Lagrange-Mechanik 1

Andreas Unterreiter

2. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Notationen

1.1 dom $f \subseteq \mathbb{R}^d$

Falls $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $0 \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, dann ist für $x \in \Omega$ und $j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$(\partial_j f)(x) = f_{,j}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot \mathfrak{e}_j^d) - f(x)}{h},$$

wobei $\mathfrak{e}_j^d$ der j-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^d$ ist, die j-partielle Ableitung von f an der Stelle x.

1.2 dom $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$

Falls $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $0 \neq \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen, dann ist für $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $(t, x) \in \Omega$,

$$(\partial_{\mathtt{t}} f)((t, x)) = f^{\bullet}((t, x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f((t + h, x)) - f((t, x))}{h},$$

die Zeitableitung von f an der Stelle (t, x) und falls $j \in \{1, \ldots, d\}$, dann ist

$$(\partial_j f)((t, x)) = f_{,j}((t, x)) = \lim_{h \to 0} \frac{f((t, x + h \cdot \mathfrak{e}_j^d)) - f((t, x))}{h},$$

die j-partielle Ableitung von f an der Stelle (t, x) und der Ortsgradient von f in (t, x) ist

$$(\nabla_{\mathtt{x}} f)((t, x)) = (f_{,1}((t, x)), \ldots, f_{,d}((t, x))).$$

1.3 dom $f \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$

Falls $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $0 \neq \Omega \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ offen, dann ist für $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$, $((t, x), v) \in \Omega$,

$$(\partial_{\mathtt{t}} f)(((t, x), v)) = f^{\bullet}(((t, x), v)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(((t + h, x), v)) - f(((t, x), v))}{h},$$

die Zeitableitung von f an der Stelle $((t, x), v)$ und falls $j \in \{1, \ldots, d\}$, dann ist

$$(\partial_{\mathtt{x}j} f)(((t, x), v)) = f_{,j}(((t, x), v)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(((t, x + h \cdot \mathfrak{e}_j^d), v)) - f(((t, x), v))}{h},$$

die j-partielle Orts-Ableitung von f an der Stelle $((t,x),v)$ und es ist

$$(\partial_{\mathsf{v}j} f)(((t,x),v)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(((t,x),v+h\cdot \mathfrak{e}_j^d)) - f(((t,x),v))}{h},$$

die j-partielle Geschwindigkeits-Ableitung von f an der Stelle $((t,x),v)$t und der Ortsgradient von f in $((t,x),v)$ ist

$$(\nabla_{\mathtt{x}} f)(((t,x),v)) = (f_{,1}(((t,x),v)),\ldots,f_{,d}(((t,x),v))),$$

und der Geschwindigkeitsgradient von f in $((t,x),v)$ ist

$$(\nabla_{\mathsf{v}} f)(((t,x),v)) = ((\partial_{\mathsf{v}1})f(((t,x),v)),\ldots,(\partial_{\mathsf{v}d} f)(((t,x),v))).$$

2 Kurven

Definition c ist k-Kurve im $\mathbb{R}^d$ $:\Leftrightarrow$ c Funktion und $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall und $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $\mathsf{ran}\, c \subseteq \mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{N}$ und c ist k-mal stetig differenzierbar.

⋆

Definition c ist k-Kurve im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ $:\Leftrightarrow$ c Funktion und $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall und $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $\mathsf{ran}\, c \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{N}$ und c ist k-mal stetig differenzierbar.

⋆

Definition c ist k-Kurve im $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ $:\Leftrightarrow$ c Funktion und $\mathsf{dom}\, c$ echtes reelles Intervall und $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $\mathsf{ran}\, c \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{N}$ und c ist k-mal stetig differenzierbar.

⋆

0-mal stetig differenzierbar ist äquivalent zu stetig.

⋆

2.1 $f \circ c$ und $(f \circ c)^\bullet$

Satz

V1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $k, \kappa \in \mathbb{N}$.

V2. $0 \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

V3. $f \in \mathsf{C}^\kappa(\Omega : \mathbb{R})$.

V4. c ist k-Kurve im $\mathbb{R}^d$.

V5. $\mathsf{ran}\, c \subseteq \Omega$.

$\Rightarrow$

a) $\mathsf{dom}\,(f \circ c) = \mathsf{dom}\, c$.

b) $f \circ c \in \mathsf{C}^{\min\{k,\kappa\}}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$.

c) Falls $1 \leq k, \kappa$, dann

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad (f \circ c)^\bullet(t) = \sum_{j=1}^{d} (f_{,j} \circ c)(t) \cdot c_j^\bullet(t)$$

$$= \langle (\nabla f) \circ c | c^\bullet \rangle (t).$$

<u>Beweis</u> trivial. □

2.2 $c^\times$ und $f \circ c^\times$ und $(f \circ c^\times)^\bullet$

Falls c eine 0-Kurve im $\mathbb{R}^d$ ist, so ist

$$c^\times = \{(t, (t, c(t))) : t \in \mathsf{dom}\, c\}.$$

⋆

Satz

V. c ist k-Kurve im $\mathbb{R}^d$.

$\Rightarrow$

a) $\mathsf{dom}\,(c^\times) = \mathsf{dom}\, c$.

b) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad c^\times(t) = (t, c(t))$.

c) $c^\times$ ist k-Kurve im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Beweis trivial. $\square$

$\star$

Satz

V1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $k, \kappa \in \mathbb{N}$.

