \Rightarrow \gamma$ streng fallend und $\mathsf{dom}\,\gamma \subseteq [t_\circ|+\infty[)$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) = \Lambda^{-1}(t_\circ - t) \wedge \Lambda(\gamma(t)) = t_\circ - t,$$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(t)}^{x_\circ} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z))\right)} = t_\circ - t.$$

f) γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right),$$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow 0 \le \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma)$ und $(\lambda = -1 \Rightarrow -a < \gamma^\bullet \le 0$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma)$ und

$$\forall t : t_\circ \neq t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \gamma^\bullet(t).$$

g) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2\cdot\tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m}\cdot\Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2\cdot E_\circ}{m}$.

h) γ zweimal stetig differenzierbar auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ und

$$\forall t : t_\circ \neq t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t)) = 0,$$

und

$$\lim_{t\to t_\circ} T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m}\cdot\Phi'(x_\circ).$$

<u>Beweis*</u> `a), b), c)` Via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ evident.

<u>Beweis*</u> `d)` Stetige Differenzierbarkeit von Λ^{-1} auf $(\mathsf{ran}\,\Lambda)\setminus\{0\}$ und Formeln auf $(\mathsf{ran}\,\Lambda)\setminus\{0\}$ / auf $J\setminus\{x_\circ\}$ via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ klar. Aus der Stetigkeit von Φ und Λ^{-1} folgt dann

$$\lim_{t\to 0}(\Lambda^{-1})^\bullet(t) = -w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\Lambda^{-1}(0)))\right) = -w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x_\circ))\right) \in \mathbb{R},$$

so dass, da Λ^{-1} stetig ist, die stetige Differenzierbarkeit von Λ^{-1} in 0 und die Gültigkeit der Formel für $(\Lambda^{-1})^\bullet(t)$ für alle $t \in \mathsf{ran}\,\Lambda$ folgt. Via $0 = \Lambda(x_\circ)$ folgt nun die Gültigkeit der zweiten Formel für alle $x \in J$.

<u>Beweis*</u> `e)` trivial.

<u>Beweis*</u> `f)` Lediglich die letzte Aussage ist nicht trivial. Wegen $\gamma : \mathsf{dom}\,\gamma \to J$ bijektiv und $x_\circ = \gamma(t_\circ)$ gilt für alle $t \in (\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\}$ die Aussage $x_\circ \neq \gamma(t)$. Nach Voraussetzung ist $x_\circ$ die einzige Stelle$\in J$, in der $E_\circ = \Phi(x_\circ)$, also $0 = E_\circ - \Phi(x_\circ)$ gelten *könnte*. In den Stellen $x_\circ \neq x \in J$ gilt $E_\circ - \Phi(x) > 0$, so dass $0 \neq w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x)\right)$. Da γ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\}$ Werte in J ungleich $x_\circ$ annimmt, folgt dort via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$, $\gamma^\bullet(t) = w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \neq 0$.

<u>Beweis*</u> `g)` Via `f)` und T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ evident.

<u>Beweis*</u> `h)` Die stetige Differenzierbarkeit von Φ und γ und die via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ für Argumente$\neq 0$ bestehende stetige Differenzierbarkeit von w_λ impliziert, da $(\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\}$ ein $\mathsf{dom}\,\gamma$-relativ offenes, echtes reelles Intervall ist, die stetige Differenzierbarkeit von $\gamma^\bullet$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\}$. Es folgt, dass γ zweimal stetig differenzierbar auf $(\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\}$ ist und für alle $t \in (\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\}$ gilt via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_\pm$,

$$\begin{aligned}
&T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\\
&= T''(\gamma^\bullet(t))\cdot w'_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\cdot\left(-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\right)\cdot\gamma^\bullet(t) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\\
&\qquad = T''(\gamma^\bullet(t))\cdot w'_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\cdot\left(-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\right)\cdot\\
&\qquad\qquad w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\\
&\qquad = T''\left(w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\right)\cdot w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\\
&\qquad \cdot w'_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right)\cdot\left(-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\right) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\\
&\qquad\qquad\qquad = 1\cdot\left(-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\right) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von Φ' und γ folgt hieraus

$$\lim_{t\to t_\circ} T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t) = \lim_{t\to t_\circ} -\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t)) = -\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t_\circ)) = -\frac{1}{m}\cdot\Phi(x_\circ).$$

□

3 $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ und Energiegleichung (+3). $0=T''(0)$ und $E_\circ=\Phi(\eta)$ und $0\neq\Phi'(\eta)$.

3.1 A posteriori

Satz

V1. $0<m\in\mathbb{R}$.

V2. $0\neq O\subseteq\mathbb{R}$ offen. $\Phi\in\mathtt{C}^1(O:\mathbb{R})$.

V3. $0<a$ und $0<b$ und $T\in\mathtt{C}^2(]-a|b[:\mathbb{R})$ und $0=T(0)$ und $0<T''$ auf $]-a|b[\setminus\{0\}$ und $\tilde{T}:]-a|b[\to\mathbb{R}$, $\tilde{T}(v)=v\cdot T'(v)-T(v)$.

V4. $0=T''(0)$.

V5. γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\mathsf{ran}\,\gamma\subseteq O$ und $-a<\gamma^\bullet<b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

V6. $E_\circ\in\mathbb{R}$.

V7. $\forall t: t\in\mathsf{dom}\,\gamma \quad\Rightarrow\quad 2\cdot\tilde{T}(\gamma^\bullet(t))+\dfrac{2}{m}\cdot\Phi(\gamma(t))=\dfrac{2\cdot E_\circ}{m}$.

V8. $I\subseteq\mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und $E_\circ-\Phi\circ\gamma>0$ auf I und τ Randpunkt von I und $\eta=\lim\limits_{I\ni t\to\tau}\gamma(t)\in O$ und $E_\circ=\Phi(\eta)$.

$\Rightarrow$

a) γ zweimal stetig differenzierbar auf I.

b) $\tau\notin I$.

c) $0=\lim\limits_{I\ni t\to\tau}\gamma^\bullet(t)$.

d) Falls $0<\Phi'(\eta)$, dann $\lim\limits_{I\ni t\to\tau}\gamma^{\bullet\bullet}(t)=-\infty$.

e) Falls $\Phi'(\eta)<0$, dann $\lim\limits_{I\ni t\to\tau}\gamma^{\bullet\bullet}(t)=+\infty$.

<u>Beweis</u> `a)` Via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** evident.

<u>Beweis</u> `b)` Falls $\tau\in I$, dann $(E_\circ-\Phi\circ\gamma)(\tau)=E_\circ-\Phi(\gamma(\tau))=E_\circ-\Phi(\eta)=E_\circ-E_\circ=0$. Auf I gilt $E_\circ-\Phi\circ\gamma>0$.