V2. $0 \neq \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen.

V3. $f \in \mathsf{C}^\kappa(\Omega : \mathbb{R})$.

V4. c ist k-Kurve im $\mathbb{R}^d$.

V5. $\mathsf{ran}\,(c^\times) \subseteq \Omega$.

$\Rightarrow$

a) $\mathsf{dom}\,(f \circ c^\times) = \mathsf{dom}\, c$.

b) $f \circ c^\times \in \mathsf{C}^{\min\{k,\kappa\}}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$.

c) Falls $1 \leq k, \kappa$, dann

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad (f \circ c^\times)^\bullet(t) = (f^\bullet \circ c^\times)(t) + \sum_{j=1}^{d} (f_{,j} \circ c^\times)(t) \cdot c_j^\bullet(t)$$

$$. = (f^\bullet \circ c^\times)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{x}} f) \circ c^\times | c^\bullet \rangle(t).$$

Beweis trivial. $\square$

2.3 c^* und $f \circ c^*$ und $(f \circ c^*)^\bullet$

Falls c eine 1-Kurve im $\mathbb{R}^d$ ist, so ist

$$c^* = \{(t, ((t, c(t)), c^\bullet(t))) : t \in \mathsf{dom}\, c\}.$$

⋆

Satz

V1. $1 \leq k \in \mathbb{N}$.

V2. c ist k-Kurve im $\mathbb{R}^d$.

$\Rightarrow$

a) $\mathsf{dom}\,(c^*) = \mathsf{dom}\, c$.

b) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad c^*(t) = ((t, c(t)), c^\bullet(t))$.

c) c^* ist $-1 + k$-Kurve im $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$.

Beweis trivial. □

⋆

Satz

V1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \in \mathbb{N}$ und $\kappa \in \mathbb{N}$.

V2. $0 \neq \Omega \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ offen.

V3. $f \in \mathsf{C}^\kappa(\Omega : \mathbb{R})$.

V4. c ist k-Kurve im $\mathbb{R}^d$.

V5. $\mathsf{ran}\,(c^*) \subseteq \Omega$.

$\Rightarrow$

a) $\mathsf{dom}\,(f \circ c^*) = \mathsf{dom}\, c$.

b) $f \circ c^* \in \mathsf{C}^{\min\{-1+k,\kappa\}}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$.

c) Falls $2 \leq k$ und $1 \leq \kappa$, dann

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow$$

$$(f \circ c^*)^\bullet(t) = (f^\bullet \circ c^*)(t) + \sum_{j=1}^{d} (f_{,j} \circ c^*)(t) \cdot c_j^\bullet(t) + \sum_{j=1}^{d} ((\partial_{\mathtt{v}j} f) \circ c^*)(t) \cdot c_j^{\bullet\bullet}(t)$$

$$= (f^\bullet \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{x}} f) \circ c^* | c^\bullet \rangle(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} f) \circ c^* | c^{\bullet\bullet} \rangle(t).$$

Beweis trivial. □

3 L ist d, Ω-Lagrange-Funktion

Definition L ist d, Ω-Lagrange-Funktion

$:\Leftrightarrow$

1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$.
2. $0 \neq \Omega \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ offen.
3. $L \in \mathtt{C}^1(\Omega : \mathbb{R})$.
4. $\nabla_{\mathtt{v}} L \in \mathtt{C}^1(\Omega : \mathbb{R}^d)$.

4 (Kinetische)(Potentielle) d, Ω-Energie von L

Definition E ist d, Ω-Energie von L

$:\Leftrightarrow$

1. L ist d, Ω-Lagrange-Funktion.
2. $E : \Omega \to \mathbb{R}$.
3. $\forall t, x, v : t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^d \wedge v \in \mathbb{R}^d \wedge ((t, x), v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad E(((t,x),v)) = -L(((t,x),v)) + \sum_{j=1}^{d} (\partial_{\mathtt{v}j} L)(((t,x),v)) \cdot v_j$$
$$= (-L + \langle \nabla_{\mathtt{v}} L | \mathtt{v} \rangle)(((t,x),v)),$$

wobei

$$\mathtt{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d, \quad \mathtt{v}(((t,x),v)) = v.$$

$\star$

Definition K kinetische d, Ω-Energie von L

$:\Leftrightarrow$

1. L ist d, Ω-Lagrange-Funktion.
2. $K : \Omega \to \mathbb{R}$.
3. $\forall t, x, v : t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^d \wedge v \in \mathbb{R}^d \wedge ((t,x),v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad K(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{d} (\partial_{\mathtt{v}j} L)(((t,x),v)) \cdot v_j$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \langle \nabla_{\mathtt{v}} L | \mathtt{v} \rangle (((t,x),v)).$$

⋆

Definition P potentielle d, Ω-Energie von L

$:\Leftrightarrow$

1. L ist d, Ω-Lagrange-Funktion.
2. $P : \Omega \to \mathbb{R}$.
3. $\forall t, x, v : t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^d \wedge v \in \mathbb{R}^d \wedge ((t,x),v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad P(((t,x),v)) = -L(((t,x),v)) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{d} (\partial_{\mathtt{v}j} L)(((t,x),v)) \cdot v_j$$

$$= \left(-L + \frac{1}{2} \cdot \langle \nabla_{\mathtt{v}} L | \mathtt{v} \rangle \right) (((t,x),v)).$$

⋆

Satz

a) E ist d, Ω-Energie von $L \quad \Rightarrow \quad E \in \mathtt{C}^1(\Omega : \mathbb{R})$.

b) K kinetische d, Ω-Energie von $L \quad \Rightarrow \quad K \in \mathtt{C}^1(\Omega : \mathbb{R})$.

c) P potentielle d, Ω-Energie von $L \quad \Rightarrow \quad P \in \mathtt{C}^1(\Omega : \mathbb{R})$.