<u>Beweis</u> `c)` Via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** gibt es $\lambda\in\{\pm1\}$ mit

$$\forall t: t\in I\quad\Rightarrow\quad\gamma^\bullet(t)=w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(\gamma(t)))\right),$$

wobei $w_{+1}=\left(\tilde{T}\downharpoonleft[0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1}=\left(\tilde{T}\downharpoonleft]-a|0]\right)^{-1}$ via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm1}$ stetige Funktionen auf $[0|\overline{\beta}[$ / auf $[0|\overline{\alpha}[$ mit $0=w_\lambda(0)$ sind. Es folgt via der Stetigkeit von Φ und $\eta=\lim\limits_{I\ni t\to\tau}\gamma(t)$,

$$\begin{aligned}\lim_{I\ni t\to\tau}\gamma^\bullet(t)=\lim_{I\ni t\to\tau}w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(\gamma(t)))\right)&=w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(\eta))\right)\\&=w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-E_\circ)\right)=w_\lambda(0)=0.\end{aligned}$$

<u>Beweis</u> `d), e)` Via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** gilt

$$\forall t: t\in I\quad\Rightarrow\quad T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t)+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))=0,$$

und $0\neq\gamma^\bullet$ auf I, so dass via Voraussetzung $0<T''(\gamma^\bullet(t))$ auf I die Aussage

$$\forall t: t\in I\quad\Rightarrow\quad\gamma^{\bullet\bullet}(t)=-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\cdot\frac{1}{T''(\gamma^\bullet(t))},$$

folgt. Aus der Stetigkeit von T'', aus $0<T''\circ\gamma^\bullet$ auf I und aus `c)` folgt

$$\lim_{I\ni t\to\tau}\frac{1}{T''(\gamma^\bullet(t))}=+\infty,$$

und aus Voraussetzung `V8.` und der Stetigkeit von Φ folgt

$$\lim_{I\ni t\to\tau}-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))=-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\eta),$$

so dass

$$\lim_{I\ni t\to\tau}\gamma^{\bullet\bullet}(t)=\lim_{I\ni t\to\tau}-\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\cdot\frac{1}{T''(\gamma^\bullet(t))}=\begin{cases}-\infty & , \quad 0<\Phi'(\eta)\\ +\infty & , \quad \Phi'(\eta)>0\end{cases}$$

$\square$

3.2 A priori

Satz

`V1.` $0 < m \in \mathbb{R}$.

`V2.` $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`V3.` $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[\,:\mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\,\setminus\{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\,\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

`V4.` $0 = T''(0)$.

`V5.` γ ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

`V6.` $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \dfrac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0.$

`V7.` $s \in \mathsf{dom}\,\gamma$ und $E_\circ = m \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(s)) + \Phi(\gamma(s))$.

`V8.` $I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf I und τ Randpunkt von I und $\eta = \lim\limits_{I \ni t \to \tau} \gamma(t) \in O$ und $E_\circ = \Phi(\eta)$.

$\Rightarrow$

`a)` $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}.$

`b)` $\tau \notin I$.

`c)` $0 = \lim\limits_{t \to \tau} \gamma^\bullet(t)$.

`d)` Falls $0 < \Phi'(\eta)$, dann $\lim\limits_{I \ni t \to \tau} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\infty$.

`e)` Falls $\Phi'(\eta) < 0$, dann $\lim\limits_{I \ni t \to \tau} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = +\infty$.

`f)` Falls $0 \neq \Phi'(\eta)$, dann $\tau \notin \mathsf{dom}\,\gamma$.

<u>Beweis</u> `a)` Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung. A posteriori** und Voraussetzungen, insbesondere `V7.` evident.

<u>Beweis</u> `b), c), d), e)` Via `a)` und $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+2). A posteriori.** $0 = T''(0)$ **und** $E_\circ = \Phi(\eta)$ **und** $0 \neq \Phi'(\eta)$ evident.

<u>Beweis</u> `f)` Via `V5.` und `d), e)` evident. $\square$

3.3 A posteriori. Λ

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V3. $x_\circ \in J \subseteq O$. J echtes reelles Intervall. $J \subseteq [x_\circ| + \infty[$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$ und $w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft [0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft]-a|0]\right)^{-1}$.

V5. $0 = T''(0)$.

V6. $\lambda \in \{\pm 1\}$.

V7. $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $E_\circ = \Phi(x_\circ)$.

V8. $\forall x : x \in J \setminus \{x_\circ\} \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(x)$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$ auf J, wobei $\overline{\beta} = \lim\limits_{v \uparrow b} \tilde{T}(v))$

und $(\lambda = -1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\alpha}$ auf J, wobei $\overline{\alpha} = \lim\limits_{v \downarrow -a} \tilde{T}(v))$,

V9. $\tilde{x} \in J \setminus \{x_\circ\}$ und $\displaystyle\int_{x_\circ}^{\tilde{x}} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} \in \mathbb{R}$.

V10. $$\Lambda = \left\{ \left(x, \int_{x_\circ}^{x} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} \right) : x \in J \right\}.$$

V11. $t_\circ \in \mathbb{R}$ und $\gamma = \left\{\left(t, \Lambda^{-1}(t - t_\circ)\right) : t - t_\circ \in \operatorname{ran} \Lambda\right\}$.

$\Rightarrow$

a) γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\operatorname{ran} \gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\operatorname{dom} \gamma$.

b) $\forall t : t \in \operatorname{dom} \gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

c) $(\operatorname{dom} \gamma) \setminus \{t_\circ\} \subseteq \operatorname{dom} \gamma$ und $(\operatorname{dom} \gamma) \setminus \{t_\circ\}$ echtes reelles Intervall und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $(\operatorname{dom} \gamma) \setminus \{t_\circ\}$ und $t_\circ$ ist Randpunkt von $(\operatorname{dom} \gamma) \setminus \{t_\circ\}$ und $x_\circ = \lim\limits_{(\operatorname{dom} \gamma) \setminus \{t_\circ\} \ni t \to t_\circ} \gamma(t) \in O$ und $E_\circ = \Phi(x_\circ)$.

d) γ zweimal stetig differenzierbar auf $(\operatorname{dom} \gamma) \setminus \{t_\circ\}$.

e) $0 = \lim_{t \to t_\circ} \gamma^\bullet(t)$.

f) Falls $0 < \Phi'(x_\circ)$, dann $\lim_{t_\circ \neq t \to t_\circ} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\infty$.

g) Falls $\Phi'(x_\circ) < 0$, dann $\lim_{t_\circ \neq t \to t_\circ} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = +\infty$.

<u>Beweis</u> a) Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+2). A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**.** Λ ist γ eine 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\gamma : \mathsf{dom}\,\gamma \to J$ bijektiv, so dass im Speziellen via $J \subseteq O$ die Aussage $\mathsf{ran}\,\gamma = J \subseteq O$ folgt. Auch gelten via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$**. A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**.** Λ die Abschätzungen $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

<u>Beweis</u> b) Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+2). A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**. A posteriori.** Λ evident.

<u>Beweis</u> c) Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+2). A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**.** Λ gilt ($t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma \subseteq [t_\circ| + \infty[$ oder $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma \subseteq]-\infty|t_\circ]$). Somit ist $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ ein echtes reelles Intervall und $t_\circ$ ist Randpunkt von $\mathsf{dom}\,\gamma$, Klarer Weise gilt $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\} \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$. Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+2). A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**.** Λ gilt

$$\forall t : t_\circ \neq t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \gamma^\bullet(t),$$

woraus via der Voraussetzungen, a) und b) und via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori**

$$\forall t : t \in (\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\} \quad \Rightarrow \quad E_\circ - \Phi(\gamma(t)) > 0,$$

folgt. Da $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma$ und da γ stetig ist, folgt

$$\lim_{(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\} \ni t \to t_\circ} \gamma(t) = \lim_{t \to t_\circ} \gamma(t) = \gamma(t_\circ) = x_\circ,$$

aus $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma$ und $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ folgt $x_\circ = \gamma(t_\circ) \in O$ und via V7. gilt $E_\circ = \Phi(x_\circ)$.

<u>Beweis</u> d), e), f), g) Via der Voraussetzungen, via a), b), c) und insbesondere via V7., wonach $E_\circ = \Phi(x_\circ)$, kommt $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+3).** $0 = T''(0)$ **und** $E_\circ = \Phi(\eta)$ **und** $0 \neq \Phi'(\eta)$**. A posteriori** mit $I = (\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ zur Anwendung. □

⋆

Satz*

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V3. $x_\circ \in J \subseteq O$. J echtes reelles Intervall. $J \subseteq]-\infty|x_\circ]$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[\, : \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\, \setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\, \to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$ und $w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright]-a|0]\right)^{-1}$.

V5. $0 = T''(0)$.

V6. $\lambda \in \{\pm 1\}$.

V7. $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $E_\circ = \Phi(x_\circ)$.

V8. $\forall x : x \in J \setminus \{x_\circ\} \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(x)$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$ auf J, wobei $\overline{\beta} = \lim\limits_{v \uparrow b} \tilde{T}(v))$

und $(\lambda = -1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\alpha}$ auf J, wobei $\overline{\alpha} = \lim\limits_{v \downarrow -a} \tilde{T}(v))$,

V9. $\tilde{x} \in J \setminus \{x_\circ\}$ und $\displaystyle\int_{\tilde{x}}^{x_\circ} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} \in \mathbb{R}$.

V10. $\Lambda = \left\{ \left(x, \displaystyle\int_{x}^{x_\circ} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} \right) : x \in J \right\}$.

V11. $t_\circ \in \mathbb{R}$ und $\gamma = \{(t, \Lambda^{-1}(t_\circ - t)) : t_\circ - t \in \mathsf{ran}\, \Lambda\}$.

$\Rightarrow$

a) γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

b) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

c) $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\} \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ echtes reelles Intervall und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ und $t_\circ$ ist Häufungspunkt von $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ und $x_\circ = \lim\limits_{(\mathsf{dom}\,\gamma)\setminus\{t_\circ\} \ni t \to t_\circ} \gamma(t) \in O$ und $E_\circ = \Phi(x_\circ)$.

d) γ zweimal stetig differenzierbar auf $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$.

e) $0 = \lim\limits_{t \to t_\circ} \gamma^\bullet(t)$.

`f)` Falls $0 < \Phi'(x_\circ)$, dann $\lim\limits_{t_\circ \neq t \to t_\circ} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\infty$.

`g)` Falls $\Phi'(x_\circ) < 0$, dann $\lim\limits_{t_\circ \neq t \to t_\circ} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = +\infty$.

<u>Beweis*</u> `a)` Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+2). A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**.** Λ ist γ eine 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\gamma : \mathsf{dom}\,\gamma \to J$ bijektiv, so dass im Speziellen via $J \subseteq O$ die Aussage $\mathsf{ran}\,\gamma = J \subseteq O$ folgt. Auch gelten via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$**. A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**.** Λ die Abschätzungen $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

<u>Beweis*</u> `b)` Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+2). A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**. A posteriori.** Λ evident.

<u>Beweis*</u> `c)` Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+2). A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**.** Λ gilt ($t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma \subseteq [t_\circ| + \infty[$ oder $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma \subseteq]-\infty|t_\circ]$). Somit ist $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ ein echtes reelles Intervall und $t_\circ$ ist Randpunkt von $\mathsf{dom}\,\gamma$, Klarer Weise gilt $(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\} \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$. Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+2). A posteriori.** $E_\circ - \Phi(\gamma) \geq 0$ **am Rand von** I**.** Λ gilt

$$\forall t : t_\circ \neq t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \gamma^\bullet(t),$$

woraus via der Voraussetzungen, `a)` und `b)` und via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori**

$$\forall t : t \in (\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\} \quad \Rightarrow \quad E_\circ - \Phi(\gamma(t)) > 0,$$

folgt. Da $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma$ und da γ stetig ist, folgt

$$\lim_{(\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\} \ni t \to t_\circ} \gamma(t) = \lim_{t \to t_\circ} \gamma(t) = \gamma(t_\circ) = x_\circ,$$

aus $t_\circ \in \mathsf{dom}\,\gamma$ und $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ folgt $x_\circ = \gamma(t_\circ) \in O$ und via `V7.` gilt $E_\circ = \Phi(x_\circ)$.

<u>Beweis*</u> `d), e), f), g)` Via der Voraussetzungen, via `a), b), c)` und insbesondere via `V7.`, wonach $E_\circ = \Phi(x_\circ)$, kommt $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+3).** $0 = T''(0)$ **und** $E_\circ = \Phi(\eta)$ **und** $0 \neq \Phi'(\eta)$**. A posteriori** mit $I = (\mathsf{dom}\,\gamma) \setminus \{t_\circ\}$ zur Anwendung. □

4 $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ und Energiegleichung (+4)

4.1 A posteriori. γ bei $\pm\infty$ reell

Satz

V1. $0<m\in\mathbb{R}$.

V2. $0\neq O\subseteq\mathbb{R}$ offen. $\Phi\in\mathsf{C}^1(O:\mathbb{R})$.

V3. $0<a$ und $0<b$ und $T\in\mathsf{C}^2(]-a|b[\,:\mathbb{R})$ und $0=T(0)$ und $0<T''$ auf $]-a|b[\setminus\{0\}$ und $\tilde{T}:\,]-a|b[\,\to\mathbb{R}$, $\tilde{T}(v)=v\cdot T'(v)-T(v)$ und $w_{+1}=\left(\tilde{T}\downharpoonleft[0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1}=\left(\tilde{T}\downharpoonleft\,]-a|0]\right)^{-1}$.

V4. γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\mathsf{ran}\,\gamma\subseteq O$ und $-a<\gamma^\bullet<b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

V5. $E_\circ\in\mathbb{R}$ und $\forall t: t\in\mathsf{dom}\,\gamma\quad\Rightarrow\quad 2\cdot\tilde{T}(\gamma^\bullet(t))+\dfrac{2}{m}\cdot\Phi(\gamma(t))=\dfrac{2\cdot E_\circ}{m}$.

V6. $s\in I\subseteq\mathsf{dom}\,\gamma$ und I unbeschränktes reelles Intervall und $E_\circ-\Phi\circ\gamma>0$ auf I.

$\Rightarrow$

a) Falls $+\infty=\sup I$ und $\eta=\lim\limits_{t\uparrow+\infty}\gamma(t)\in\mathbb{R}$ und $J=\gamma[I]$ und $\lambda=\mathsf{sgn}\,(\gamma^\bullet)$ auf I mit $\lambda\in\{\pm1\}$, dann ist η Randpunkt von J und Häufungspunkt von O und

$$E_\circ=\limsup_{J\ni x\to\eta}\Phi(x),$$

und

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)}=+\infty,$$

und

$$0=\liminf_{t\uparrow+\infty}|\gamma^\bullet(t)|.$$

b) Falls $+\infty=\sup I$ und $\eta=\lim\limits_{t\uparrow+\infty}\gamma(t)\in O$ und $\lambda=\mathsf{sgn}\,(\gamma^\bullet)$ auf I mit $\lambda\in\{\pm1\}$, dann

$$E_\circ=\Phi(\eta)\quad\text{und}\quad 0=\Phi'(\eta),$$

und

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)}=+\infty,$$

und

$$0=\lim_{t\uparrow+\infty}\gamma^\bullet(t).$$

c) Falls $-\infty = \inf I$ und $\eta = \lim_{t \downarrow -\infty} \gamma(t) \in \mathbb{R}$ und $J = \gamma[I]$ und $\lambda = \mathsf{sgn}\,(\gamma^\bullet)$ auf I mit $\lambda \in \{\pm 1\}$, dann ist η Randpunkt von J und Häufungspunkt von O und

$$E_\circ = \limsup_{J \ni x \to \eta} \Phi(x),$$

und

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} = -\infty,$$

und

$$0 = \liminf_{t \downarrow -\infty} |\gamma^\bullet(t)|.$$

d) Falls $-\infty = \inf I$ und $\eta = \lim_{t \downarrow -\infty} \gamma(t) \in O$ und $\lambda = \mathsf{sgn}\,(\gamma^\bullet)$ auf I mit $\lambda \in \{\pm 1\}$, dann

$$E_\circ = \Phi(\eta) \quad \text{und} \quad 0 = \Phi'(\eta),$$

und

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} = -\infty,$$

und

$$0 = \lim_{t \uparrow +\infty} \gamma^\bullet(t).$$

<u>Beweis</u> a) I ist ein echtes reelles Intervall$\subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und es gilt $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf I. Somit gilt via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **(+1) A posteriori**