<u>Beweis</u> trivial. □

⋆

Satz

`V1.` K kinetische d,Ω-Energie von L.

`V2.` P potentielle d,Ω-Energie von L.

$\Rightarrow$

$$L = K. - .P.$$

<u>Beweis</u> trivial. □

⋆

Satz

`V1.` E ist d,Ω-Energie von L.

`V2.` K kinetische d,Ω-Energie von L.

`V3.` P potentielle d,Ω-Energie von L.

$\Rightarrow$

`a)` $E = (K. + .P)$.

`b)` $K = \frac{1}{2} \cdot (E. + .L)$.

`c)` $P = \frac{1}{2} \cdot (E. - .L)$.

<u>Beweis</u> trivial. □

⋆

Satz

`V.` E ist d,Ω-Energie von L.

$\Rightarrow$

`a)` $\frac{1}{2} \cdot (E. + .L)$ kinetische d,Ω-Energie von L.

`b)` $\frac{1}{2} \cdot (E. - .L)$ potentielle d,Ω-Energie von L.

Beweis trivial. □

⋆

Satz

V1. E ist d, Ω-Energie von L.

V2. $k : \Omega \to \mathbb{R}$ und $p : \Omega \to \mathbb{R}$.

V3. $L = k. - .p$.

V3. $E = k. + .p$.

$\Rightarrow$

a) k kinetische d, Ω-Energie von L.

b) p potentielle d, Ω-Energie von L.

Beweis trivial. □

5 c ist d, Ω-Kurve von L

Definition c ist d, Ω-Kurve von L

$:\Leftrightarrow$

1. L ist d, Ω-Lagrange-Funktion.

2. c ist 2-Kurve im $\mathbb{R}^d$.

3. $\mathsf{ran}\,(c^*) \subseteq \Omega$.

5.1 Δ ist d, Ω, L-ELK von c

Definition Δ ist d, Ω, L-ELK von c

$:\Leftrightarrow$

1. c ist d, Ω-Kurve von L.

2. $\Delta : \mathsf{dom}\, c \to \mathbb{R}^d$.

3. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad \Delta(t) = ((\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^*)^\bullet(t) - ((\nabla_{\mathtt{x}} L) \circ c^*)(t)$.

$\star$

Satz

V. Δ ist d, Ω, L-ELK von c.

$\Rightarrow$

$$\Delta \in \mathtt{C}(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R}^d).$$

Beweis trivial. □

5.2 $(L \circ c)^\bullet$

Satz

V. c ist d, Ω-Kurve von L.

$\Rightarrow$

a) $L \circ c \in \mathtt{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$.

b) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (L \circ c^*)^\bullet(t) = ((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t) - \langle \Delta | c^\bullet \rangle(t),$$

wobei Δ die d, Ω, L-ELK von c ist.

Beweis a) trivial.

<u>Beweis</u> `b)` $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (L \circ c^*)^\bullet(t) = ((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{x}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^{\bullet\bullet}(t)$$

$$= ((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{x}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t) - \langle (((\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^*)^\bullet | c^\bullet \rangle(t)$$

$$= ((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{x}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle(t) - \langle (((\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^*)^\bullet | c^\bullet \rangle(t)$$

$$= ((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t) + \langle (((\nabla_{\mathtt{x}} L) \circ c^*) - ((\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^*)^\bullet | c^\bullet \rangle(t)$$

$$= ((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t) + \langle -\Delta | c^\bullet \rangle(t)$$

$$= ((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t) - \langle \Delta | c^\bullet \rangle(t)$$

□

5.3 $(E \circ c)^\bullet$

Satz

`V1.` E ist d, Ω-Energie von L.

`V2.` c ist d, Ω-Kurve von L.

$\Rightarrow$

`a)` $E \circ c \in \mathtt{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$.

`b)` $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (E \circ c^*)^\bullet(t) = -((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle \Delta | c^\bullet \rangle(t),$$

wobei Δ die d, Ω, L-ELK von c ist.

<u>Beweis</u> `a)` trivial.

<u>Beweis</u> `b)` Mit Hilfe des vorherigen Satzes gilt $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (E \circ c^*)^\bullet(t) = -(L \circ c^*)^\bullet(t) + (\langle \nabla_{\mathtt{v}} L | \mathtt{v} \rangle \circ c^*)^\bullet(t) d$$

$$= -((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) - \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t) + \langle \Delta | c^\bullet \rangle(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | \mathtt{v} \circ c^* \rangle^\bullet(t)$$

$$= -((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) - \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t) + \langle \Delta | c^\bullet \rangle(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t)$$

$$= -((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle \Delta | c^\bullet \rangle(t).$$

□

5.4 $(K \circ c)^{\bullet}$

Satz

V1. K kinetische d, Ω-Energie von L.

V2. c ist d, Ω-Kurve von L.

$\Rightarrow$

a) $K \circ c \in \mathtt{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$.

b) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad (K \circ c^*)^{\bullet}(t) = \frac{1}{2} \cdot \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^{\bullet} \rangle^{\bullet}(t)$.

Beweis a) trivial.

Beweis b) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (K \circ c^*)^{\bullet}(t) = \left(\frac{1}{2} \cdot \langle \nabla_{\mathtt{v}} L | \mathtt{v} \rangle \circ c^* \right)^{\bullet}(t) = \frac{1}{2} \cdot \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | \mathtt{v} \circ c^* \rangle^{\bullet}(t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^{\bullet} \rangle^{\bullet}(t).$$

$\square$

5.5 $(P \circ c)^{\bullet}$

Satz

V1. P potentielle d, Ω-Energie von L.

V2. c ist d, Ω-Kurve von L.

$\Rightarrow$

a) $P \circ c \in \mathtt{C}^1(\mathsf{dom}\, c : \mathbb{R})$.

b) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (P \circ c^*)^{\bullet}(t) = -((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) - \frac{1}{2} \cdot (\langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^{\bullet} \rangle^{\bullet}(t) + \langle \Delta | c^{\bullet} \rangle(t),$$

wobei Δ die d, Ω, L-ELK von c ist.

<u>Beweis</u> `a)` trivial.

<u>Beweis</u> `b)` Ist E die d,Ω-Energie von L, so gilt unter Verwendung bereits zur Verfügung stehender Resultat $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (P \circ c^*)^\bullet(t) = \left(\frac{1}{2} \cdot (E. - .L) \circ c^*\right)^\bullet (t) = \frac{1}{2} \cdot (E \circ c^*)^\bullet(t) - \frac{1}{2} \cdot (L \circ c^*)^\bullet(t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle \Delta | c^\bullet \rangle (t))$$

$$- \frac{1}{2} \cdot (((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet - \langle \Delta | c^\bullet \rangle (t))$$

$$= -((\partial_{\mathtt{t}} L) \circ c^*)(t) - \frac{1}{2} \cdot \langle (\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet (t) + \langle \Delta | c^\bullet \rangle (t).$$

□

6 c ist d,Ω-Zustandskurve von L

Definition c ist d,Ω-Zustandskurve von L

:⇔

1. c ist d,Ω-Kurve von L.
2. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad ((\nabla_{\mathtt{v}} L) \circ c^*)^\bullet (t) = ((\nabla_{\mathtt{x}} L) \circ c^*)(t)$.

6.1 A priori

Satz

`V1.` c ist d,Ω Zustandskurve von L.

`V2.` Δ ist d,Ω,L-ELK von c.

⇒

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{o}^d = \Delta(t),$$

wobei $\mathfrak{o}^d$ der Nullvektor von $\mathbb{R}^d$ ist.

<u>Beweis</u> trivial. □

⋆

Satz

a) c ist d, Ω Zustandskurve von $L \quad \Rightarrow$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad (L \circ c^*)^\bullet(t) = ((\partial_\mathtt{t} L) \circ c^*)(t) + \langle (\nabla_\mathtt{v} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t).$$

b) c ist d, Ω-Zustandskurve von $L \wedge E$ ist d, Ω-Energie von $L \quad \Rightarrow$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad (E \circ c^*)^\bullet(t) = -((\partial_\mathtt{t} L) \circ c^*)(t).$$

c) c ist d, Ω-Zustandskurve von $L \wedge K$ kinetische d, Ω-Energie von $L \quad \Rightarrow$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad (K \circ c^*)^\bullet(t) = \frac{1}{2} \cdot \langle (\nabla_\mathtt{v} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t).$$

d) c ist d, Ω Zustandskurve von $L \wedge P$ potentielle d, Ω-Energie von $L \quad \Rightarrow$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad (P \circ c^*)^\bullet(t) = -((\partial_\mathtt{t} L) \circ c^*)(t) - \frac{1}{2} \cdot \langle (\nabla_\mathtt{v} L) \circ c^* | c^\bullet \rangle^\bullet(t).$$

Beweis trivial. □

6.2 A posteriori

Satz

V1. c ist d, Ω-Kurve von L.

V2. Δ ist d, Ω, L-ELK von c.

V3. $\mathfrak{o}^d$ ist der Nullvektor vom $\mathbb{R}^d$.

V4. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{o}^d = \Delta(t)$,

$\Rightarrow$

c ist d, Ω-Zustandskurve von L.

Beweis trivial. □

7 Energieerhaltung $0 = \partial_{\mathtt{t}} L$

Satz

V1. E ist d, Ω-Energie von L.

V2. $\forall t, x, v : t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^d \wedge v \in \mathbb{R}^d \wedge ((t, x), v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(((t, x), v)) = 0.$$

V3. c ist d, Ω-Zustandskurve von L.

$\Rightarrow$

a) $\forall t, \tau : t \in \mathsf{dom}\, c \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (E \circ c^*)(t) = (E \circ c^*)(\tau).$$

b) $\exists E_\circ : E_\circ \in \mathbb{R} \wedge \forall t : t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad E_\circ = (E \circ c^*)(t).$$

Beweis trivial. $\square$

8 lf fed-1-m/k-α

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$ und $0 < k \in \mathbb{R}$ und $0 < \alpha \leq 1$.