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)} = t - s,$$

wobei $w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig und$\neq 0$ auf $\gamma[I]$ ist, so dass via $\eta = \lim_{t \uparrow +\infty} \gamma(t)$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(s)}^{\eta} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)} = \lim_{t \uparrow +\infty} \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)} \\ = \lim_{t \uparrow +\infty} (t - s) = +\infty,\end{aligned}$$

folgt. Wegen $J = \gamma[I]$ und $\eta = \lim_{t \uparrow +\infty} \gamma(t) \in \mathbb{R}$ und der via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** bestehenden strengen Monotonie von γ auf I, ist η Randpunkt von J. Wegen $J = \gamma[I] \subseteq \mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ ist η Häufungspunkt von O. Gemäß T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ist w_λ streng monoton und nimmt nur an der Stelle 0 den Wert 0 an. Deswegen muss es via

$\gamma(s), \eta \in \mathbb{R}$ und der Unendlichkeit des Integrals eine Folge $\xi : \mathbb{N} \to J = \gamma[I]$ geben, so dass

$$\eta = \lim_{n\uparrow+\infty} \xi_n \quad \text{und} \quad 0 = \lim_{n\uparrow+\infty} \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\xi_n)),$$

woraus, da $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf I, also auch $E_\circ - \Phi > 0$ auf $J = \gamma[I]$,

$$E_\circ = \limsup_{J \ni x \to \eta} \Phi(x),$$

gelten muss. Aus $\lim\limits_{t\uparrow+\infty} \gamma(t) \in \mathbb{R}$ und der Differenzierbarkeit von γ folgt $0 = \liminf\limits_{t\uparrow+\infty} |\gamma^\bullet(t)|$.

<u>Beweis</u> `b)` Via `a)` gilt

$$E_\circ = \limsup_{J \in x \to \eta} \Phi(x),$$

woraus via der Stetigkeit von Φ und $\eta \in O = \mathsf{dom}\,\Phi$ die Aussage

$$\Phi(\eta) = \lim_{x\to\eta} \Phi(x) = \limsup_{J \in x \to \eta} \Phi(x) = E_\circ,$$

folgt. Via `a)` gilt die Unendlichkeit des angegebenen Integrals. Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** gilt

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \neq 0,$$

wobei $w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig auf $\gamma[I]$, woraus via der Stetigkeit von w_λ und Φ und wegen $\eta = \lim\limits_{t\uparrow+\infty} \gamma(t)$ und $E_\circ = \Phi(\eta)$ die Aussage

$$\begin{aligned}\lim_{t\uparrow+\infty} \gamma^\bullet(t) = \lim_{t\uparrow+\infty} w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) &= w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\eta))\right) \\ &= w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - E_\circ)\right) = w_\lambda(0),\end{aligned}$$

folgt. Gemäss T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ gilt $0 = w_\lambda(0)$. Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** ist γ zweimal stetig differenzierbar auf I und es gilt

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0,$$

so dass sich via der Positivität von T'' auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ die Aussage

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) \cdot \frac{1}{T''(\gamma^\bullet(t))},$$

ergibt. Wegen der Stetigkeit von Φ' gilt $\lim\limits_{t\uparrow+\infty} -\dfrac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t)) = -\dfrac{1}{m}\cdot\Phi'(\eta)$ und falls $0\neq\Phi'(\eta)$ gilt, folgt aus der Stetigkeit und Nicht-Negativität von T'',

$$\lim_{t\uparrow+\infty}\gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\eta)\cdot\lim_{v\to 0}\frac{1}{T''(v)}\in[\,-\infty|+\infty]\setminus\{0\},$$

was $0=\lim\limits_{t\uparrow+\infty}\gamma^{\bullet}(t)$ widerspricht. Konsequenter Weise muss $0=\Phi'(\eta)$ gelten.

<u>Beweis</u> `c*)` I ist ein echtes reelles Intervall$\subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und es gilt $E_\circ-\Phi\circ\gamma>0$ auf I. Somit gilt via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **(+1) A posteriori**

$$\forall t: t\in I\quad\Rightarrow\quad\int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z)\right)}=t-s,$$

wobei $w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(.))\right)$ stetig und$\neq 0$ auf $\gamma[I]$ ist, so dass via $\eta=\lim\limits_{t\downarrow-\infty}\gamma(t)$ die Gleichung

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z)\right)}=\lim_{t\downarrow-\infty}\int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z)\right)}$$
$$=\lim_{t\downarrow-\infty}(t-s)=-\infty,$$

folgt. Wegen $J=\gamma[I]$ und $\eta=\lim\limits_{t\downarrow-\infty}\gamma(t)\in\mathbb{R}$ und der via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** bestehenden strengen Monotonie von γ auf I, ist η Randpunkt von J. Wegen $J=\gamma[I]\subseteq\mathsf{ran}\,\gamma\subseteq O$ ist η Häufungspunkt von O. Gemäß T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm1}$ ist w_λ streng monoton und nimmt nur an der Stelle 0 den Wert 0 an. Deswegen muss es via $\gamma(s),\eta\in\mathbb{R}$ und der Unendlichkeit des Integrals eine Folge $\xi:\mathbb{N}\to J=\gamma[I]$ geben, so dass

$$\eta=\lim_{n\uparrow+\infty}\xi_n\quad\text{und}\quad 0=\lim_{n\uparrow+\infty}\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(\xi_n)),$$

woraus, da $E_\circ-\Phi\circ\gamma>0$ auf I, also auch $E_\circ-\Phi>0$ auf $J=\gamma[I]$,

$$E_\circ=\limsup_{J\ni x\to\eta}\Phi(x),$$

gelten muss. Aus $\lim\limits_{t\uparrow+\infty}\gamma(t)\in\mathbb{R}$ und der Differenzierbarkeit von γ folgt $0=\liminf\limits_{t\uparrow+\infty}|\gamma^\bullet(t)|$.

<u>Beweis</u> `d*)` Via `c)` gilt

$$E_\circ=\limsup_{J\in x\to\eta}\Phi(x),$$

woraus via der Stetigkeit von Φ und $\eta \in O = \mathsf{dom}\,\Phi$ die Aussage

$$\Phi(\eta) = \lim_{x \to \eta} \Phi(x) = \limsup_{J \in x \to \eta} \Phi(x) = E_\circ,$$

folgt. Via a) gilt die Unendlichkeit des angegebenen Integrals. Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** gilt

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_\lambda \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)) \right) \neq 0,$$

wobei $w_\lambda \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.)) \right)$ stetig auf $\gamma[I]$, woraus via der Stetigkeit von w_λ und Φ und wegen $\eta = \lim\limits_{t \downarrow -\infty} \gamma(t)$ und $E_\circ = \Phi(\eta)$ die Aussage

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow +\infty} \gamma^\bullet(t) = \lim_{t \uparrow +\infty} w_\lambda \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\gamma(t)) \right) &= w_\lambda \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\eta)) \right) \\ &= w_\lambda \left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - E_\circ) \right) = w_\lambda(0), \end{aligned}$$

folgt. Gemäss T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ gilt $0 = w_\lambda(0)$. Via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** ist γ zweimal stetig differenzierbar auf I und es gilt

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t)) \cdot \gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = 0,$$

so dass sich via der Positivität von T'' auf $\left]-a|b\right[\setminus \{0\}$ die Aussage

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) \cdot \frac{1}{T''(\gamma^\bullet(t))},$$

ergibt. Wegen der Stetigkeit von Φ' gilt $\lim\limits_{t \downarrow -\infty} -\dfrac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = -\dfrac{1}{m} \cdot \Phi'(\eta)$ und falls $0 \neq \Phi'(\eta)$ gilt, folgt aus der Stetigkeit und Nicht-Negativität von T'',

$$\lim_{t \downarrow -\infty} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\eta) \cdot \lim_{v \to 0} \frac{1}{T''(v)} \in \left[-\infty| +\infty\right] \setminus \{0\},$$

was $0 = \lim\limits_{t \downarrow -\infty} \gamma^\bullet(t)$ widerspricht. Konsequenter Weise muss $0 = \Phi'(\eta)$ gelten. $\square$

4.2 A posteriori. γ bei $\pm\infty$ reell. Λ

$\boxed{\textbf{Satz}}$

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen und $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V3. $J \subseteq O$ und J echtes reelles Intervall und $x_\circ \in \mathbb{R} \setminus J$ und ($x_\circ = \sup J$ oder $x_\circ = \inf J$).

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

V5. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V6. $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(x) > E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$, wobei $\overline{\beta} = \lim_{v \uparrow b} \tilde{T}$.

V7. Λ Stammfunktion von $\dfrac{1}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)}$ auf J,

wobei $w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft [0|b[\right)^{-1}$.

V8. $\lim_{x \to x_\circ} \Lambda(x) \in \{\pm\infty\}$.

V9. $\gamma = \Lambda^{-1}$.

$\Rightarrow$

a) Falls $x_\circ = \sup J$, dann

$$+\infty = \sup(\mathsf{dom}\,\gamma) \quad \text{und} \quad x_\circ = \lim_{t \uparrow +\infty} \gamma(t) \quad \text{und} \quad 0 = \liminf_{t \uparrow +\infty} |\gamma^\bullet(t)|.$$

b) Falls $x_\circ = \inf J$, dann

$$-\infty = \inf(\mathsf{dom}\,\gamma) \quad \text{und} \quad x_\circ = \lim_{t \downarrow +\infty} \gamma(t) \quad \text{und} \quad 0 = \liminf_{t \downarrow -\infty} |\gamma^\bullet(t)|.$$

c) $x_\circ$ Häufungspunkt von O und $E_\circ = \limsup_{J \ni x \to x_\circ} \Phi(x)$.

i) Falls $x_\circ \in O$, dann

$$E_\circ = \Phi(x_\circ) \quad \text{und} \quad 0 = \Phi'(x_\circ),$$

und $x_\circ = \sup J \quad \Rightarrow \quad 0 = \lim_{t \uparrow +\infty} \gamma^\bullet(t)$

und $x_\circ = \inf J \quad \Rightarrow \quad 0 = \lim_{t \downarrow -\infty} \gamma^\bullet(t)$.

<u>Beweis</u> `a)`, `b)` Via $\gamma = \Lambda^{-1}$ und $x_\circ \in \mathbb{R}$ evident.

<u>Beweis</u> `c)` Nach Voraussetzung und via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ist die Funktion $w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig und$\neq 0$ auf J.

<u>1.Fall</u> $x_\circ = \sup J$. Sei $s \in \mathsf{dom}\,\gamma$. Dann via `a)` und via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma^\bullet) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** gilt

$$\int_{\gamma(s)}^{x_\circ} \frac{dz}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)} = \lim_{t \uparrow +\infty} \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)} = +\infty.$$

Wegen $J \subseteq O$ und $x_\circ = \sup J$ ist $x_\circ$ Häufungspunkt von O. Gemäß T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ist w_{+1} streng wachsend und nimmt nur an der Stelle 0 den Wert 0 an. Deswegen muss es via $\gamma(s), x_\circ \in \mathbb{R}$ und der Unendlichkeit des Integrals eine Folge $\xi : \mathbb{N} \to [\gamma(s)|x_\circ[$ geben, so dass

$$x_\circ = \lim_{n \uparrow +\infty} \xi_n \quad \text{und} \quad 0 = \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\xi_n)),$$

woraus, da $E_\circ - \Phi > 0$ auf J und $[\gamma(s)|x_\circ[\subseteq J$,

$$E_\circ = \limsup_{J \ni x \to x_\circ} \Phi(x),$$

folgt.

<u>2.Fall</u> $x_\circ = \inf J$. Sei $s \in \mathsf{dom}\,\gamma$. Dann via `b)` und $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma^\bullet) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori**

$$\int_{\gamma(s)}^{x_\circ} \frac{dz}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)} = \lim_{t \downarrow -\infty} \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_{+1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)} = -\infty.$$

Wegen $J \subseteq O$ und $x_\circ = \inf J$ ist $x_\circ$ Häufungspunkt von O. Gemäß T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ist w_λ streng monoton und nimmt nur an der Stelle 0 den Wert 0 an. Deswegen muss es via $\gamma(s), x_\circ \in \mathbb{R}$ und der Unendlichkeit des Integrals eine Folge $\xi : \mathbb{N} \to]x_\circ|\gamma(s)]$ geben, so dass

$$x_\circ = \lim_{n \uparrow +\infty} \xi_n \quad \text{und} \quad 0 = \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(\xi_n)),$$

woraus, da $E_\circ - \Phi > 0$ auf J und $]x_\circ|\gamma(s)] \subseteq J$,

$$E_\circ = \limsup_{J \ni x \to x_\circ} \Phi(x),$$

folgt.

<u>Beweis</u> `d)` Via `c)` gilt

$$E_\circ = \limsup_{J \in x \to x_\circ} \Phi(x),$$

woraus via der Stetigkeit von Φ und $x_\circ \in O = \mathsf{dom}\,\Phi$ die Aussage

$$\Phi(x_\circ) = \lim_{x\to x_\circ} \Phi(x) = \limsup_{J\in x\to x_\circ} \Phi(x) = E_\circ,$$

folgt. Via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** gilt

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \neq 0,$$

wobei $w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig auf $\gamma[I]$, woraus im Fall $x_\circ = \sup J$ via der Stetigkeit von w_{+1} und Φ und wegen $x_\circ = \lim\limits_{t\uparrow+\infty}\gamma(t)$ und $E_\circ = \Phi(x_\circ)$ die Aussage

$$\begin{aligned}\lim_{t\uparrow+\infty}\gamma^\bullet(t) = \lim_{t\uparrow+\infty} w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) &= w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x_\circ))\right)\\ &= w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - E_\circ)\right) = w_{+1}(0),\end{aligned}$$

und im Fall $x_\circ = \inf J$ via der Stetigkeit von w_{+1} und Φ und wegen $x_\circ = \lim\limits_{t\downarrow-\infty}\gamma(t)$ und $E_\circ = \Phi(x_\circ)$ die Aussage

$$\begin{aligned}\lim_{t\downarrow-\infty}\gamma^\bullet(t) = \lim_{t\downarrow-\infty} w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) &= w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x_\circ))\right)\\ &= w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - E_\circ)\right) = w_{+1}(0),\end{aligned}$$

folgt. Gemäss T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm1}$ gilt $0 = w_{+1}(0)$. Via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** ist γ zweimal stetig differenzierbar auf I und es gilt

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t)) = 0,$$

so dass sich via der Positivität von T'' auf $]-a|b[\setminus\{0\}$ die Aussage

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\cdot\frac{1}{T''(\gamma^\bullet(t))},$$

ergibt. Wegen der Stetigkeit von Φ' gilt im Fall $x_\circ = \sup J$ die Aussage $\lim\limits_{t\uparrow+\infty} -\dfrac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t)) = -\dfrac{1}{m}\cdot\Phi'(x_\circ)$ und falls $0 \neq \Phi'(x_\circ)$ gilt, folgt aus der Stetigkeit und Nicht-Negativität von T'',

$$\lim_{t\uparrow+\infty}\gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\eta)\cdot\lim_{v\to0}\frac{1}{T''(v)} \in [-\infty|+\infty]\setminus\{0\},$$

was $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} \gamma^\bullet(t)$ widerspricht. Konsequenter Weise muss $0 = \Phi'(x_\circ)$ gelten. Wegen der Stetigkeit von Φ' gilt im Fall $x_\circ = \inf J$ die Aussage $\lim_{t\downarrow-\infty} -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(x_\circ)$ und falls $0 \neq \Phi'(x_\circ)$ gilt, folgt aus der Stetigkeit und Nicht-Negativität von T'',

$$\lim_{t\downarrow-\infty} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\eta) \cdot \lim_{v\to 0} \frac{1}{T''(v)} \in [-\infty|+\infty] \setminus \{0\},$$

was $0 = \lim_{t\downarrow-\infty} \gamma^\bullet(t)$ widerspricht. Konsequenter Weise muss $0 = \Phi'(x_\circ)$ gelten. □

⋆

Satz*

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen und $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V3. $J \subseteq O$ und J echtes reelles Intervall und $x_\circ \in \mathbb{R} \setminus J$ und ($x_\circ = \sup J$ oder $x_\circ = \inf J$).