V2. $L : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L(((t, x), v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot |x|^\alpha,$$

$$\text{wobei } 0^\alpha = \begin{cases} 1 & , \quad \alpha = 0 \\ 0 & , \quad 0 < \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\neg(\quad L \text{ ist } 1, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}\text{-Lagrange-Funktion} \quad).$$

Beweis $k \neq 0$ und die Funktion $|.|^\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|.|^\alpha(x) = |x|^\alpha$ ist für $0 < \alpha \leq 1$ in 0 nicht differenzierbar. $\square$

$\star$

Satz lm1.1

`V1.` $0 < m \in \mathbb{R}$ und $0 < k \in \mathbb{R}$ und ($0 = \alpha$ oder $1 < \alpha \in \mathbb{R}$).

`V2.` $L : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot |x|^\alpha.$$

$\Rightarrow$

`a)` $\partial_{\mathtt{t}} L : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\partial_{\mathtt{t}} L)(((t,x),v)) = 0$.

`b)` $\nabla_{\mathtt{x}} L : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\nabla_{\mathtt{x}} L)(((t,x),v)) = -\frac{\alpha}{2} \cdot k \cdot \mathsf{sgn}\,(x) \cdot |x|^{-1+\alpha}$.

`c)` $\nabla_{\mathtt{v}} L : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\nabla_{\mathtt{v}} L)((((t,x),v)) = m \cdot v$.

`d)` L ist $1, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$-Lagrange-Funktion.

`e)` E ist $1, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$-Energie von L $\quad\Leftrightarrow$

$$E : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad E(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot |x|^\alpha.$$

`f)` K kinetische $1, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$-Energie von L $\quad\Leftrightarrow$

$$K : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad K(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2.$$

`g)` P potentielle $1, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$-Energie von L $\quad\Leftrightarrow$

$$P : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad P(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |x|^\alpha.$$

`h)` c ist $1, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$-Zustandskurve von L $\quad\Leftrightarrow\quad$ c ist 2-Kurve im $\mathbb{R}$

$$\wedge \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad c^{\bullet\bullet}(t) + \frac{\alpha \cdot \omega^2}{2} \cdot \mathsf{sgn}\,(c(t)) \cdot |c(t)|^{-1+\alpha} = 0,$$

wobei $0 < \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \in \mathbb{R}$.

`i)` c ist $1, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$-Zustandskurve von $L \wedge t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (E \circ c^*)(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(|c^\bullet(t)|^2 + \omega^2 \cdot |c(t)|^2\right), \quad (E \circ c^*)^\bullet(t) = 0.$$

j) c ist $1, (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}$-Zustandskurve von $L \wedge t \in \mathsf{dom}\, c \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(|c^\bullet(t)|^2+\omega^2\cdot|c(t)|^2\right)=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(|c^\bullet|^2(\tau)+\omega^2\cdot|c(\tau)|^2\right).$$

k) c ist $1, (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}$-Zustandskurve von L

$$\Rightarrow \quad \exists E_\circ : E_\circ \in \mathbb{R} \wedge \forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \Rightarrow |c^\bullet(t)|^2+\omega^2\cdot|c(t)|^2=\frac{2\cdot E_\circ}{m}.$$

Beweis a) trivial.

Beweis b) Rechnung.

Beweis c) trivial.

Beweis d) Rechnung

Beweis e) Rechnung.

Beweis f) Rechnung.

Beweis g) Rechnung.

Beweis h) Rechnung.

Beweis i) Rechnung.

Beweis j) trivial.

Beweis k) trivial. □

8.1 lf fed-1-3/4-$\frac{3}{2}$

Satz lm1.2

V1. $L : (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v))=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot|v|^2-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot|x|^{\frac{3}{2}}.$$

V2. c ist $1, (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}$-Zustandskurve von L.

$\Rightarrow$

a) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad c^{\bullet\bullet}(t)+\mathsf{sgn}\,(c(t))\cdot\sqrt{|c(t)|}=0.$

b) $\exists E_\circ : E_\circ \in \mathbb{R} \wedge \forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad |c^\bullet(t)|^2+\frac{4}{3}\cdot|c(t)|^{\frac{3}{2}}=\frac{2\cdot E_\circ}{3}.$

Beweis Rechnung. □

8.2 lf fed-1-4/1-8

Satz lm1.3

V1. $L : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |v|^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |x|^8.$$

V2. c ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$.

V3. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad c^{\bullet\bullet}(t) + (c(t))^7 = 0.$

$\Rightarrow$

a) c ist $1, (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$-Zustandskurve von L.

b) $\exists E_\circ : E_\circ \in \mathbb{R} \wedge \forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad |c^\bullet(t)|^2 + \frac{1}{4} \cdot |c(t)|^2 = \frac{2 \cdot E_\circ}{4}.$

Beweis Rechnung. □

9 lf stnd-1-$m/\Phi(x)$

Satz

V1. $0 < m \in \mathbb{R}$.

V2. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}$ offen.