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus\{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$.

V5. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V6. $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(x) > E_\circ - m \cdot \overline{\alpha}$, wobei $\overline{\alpha} = \lim_{v\downarrow-a} \tilde{T}$.

V7. Λ Stammfunktion von $\dfrac{1}{w_{-1}\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)}$ auf J, wobei $w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright]-a|0]\right)^{-1}$.

V8. $\lim_{x\to x_\circ} \Lambda(x) \in \{\pm\infty\}$.

V9. $\gamma = \Lambda^{-1}$.

$\Rightarrow$

a) Falls $x_\circ = \sup J$, dann

$$-\infty = \inf(\mathsf{dom}\,\gamma) \quad \text{und} \quad x_\circ = \lim_{t\downarrow-\infty} \gamma(t) \quad \text{und} \quad 0 = \liminf_{t\downarrow-\infty} |\gamma^\bullet(t)|.$$

b) Falls $x_\circ = \inf J$, dann

$$+\infty = \sup(\mathsf{dom}\,\gamma) \quad \text{und} \quad x_\circ = \lim_{t\uparrow+\infty} \gamma(t) \quad \text{und} \quad 0 = \liminf_{t\uparrow+\infty} |\gamma^\bullet(t)|.$$

`c)` $x_\circ$ Häufungspunkt von O und $E_\circ = \limsup_{J\in x\to x_\circ} \Phi(x)$.

`i)` Falls $x_\circ \in O$, dann

$$E_\circ = \Phi(x_\circ) \quad \text{und} \quad 0 = \Phi'(x_\circ),$$

$$\text{und } x_\circ = \sup J \quad \Rightarrow \quad 0 = \lim_{t\downarrow -\infty} \gamma^\bullet(t)$$
$$\text{und } x_\circ = \inf J \quad \Rightarrow \quad 0 = \lim_{t\uparrow +\infty} \gamma^\bullet(t).$$

Beweis* `a)`, `b)` Via $\gamma = \Lambda^{-1}$ und $x_\circ \in \mathbb{R}$ evident.

Beweis* `c)` Nach Voraussetzung und via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ist die Funktion $w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig und$\neq 0$ auf J.

1.Fall $x_\circ = \sup J$. Sei $s \in \mathsf{dom}\,\gamma$. Dann via `a)` und via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma^\bullet) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** gilt

$$\int_{\gamma(s)}^{x_\circ} \frac{dz}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)} = \lim_{t\downarrow -\infty} \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)} = -\infty.$$

Wegen $J \subseteq O$ und $x_\circ = \sup J$ ist $x_\circ$ Häufungspunkt von O. Gemäß T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ist w_{-1} streng fallend und nimmt nur an der Stelle 0 den Wert 0 an. Deswegen muss es via $\gamma(s), x_\circ \in \mathbb{R}$ und der Unendlichkeit des Integrals eine Folge $\xi : \mathbb{N} \to [\gamma(s)|x_\circ[$ geben, so dass

$$x_\circ = \lim_{n\uparrow +\infty} \xi_n \quad \text{und} \quad 0 = \lim_{n\uparrow +\infty} \frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\xi_n)),$$

woraus, da $E_\circ - \Phi > 0$ auf J und $[\gamma(s)|x_\circ[\subseteq J$,

$$E_\circ = \limsup_{J\ni x\to x_\circ} \Phi(x),$$

folgt.

2.Fall $x_\circ = \inf J$. Sei $s \in \mathsf{dom}\,\gamma$. Dann via `b)` und $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma^\bullet) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori**

$$\int_{\gamma(s)}^{x_\circ} \frac{dz}{w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)} = \lim_{t\uparrow +\infty} \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_{+1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)} = +\infty.$$

Wegen $J \subseteq O$ und $x_\circ = \inf J$ ist $x_\circ$ Häufungspunkt von O. Gemäß T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ist w_λ streng monoton und nimmt nur an der Stelle 0 den Wert 0 an. Deswegen muss es via $\gamma(s), x_\circ \in \mathbb{R}$ und der Unendlichkeit des Integrals eine Folge $\xi : \mathbb{N} \to]x_\circ|\gamma(s)]$ geben, so dass

$$x_\circ = \lim_{n\uparrow +\infty} \xi_n \quad \text{und} \quad 0 = \lim_{n\uparrow +\infty} \frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\xi_n)),$$

woraus, da $E_\circ - \Phi > 0$ auf J und $]x_\circ|\gamma(s)] \subseteq J$,

$$E_\circ = \limsup_{J \ni x \to x_\circ} \Phi(x),$$

folgt.

Beweis* `d)` Via `c)` gilt

$$E_\circ = \limsup_{J \in x \to x_\circ} \Phi(x),$$

woraus via der Stetigkeit von Φ und $x_\circ \in O = \mathsf{dom}\,\Phi$ die Aussage

$$\Phi(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \Phi(x) = \limsup_{J \in x \to x_\circ} \Phi(x) = E_\circ,$$

folgt. Via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** gilt

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \gamma^\bullet(t) = w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) \neq 0,$$

wobei $w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig auf $\gamma[I]$, woraus im Fall $x_\circ = \sup J$ via der Stetigkeit von w_{-1} und Φ und wegen $x_\circ = \lim\limits_{t \downarrow -\infty} \gamma(t)$ und $E_\circ = \Phi(x_\circ)$ die Aussage

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow -\infty} \gamma^\bullet(t) = \lim_{t \downarrow -\infty} w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) &= w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x_\circ))\right) \\ &= w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - E_\circ)\right) = w_{-1}(0), \end{aligned}$$

und im Fall $x_\circ = \inf J$ via der Stetigkeit von w_{+1} und Φ und wegen $x_\circ = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} \gamma(t)$ und $E_\circ = \Phi(x_\circ)$ die Aussage

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow +\infty} \gamma^\bullet(t) = \lim_{t \uparrow +\infty} w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(\gamma(t))\right) &= w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(x_\circ))\right) \\ &= w_{-1}\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - E_\circ)\right) = w_{-1}(0), \end{aligned}$$

folgt. Gemäss T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ gilt $0 = w_{-1}(0)$. Via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma) = 0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** ist γ zweimal stetig differenzierbar auf I und es gilt

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad T''(\gamma^\bullet(t))\cdot\gamma^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t)) = 0,$$

so dass sich via der Positivität von T'' auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ die Aussage