V3. $\Phi \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $L : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 - \Phi(x).$$

$\Rightarrow$

a) $\partial_{\mathtt{t}} L : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\partial_{\mathtt{t}} L)(((t,x),v)) = 0$.

b) $\nabla_{\mathtt{x}} L : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\nabla_{\mathtt{x}} L)(((t,x),v)) = -\Phi'(x)$.

c) $\nabla_{\mathtt{v}} L : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\nabla_{\mathtt{v}} L)((((t,x),v)) = m \cdot v$.

d) L ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Lagrange-Funktion.

e) E ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$$E : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad E(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2 + \Phi(x).$$

f) K kinetische $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$$K : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad K(((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot |v|^2.$$

g) P potentielle $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$$P : (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad P(((t,x),v)) = \Phi(x).$$

h) c ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Zustandskurve von L

$\Leftrightarrow \quad c$ ist 2-Kurve im $\mathbb{R} \wedge \mathsf{ran}\, c \subseteq O$

$$\wedge \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \quad \Rightarrow \quad c^{\bullet\bullet}(t) + \frac{1}{m} \cdot \Phi'(c(t)) = 0.$$

i) c ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Zustandskurve von $L \wedge t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (E \circ c^*)(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(|c^{\bullet}(t)|^2 + \frac{2}{m} \cdot \Phi(c(t)) \right), \quad (E \circ c^*)^{\bullet}(t) = 0.$$

j) c ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Zustandskurve von $L \wedge t \in \mathsf{dom}\, c \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(|c^{\bullet}(t)|^2 + \frac{2}{m} \cdot \Phi(c(t)) \right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(|c^{\bullet}(\tau)|^2 + \frac{2}{m} \cdot \Phi(c(\tau)) \right).$$

k) c ist $1, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Zustandskurve von L

$$\Rightarrow \quad \exists E_\circ : E_\circ \in \mathbb{R} \wedge \forall t : t \in \mathsf{dom}\, c \Rightarrow |c^{\bullet}(t)|^2 + \frac{2}{m} \cdot \Phi(c(t)) = \frac{2 \cdot E_\circ}{m}.$$

<u>Beweis</u> trivial. $\square$

10 lf - stnd-d-$m(i,j)(t,x)/\Phi(t,x)$

Satz

`V1.` $1 \leq d \in \mathbb{N}$.

`V2.` $0 \neq B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen.

`V3.` $\Omega = B \times \mathbb{R}^d$.

`V4.` $m : \{1,\ldots,d\} \times \{1,\ldots,d\} \to \mathtt{C}^1(B : \mathbb{R})$.

`V5.` $\forall i,j : i \in \{1,\ldots,d\} \wedge j \in \{1,\ldots,d\} \quad \Rightarrow \quad m((i,j)) = m((j,i))$.

`V6.` $\Phi \in \mathtt{C}^1(B : \mathbb{R})$.

`V7.` $L : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$L(((t,x),v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right) - \Phi((t,x)).$$

$\Rightarrow$

`a)` $\partial_{\mathtt{t}} L : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$(\partial_{\mathtt{t}} L)((((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))^{\bullet}((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right) - \Phi^{\bullet}((t,x)).$$

`b)` $k \in \{1,\ldots,d\} \quad \Rightarrow \quad L_{,k} : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$L_{,k}((((t,x),v)) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))_{,k}((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right) - \Phi_{,k}((t,x)).$$

`c)` $k \in \{1,\ldots,d\} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mathtt{v}k} L : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$(\partial_{\mathtt{v}k} L)((((t,x),v)) = \sum_{j=1}^{d} m((k,j))((t,x)) \cdot v_j.$$

`d)` L ist d,Ω-Lagrange-Funktion.

`e)` E ist d,Ω-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$$E : \Omega \to \mathbb{R}, \quad E(((t,x),v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right) + \Phi((t,x)).$$

f) K kinetische d, Ω-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$$K : \Omega \to \mathbb{R}, \quad K(((t,x),v) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j.$$

g) P potentielle d, Ω-Energie von $L \quad \Leftrightarrow$

$$P : \Omega \to \mathbb{R}, \quad P(((t,x),v) = \Phi((t,x)).$$

h) c ist d, Ω-Zustandskurve von L

$\Leftrightarrow \quad c$ ist 2-Kurve im $\mathbb{R}^d \wedge \mathsf{ran}\,(c^\times) \subseteq B \wedge$

$\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, c \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{s} (m((k,j)) \circ c^\times)(t) \cdot c_j^{\bullet\bullet}(t) \right) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ c^\times)(t) \cdot c_i^\bullet(t) \cdot c_j^\bullet(t)$$
$$= - \left(\sum_{j=1}^{k} (m((k,j))^\bullet \circ c^\times)(t) \cdot c_j^\bullet(t) \right) - (\Phi_{,k} \circ c^\times)(t),$$

wobei für $i, j, k \in \{1, \ldots, d\}$ die Funktionen $\Gamma_{ijk} \in \mathsf{C}(B : \mathbb{R})$,

$$\Gamma_{ijk} : B \to \mathbb{R}, \quad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \cdot \left(-m((i,j))_{,k}. + .m((j,k))_{,i}. + .m((k,i))_{,j} \right),$$

die *Christoffel-Symbole 1.Art von m* sind.

i) c ist d, Ω-Zustandskurve von $L \wedge t \in \mathsf{dom}\, c$

$$\Rightarrow \quad (E \circ c^*)(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} (m((i,j)) \circ c^\times)(t) \cdot c_i^\bullet(t) \cdot c_j^\bullet(t) \right) + (\Phi \circ c^\times)(t),$$

$$(E \circ c^*)^\bullet(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} (m((i,j))^\bullet \circ c^\times)(t) \cdot c_i^\bullet(t) \cdot c_j^\bullet(t) \right) - (\Phi^\bullet \circ c^\times)(t).$$

<u>Beweis</u> a) trivial.

<u>Beweis</u> b) trivial.

<u>Beweis</u> `c)` $k \in \{1, \ldots, d\} \wedge t \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}^d \wedge v \in \mathbb{R}^d \wedge ((t,x),v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad (\partial_{\mathtt{v}k} L)(((t,x),v)) = \lim_{h \to 0} \frac{L(((t,x), v + h \cdot \mathfrak{e}_k^d)) - L(((t,x),v))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot (v_i + h \cdot \delta((i,k))) \cdot (v_j + h \cdot \delta((j,k))) \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right) \right.$$

$$+ h \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot \delta((i,k)) \cdot v_j \right)$$

$$+ h \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot \delta((j,k)) \right)$$

$$+ h^2 \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot \delta((i,k)) \cdot \delta((j,k)) \right)$$

$$\left. - \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\left(\sum_{j=1}^{d} m((k,j))((t,x)) \cdot v_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} m((i,k))((t,x)) \cdot v_i \right) \right.$$

$$\left. + h \cdot m((k,k))((t,x)) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{d} m((k,j))((t,x)) \cdot v_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} m((i,k))((t,x)) \cdot v_i \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{d} m((k,j))((t,x)) \cdot v_j \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} m((k,i))((t,x)) \cdot v_i \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{d} m((k,j))((t,x)) \cdot v_j \right) + \left(\sum_{j=1}^{k} m((k,j))((t,x)) \cdot v_j \right) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} m((k,j))((t,x)) \cdot v_j .$$

<u>Beweis</u> `d)` trivial.

<u>Beweis</u> `e)` Per definitionem und via `c)`, für alle $((t,x),v) \in \Omega$,

$$E(((t,x),v)) = -L(((t,x),v)) + \langle \nabla_{\mathtt{v}} L | \mathtt{v} \rangle(((t,x),v))$$
$$= -L(((t,x),v)) + \sum_{k=1}^{d} (\partial_{\mathtt{v}k} L)(((t,x),v)) \cdot v_k$$
$$= -L(((t,x),v)) + \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{k} m((k,j))((t,x)) \cdot v_j \right) \cdot v_k$$
$$= -L(((t,x),v)) + \sum_{k,j=1}^{d} m((k,j))((t,x)) \cdot v_j \cdot v_k$$
$$= -L(((t,x),v)) + \sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_j \cdot v_i$$
$$= -L(((t,x),v)) + \sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right) + \Phi((t,x)) + \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{d} m((i,j))((t,x)) \cdot v_i \cdot v_j \right) + \Phi((t,x)).$$

<u>Beweis</u> `f)` Evident via $K = \frac{1}{2} \cdot (E. + .L)$ und `e)`, `V7..`

<u>Beweis</u> `g)` Evident via $P = \frac{1}{2} \cdot (E. - .L)$ und `e)`, `V7.`

<u>Bewis</u> `h)` "$\Rightarrow$" Falls c eine d,Ω-Zustandskurve von L ist, dann ist c eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^d$ mit $\mathsf{ran}\,(c^*) \subseteq \Omega$, so dass wegen $\Omega = B \times \mathbb{R}^d$ auch $\mathsf{ran}\,(c^\times) \subseteq B$ folgt. Auch gilt dann für alle t, k mit $t \in \mathsf{dom}\, c$ und $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$((\partial_{\mathtt{v}k} L) \circ c^*)^\bullet\,(t) = (L_{,k} \circ c^*)\,(t),$$

also via `b)` und `c)`,

$$\left(\sum_{j=1}^{d} (m((k,j)) \circ c^\times) \cdot c_j^\bullet\right)^\bullet (t)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{k} (m((i,j))_{,k} \circ c^\times)(t) \cdot c_i^\bullet(t) \cdot c_j^\bullet(t)\right) - (\Phi_{,k} \circ c^\times)(t),$$

so dass

$$\left(\sum_{j=1}^{d} (m((k,j))^\bullet \circ c^\times)(t) \cdot c_j^\bullet(t)\right)$$
$$+ \left(\sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} (m((k,j))_{,i} \circ c^\times)(t) \cdot c_i^\bullet(t)\right) \cdot c_j^\bullet(t)\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{d} (m((k,j)) \circ c^\times)(t) \cdot c_j^{\bullet\bullet}(t)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{k} (m((i,j))_{,k} \circ c^\times)(t) \cdot c_i^\bullet(t) \cdot c_j^\bullet(t)\right) - (\Phi_{,k} \circ c^\times)(t)$$