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma(t))\cdot\frac{1}{T''(\gamma^\bullet(t))},$$

ergibt. Wegen der Stetigkeit von Φ' gilt im Fall $x_\circ = \sup J$ die Aussage $\lim_{t\downarrow-\infty} -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(x_\circ)$ und falls $0 \neq \Phi'(x_\circ)$ gilt, folgt aus der Stetigkeit und Nicht-Negativität von T'',

$$\lim_{t\downarrow-\infty} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\eta) \cdot \lim_{v\to 0} \frac{1}{T''(v)} \in [-\infty|+\infty] \setminus \{0\},$$

was $0 = \lim_{t\downarrow.\infty} \gamma^{\bullet}(t)$ widerspricht. Konsequenter Weise muss $0 = \Phi'(x_\circ)$ gelten. Wegen der Stetigkeit von Φ' gilt im Fall $x_\circ = \inf J$ die Aussage $\lim_{t\uparrow+\infty} -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma(t)) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(x_\circ)$ und falls $0 \neq \Phi'(x_\circ)$ gilt, folgt aus der Stetigkeit und Nicht-Negativität von T'',

$$\lim_{t\uparrow+\infty} \gamma^{\bullet\bullet}(t) = -\frac{1}{m} \cdot \Phi'(\eta) \cdot \lim_{v\to 0} \frac{1}{T''(v)} \in [-\infty|+\infty] \setminus \{0\},$$

was $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} \gamma^{\bullet}(t)$ widerspricht. Konsequenter Weise muss $0 = \Phi'(x_\circ)$ gelten. $\square$

4.3 A posteriori. γ bei $\pm\infty$ gleich $\pm\infty$

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen. $\Phi \in \mathsf{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V3. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathsf{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$ und $w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright]-a|0]\right)^{-1}$.

V4. γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$ und $-a < \gamma^\bullet < b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

V5. $E_\circ \in \mathbb{R}$ und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \tilde{T}(\gamma^\bullet(t)) + \dfrac{2}{m} \cdot \Phi(\gamma(t)) = \dfrac{2 \cdot E_\circ}{m}$.

V6. $s \in I \subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und I unbeschränktes reelles Intervall und $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf I.

$\Rightarrow$

a) Falls $+\infty = \sup I$ und $\eta = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} \gamma(t) \in \{\pm\infty\}$ und $J = \gamma[I]$ und $\lambda = \mathsf{sgn}\,(\gamma^\bullet)$ auf I mit $\lambda \in \{\pm 1\}$, dann ist J unbeschränktes reelles Intervall mit $J \subseteq O$ und

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} = +\infty$$

b) Falls $-\infty = \inf I$ und $\eta = \lim\limits_{t \downarrow +\infty} \gamma(t) \in \{\pm\infty\}$ und $J = \gamma[I]$ und $\lambda = \mathsf{sgn}\,(\gamma^\bullet)$ auf I mit $\lambda \in \{\pm 1\}$, dann ist J unbeschränktes reelles Intervall mit $J \subseteq O$ und

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z))\right)} = -\infty$$

Beweis a) I ist ein echtes reelles Intervall$\subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und es gilt $E_\circ - \Phi \circ \gamma > 0$ auf I. Somit gilt via $T''(\gamma^\bullet) \cdot \gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(\gamma) = 0$ **(+1) A posteriori**

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)} = t - s,$$

wobei $w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig und$\neq 0$ auf $\gamma[I]$ ist, so dass via $\eta = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} \gamma(t)$ die Gleichung

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)} = \lim_{t \uparrow +\infty} \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(z)\right)}$$
$$= \lim_{t \uparrow +\infty} (t - s) = +\infty,$$

folgt. Wegen $J = \gamma[I]$ und $\eta = \lim_{t\uparrow+\infty} \gamma(t) \in \{\pm\infty\}$ ist J unbeschränkt. Da γ stetig ist und I ein reelles Intervall ist, ist J ein reelles Intervall. Auch gilt $J = \gamma[I] \subseteq \mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$.

<u>Beweis</u> `b*)` I ist ein echtes reelles Intervall$\subseteq \mathsf{dom}\,\gamma$ und es gilt $E_\circ - \Phi\circ\gamma > 0$ auf I. Somit gilt via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet} + \frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma) = 0$ **(+1) A posteriori**

$$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)} = t - s,$$

wobei $w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig und$\neq 0$ auf $\gamma[I]$ ist, so dass via $\eta = \lim_{t\downarrow-\infty}\gamma(t)$ die Gleichung

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)} = \lim_{t\downarrow+\infty} \int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)}$$
$$= \lim_{t\downarrow+\infty}(t-s) = -\infty,$$

folgt. Wegen $J = \gamma[I]$ und $\eta = \lim_{t\downarrow-\infty} \gamma(t) \in \{\pm\infty\}$ ist J unbeschränkt. Da γ stetig ist und I ein reelles Intervall ist, ist J ein reelles Intervall. Auch gilt $J = \gamma[I] \subseteq \mathsf{ran}\,\gamma \subseteq O$. $\square$

4.4 A posteriori. γ bei $\pm\infty$ gleich $\pm\infty$. Λ

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V3. $x_\circ \in J \subseteq O$. J unbeschränktes reelles Intervall. $\eta \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$.

V4. $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[: \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$ und $w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft [0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonleft]-a|0]\right)^{-1}$.

V5. $\lambda \in \{\pm 1\}$.

V6. $E_\circ \in \mathbb{R}$.

V7. $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(x)$

und $(\lambda = +1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$ auf J, wobei $\overline{\beta} = \lim_{v \uparrow b} \tilde{T}(v))$

und $(\lambda = -1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\alpha}$ auf J, wobei $\overline{\alpha} = \lim_{v \downarrow -a} \tilde{T}(v))$,

V8. Λ Stammfunktion von $\dfrac{1}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)}$ auf J,

V9. $\tau = \lim_{x \to \eta} \Lambda(\eta) \in \{\pm\infty\}$.

V10. $\gamma = \Lambda^{-1}$.

$\Rightarrow$

a) $\mathsf{dom}\,\gamma = \mathsf{ran}\,\Lambda$ unbeschränktes Intervall.

b) $\tau = \sup(\mathsf{dom}\,\gamma)$ oder $\tau = \inf(\mathsf{dom}\,\gamma)$.

c) $\eta = \lim_{t \to \tau} \gamma(t) \in \{\pm\infty\}$.

Beweis trivial. $\square$

5 $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ und Energiegleichung (+5)

5.1 A posteriori. γ bei $t_\circ$ gleich $\pm\infty$

Satz

V1. $0<m\in\mathbb{R}$.

V2. $0\neq O\subseteq\mathbb{R}$ offen. $\Phi\in\mathtt{C}^1(O:\mathbb{R})$.

V3. $0<a$ und $0<b$ und $T\in\mathtt{C}^2(]-a|b[:\mathbb{R})$ und $0=T(0)$ und $0<T''$ auf $]-a|b[\setminus\{0\}$ und $\tilde{T}:]-a|b[\to\mathbb{R}$, $\tilde{T}(v)=v\cdot T'(v)-T(v)$ und $w_{+1}=\left(\tilde{T}\downharpoonleft[0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1}=\left(\tilde{T}\downharpoonleft]-a|0]\right)^{-1}$.

V4. γ ist 1-Kurve in $\mathbb{R}$ und $\mathsf{ran}\,\gamma\subseteq O$ und $-a<\gamma^\bullet<b$ auf $\mathsf{dom}\,\gamma$.

V5. $E_\circ\in\mathbb{R}$ und $\forall t:t\in\mathsf{dom}\,\gamma\quad\Rightarrow\quad 2\cdot\tilde{T}(\gamma^\bullet(t))+\dfrac{2}{m}\cdot\Phi(\gamma(t))=\dfrac{2\cdot E_\circ}{m}$.

V6. $s\in I\subseteq\mathsf{dom}\,\gamma$ und I echtes reelles Intervall und $E_\circ-\Phi\circ\gamma>0$ auf I und $t_\circ$ ist Randpunkt von I und $t_\circ\in\mathbb{R}\setminus I$.