und somit

$$\left(\sum_{j=1}^{d} (m((k,j)) \circ c^\times)(t) \cdot c_j^{\bullet\bullet}(t)\right)$$
$$+ \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((k,j))_{,i} \circ c^\times)(t) \cdot c_i^\bullet(t) \cdot c_j^\bullet(t)\right) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{k} (m((i,j))_{,k} \circ c^\times)(t) \cdot c_i^\bullet(t) \cdot c_j^\bullet(t)$$
$$= -\left(\sum_{j=1}^{d} (m((k,j))^\bullet \circ c^\times)(t) \cdot c_j^\bullet(t)\right) - (\Phi_{,k} \circ c^\times)(t),$$

woraus wegen

$$\left(\sum_{j,i=1}^{d}(m((k,j))_{,i}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)-\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{k}(m((i,j))_{,k}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{j,i=1}^{d}(m((k,j))_{,i}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)\\&+\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{j,i=1}^{d}(m((k,j))_{,i}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)\\&-\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{k}(m((i,j))_{,k}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{d}(m((k,i))_{,j}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)\\&+\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{j,i=1}^{d}(m((j,k))_{,i}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)\\&-\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{k}(m((i,j))_{,k}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\end{aligned}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{d}\frac{1}{2}\cdot\left((-m((i,j))_{,k}.+.m((j,k))_{,i}.+.m((k,i))_{,j})\circ c^{\times}\right)(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}\cdot c_j^{\bullet}(t),$$

die Gleichung

$$\left(\sum_{j=1}^{s}(m((k,j))\circ c^{\times})(t)\cdot c_j^{\bullet\bullet}(t)\right)+\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ c^{\times})(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)$$
$$=-\left(\sum_{j=1}^{k}(m((k,j))^{\bullet}\circ c^{\times})(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)-(\Phi_{,k}\circ c^{\times})(t),$$

folgt.

<u>Bewis</u> `h)` "$\Leftarrow$" Falls c eine $2-$Kurve im $\mathbb{R}^d$ mit $\mathsf{ran}\,(c^\times) \subseteq B$ mit

$$\forall t,k : t \in \mathsf{dom}\, c \wedge k \in \{1,\ldots,d\}$$
$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{s}(m((k,j))\circ c^\times)(t)\cdot c_j^{\bullet\bullet}(t)\right) + \sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ c^\times)(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)$$
$$= -\sum_{j=1}^{k}(m((k,j))^{\bullet}\circ c^\times)(t)\cdot c_j^{\bullet}(t) - (\Phi_{,k}\circ c^\times)(t),$$

so folgt zunächst $\mathsf{ran}\,(c^*) \subseteq B\times\mathbb{R}^d = \Omega$ und via `b)` und `c)` gilt für alle $t\in\mathsf{dom}\, c$ und $k\in\{1,\ldots,d\}$,

$$((\partial_{\mathtt{v}k}L)\circ c^*)^{\bullet}(t) = \left(\sum_{j=1}^{d}(m((k,j))\circ c^\times)\cdot c_j^{\bullet}\right)^{\bullet}(t)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{d}(m((k,j))^{\bullet}\circ c^\times)(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)$$
$$+ \left(\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{i=1}^{d}(m((k,j))_{,i}\circ c^\times)(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\right)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{d}(m((k,j))\circ c^\times)(t)\cdot c_j^{\bullet\bullet}(t)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{d}(m((k,j))^{\bullet}\circ c^\times)(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)$$
$$+ \left(\sum_{j,i=1}^{d}(m((k,j))_{,i}\circ c^\times)(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)$$
$$- \left(\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ c^\times)(t)\cdot c_i^{\bullet}(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right) - \left(\sum_{j=1}^{k}(m((k,j))^{\bullet}\circ c^\times)(t)\cdot c_j^{\bullet}(t)\right)$$
$$- (\Phi_{,k}\circ c^\times)(t)$$

$$= \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((k,j))_{,i} \circ c^{\times})(t) \cdot c_i^{\bullet}(t) \cdot c_j^{\bullet}(t) \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((i,j))_{,k} \circ c^{\times})(t) \cdot c_i^{\bullet}(t) \cdot c_j^{\bullet}(t) \right)$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((j,k))_{,i} \circ c^{\times})(t) \cdot c_i^{\bullet}(t) \cdot c_j^{\bullet}(t) \right)$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((k,i))_{,j} \circ c^{\times})(t) \cdot c_i^{\bullet}(t) \cdot c_j^{\bullet}(t) \right)$$

$$- (\Phi_{,k} \circ c^{\times})(t)$$

$$= \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((k,j))_{,i} \circ c^{\times})(t) \cdot c_i^{\bullet}(t) \cdot c_j^{\bullet}(t) \right)$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((k,j))_{,i} \circ c^{\times})(t) \cdot c_i^{\bullet}(t) \cdot c_j^{\bullet}(t) \right)$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((k,j))_{,i} \circ c^{\times})(t) \cdot c_i^{\bullet}(t) \cdot c_j^{\bullet}(t) \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((i,j))_{,k} \circ c^{\times})(t) \cdot c_i^{\bullet}(t) \cdot c_j^{\bullet}(t) \right)$$

$$- (\Phi_{,k} \circ c^{\times})(t)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j,i=1}^{d} (m((i,j))_{,k} \circ c^{\times})(t) \cdot c_i^{\bullet}(t) \cdot c_j^{\bullet}(t) \right) - (\Phi_{,k} \circ c^{\times})(t)$$

$$= (L_{,k} \circ c^{\times})(t).$$

Beweis `i)` trivial. $\square$