V7. $\eta=\lim\limits_{t\to t_\circ}\gamma(t)\in\{\pm\infty\}$.

V8, $\lambda\in\{\pm1\}$ und $\lambda=\mathsf{sgn}\,(\gamma^\bullet)$ auf I.

$\Rightarrow$

a) ($\eta=\sup\gamma[I]$ oder $\eta=\inf\gamma[I]$) und $\displaystyle\int_{\gamma(s)}^{\eta}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z)\right)}=t_\circ-s\in\mathbb{R}$.

b) Falls $\lambda=+1$, dann $b=+\infty$ und $\liminf\limits_{cdz\to\eta}\Phi(z)=E_\circ-m\cdot\overline{\beta}$,

wobei $\overline{\beta}=\lim\limits_{v\uparrow b}\tilde{T}(v)$.

c) Falls $\lambda=-1$, dann $a=+\infty$ und $\liminf\limits_{z\to\eta}\Phi(z)=E_\circ-m\cdot\overline{\alpha}$,

wobei $\overline{\alpha}=\lim\limits_{v\downarrow -a}\tilde{T}(v)$.

<u>Beweis</u> a) Da $\gamma[I]$ ein reelles Intervall ist, ist η via V7. Supremum oder Infimum von $\gamma[I]$. Via $T''(\gamma^\bullet)\cdot\gamma^{\bullet\bullet}+\frac{1}{m}\cdot\Phi'(\gamma)=0$ **und Energiegleichung (+1). A posteriori** gilt via $s\in I$,

$$\forall t:t\in I\quad\Rightarrow\quad\int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)}=t-s,$$

wobei $w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(.))\right)$ stetig und$\neq 0$ auf $\gamma[I]$ ist, so dass via `V7.`,

$$\int_{\gamma(s)}^{\eta}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)}=\lim_{t\to t_\circ}\int_{\gamma(s)}^{\gamma(t)}\frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)}$$
$$=\lim_{t\to t_\circ}t-s=t_\circ-s,$$

und $t_\circ, s\in\mathbb{R}$.

Beweis `b), c)` Wegen der via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm1}$ bestehenden Vorzeichenbeständigkeit von w_λ und da das Integrationsintervall in `a)` unbeschränkt ist und $\eta\in\{\pm\infty\}$ gilt, muss

$$0=\liminf_{z\to\eta}\left|\frac{1}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)}\right|,$$

gelten, so dass

$$+\infty=\limsup_{z\to\eta}\left|w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))\right)\right|,$$

woraus im Fall $\lambda=+1$ einerseits via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm1}$ via $w_{+1}:[0|\overline{\beta}[\;\to[0|b[$ bijektiv, die Aussage $b=+\infty$, andererseits $\limsup_{z\to\eta}\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))=\overline{\beta}$, folgt, und sich im Fall $\lambda=-1$ einerseits via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm1}$ via $w_{-1}:[0|\overline{\alpha}[\;\to\;]-a|0]$ bijektiv, die Aussage $a=+\infty$ ergibt und andererseits $\limsup_{z\to\eta}\frac{1}{m}\cdot(E_\circ-\Phi(z))=\overline{\alpha}$ folgt. □

5.2 A posteriori. γ bei $t_\circ$ gleich $\pm\infty$. Λ

Satz

`V1.` $0 < m \in \mathbb{R}$.

`V2.` $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`V3.` $x_\circ \in J \subseteq O$. J unbeschränktes reelles Intervall. $\eta \in \{\inf J, \sup J\} \cap \{\pm\infty\}$.

`V4.` $0 < a$ und $0 < b$ und $T \in \mathtt{C}^2(]-a|b[\ : \mathbb{R})$ und $0 = T(0)$ und $0 < T''$ auf $]-a|b[\ \setminus \{0\}$ und $\tilde{T} :]-a|b[\ \to \mathbb{R}$, $\tilde{T}(v) = v \cdot T'(v) - T(v)$ und $w_{+1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright [0|b[\right)^{-1}$ und $w_{-1} = \left(\tilde{T} \downharpoonright]-a|0]\right)^{-1}$.

`V5.` $\lambda \in \{\pm 1\}$.

`V6.` $E_\circ \in \mathbb{R}$.

`V7.` $\forall x : x \in J \quad \Rightarrow \quad E_\circ > \Phi(x)$

und ($\lambda = +1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$ auf J, wobei $\overline{\beta} = \lim\limits_{v \uparrow b} \tilde{T}(v)$)

und ($\lambda = -1 \Rightarrow \Phi > E_\circ - m \cdot \overline{\alpha}$ auf J, wobei $\overline{\alpha} = \lim\limits_{v \downarrow -a} \tilde{T}(v)$),

`V8.` Λ Stammfunktion von $\dfrac{1}{w_\lambda\left(\frac{1}{m} \cdot (E_\circ - \Phi(.))\right)}$ auf J,

`V9.` $t_\circ = \lim\limits_{x \to \eta} \Lambda(\eta) \in \mathbb{R}$.

`V10.` $\gamma = \Lambda^{-1}$.

$\Rightarrow$

`a)` $t_\circ$ Häufungspunkt von $\mathsf{dom}\,\gamma$ und $\eta = \lim\limits_{t \to t_\circ} \gamma(t) \in \{\pm\infty\}$.

`b)` Falls $\lambda = +1$, dann $b = +\infty$ und $\liminf\limits_{z \to \eta} \Phi(z) = E_\circ - m \cdot \overline{\beta}$, wobei $\overline{\beta} = \lim\limits_{v \uparrow b} \tilde{T}(v) = +\infty$

`c)` Falls $\lambda = -1$, dann $a = +\infty$ und $\liminf\limits_{z \to \eta} \Phi(z) = E_\circ - m \cdot \overline{\alpha}$, wobei $\overline{\alpha} = \lim\limits_{v \downarrow -a} \tilde{T}(v) = +\infty$.

<u>Beweis</u> `a)` trivial.

<u>Beweis</u> `b), c)` Via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ ist $w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(.))\right)$ stetig und $\neq 0$ auf J. Da J unbeschränktes Intervall ist, gibt es $\tilde{x} \in J$. Es folgt für alle $x \in J$,

$$\Lambda(x) - \Lambda(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}}^{x} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)},$$

und somit

$$\lim_{x\to\eta} \Lambda(\eta) = t_\circ = \Lambda(\tilde{x}) + \int_{\tilde{x}}^{\eta} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)} \in \mathbb{R},$$

wobei $\Lambda(\tilde{x}) \in \mathbb{R}$, so dass

$$\int_{\tilde{x}}^{\eta} \frac{dz}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)\right)} \in \mathbb{R}.$$

Wegen der via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ bestehenden Vorzeichenbeständigkeit von w_λ und da hier das Integrationsintervall unbeschränkt ist und $\eta \in \{\pm\infty\}$ gilt, muss

$$0 = \liminf_{z\to\eta} \left| \frac{1}{w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z))\right)} \right|,$$

gelten, so dass

$$+\infty = \limsup_{z\to\eta} \left| w_\lambda\left(\frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z))\right) \right|,$$

woraus im Fall $\lambda = +1$ einerseits via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ via $w_{+1} : [0|\overline{\beta}[\to [0|b[$ bijektiv, die Aussage $b = +\infty$s, andererseits $\limsup_{z\to\eta} \frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)) = \overline{\beta}$, folgt, und sich im Fall $\lambda = -1$ einerseits via T **konvex und** $\tilde{T}$ **und** $w_{\pm 1}$ via $w_{-1} : [0|\overline{\alpha}[\to]-a|0]$ bijektiv, die Aussage $a = +\infty$ ergibt und andererseits $\limsup_{z\to\eta} \frac{1}{m}\cdot(E_\circ - \Phi(z)) = \overline{\alpha}$ folgt. $\square$