Geodätische

Andreas Unterreiter

11. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Präludium

1.1 $\displaystyle\sum_{i,j,k} \Gamma_{ijk}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k$

$\boxed{\textbf{Satz}}$

`V1.` $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

`V2.` $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathbb{R}$.

`V3.` $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

`V4.` $x \in O \wedge v \in \mathbb{R}^d$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i,j,k*1}^{d} \Gamma_{ijk}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k.$$

<u>Beweis</u>

$$\sum_{i,j,k*1}^{d} \Gamma_{ijk}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{d} \frac{1}{2} \cdot (-g((i,j))_{,k}(x) + g((j,k)_{,i}(x) + g((k,i))_{,j}(x)) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((j,k))_{,i}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((k,i))_{,j}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k \right)$$

$$=$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_k \cdot v_i \cdot v_j \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_j \cdot v_k \cdot v_i \right)$$

$$= \ldots$$

so dass

$$\ldots = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k$$
$$+ \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k \right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j \cdot v_k.$$

□

1.2 Satz ginv der Linearen Algebra

Satz ginv

V1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\kappa \in \mathbb{N}$ und $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^\kappa(O : \mathbb{R})$.

V3. $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

V4. $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

$\Rightarrow \quad \exists \tilde{g}$:

a) $\tilde{g} : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^\kappa(O : \mathbb{R})$.

b) $\forall i, j : i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}((i,j)) = \tilde{g}((j,i))$.

c) $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} \tilde{g}((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

d) $\forall x, i, j : x \in O \wedge i, j \in \{1, \ldots, d\}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{d} g((i,k))(x) \cdot \tilde{g}((k,j))(x) = \delta((i,j))$$
$$\wedge \sum_{k=1}^{d} \tilde{g}((i,k))(x) \cdot g((k,j))(x) = \delta((i,j)).$$

Beweis Elementare Lineare Algebra. □

1.3 $\Gamma_{ij[k]}$

Satz

V1. $1 \le d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $1 \le \kappa \in \mathbb{N}$ und $g : \{1,\dots,d\} \times \{1,\dots,d\} \to \mathtt{C}^{\kappa}(O:\mathbb{R})$.

V3. $\tilde{g} : \{1,\dots,d\} \times \{1,\dots,d\} \to \mathtt{C}(O:\mathbb{R})$.

V4. $\forall x,i,j : x \in O \wedge i,j \in \{1,\dots,d\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{d} g((i,k))(x) \cdot \tilde{g}((k,j))(x) = \delta((i,j))$

oder

$$\forall x,i,j : x \in O \wedge i,j \in \{1,\dots,d\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{d} \tilde{g}((i,k))(x) \cdot g((k,j))(x) = \delta((i,j)).$$

$\Rightarrow$

a) $\forall x,i,j : x \in O \wedge i,j \in \{1,\dots,d\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{d} g((i,k))(x) \cdot \tilde{g}((k,j))(x) = \delta((i,j))$

und

$$\forall x,i,j : x \in O \wedge i,j \in \{1,\dots,d\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{d} \tilde{g}((i,k))(x) \cdot g((k,j))(x) = \delta((i,j)).$$

b) $\forall i,j; i,j \in \{1,\dots,d\} \quad \Rightarrow \quad \tilde{g} : \{1,\dots,d\} \times \{1,\dots,d\} \to \mathtt{C}^{\kappa}(O:\mathbb{R})$.

c) $\forall i,j,k : i,j,k \in \{1,\dots,d\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij[k]} \in \mathtt{C}^{-1+\kappa}(O:\mathbb{R})$,

$$\Rightarrow \quad \Gamma_{ij[k]} : O \to \mathbb{R}, \quad \Gamma_{ij[k]}(x) = \sum_{\alpha=1}^{d} \tilde{g}((k,\alpha))(x) \cdot \Gamma_{ij\alpha}(x).$$

d) $\forall i,j,k : i,j,k \in \{1,\dots,d\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ijk} \in \mathtt{C}^{-1+\kappa}(O:\mathbb{R})$,

$$\Rightarrow \quad \Gamma_{ijk} : O \to \mathbb{R}, \quad \Gamma_{ijk}(x) = \sum_{\alpha=1}^{d} g((k,\alpha))(x) \cdot \Gamma_{ij[\alpha]}(x),$$

Beweis Differentialgeometrie und Elementare Lineare Algebra. $\square$

2 lf - geokl-d-$g(x)$

Satz

`V1.` $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

`V2.` $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

`V3.` $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`V4.` $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i, j)) = g((j, i))$.

`V5.` $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

`V6.` $$L = \left\{ \left(((t, x), v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

$\Rightarrow$

`a)` $L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t, x), v)) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot v_i \cdot v_j}$

und $\forall t, x, v : ((t, x), v) \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad 0 \neq L(((t, x), v)) \text{ und } 0 < L(((t, x), v)) \in \mathbb{R}.$$

`b)` $\partial_{\mathtt{t}} L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad (\partial_{\mathtt{t}} L)(((t, x), v)) = 0$.

`c)` $k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad L_{,k} : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$L_{,k}(((t, x), v)) = \frac{\sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j}{2 \cdot L(((t, x), v))}.$$

`d)` $k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mathtt{v}k} L : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$(\partial_{\mathtt{v}k} L)(((t, x), v)) = \frac{\sum_{j=1}^{k} g((k, j))(x) \cdot v_j}{L(((t, x), v))}.$$

`e)` L ist d,Ω-Lagrange-Funktion.

`f)` E ist d,Ω-Energie von L $\quad\Leftrightarrow\quad$ $E = \mathsf{zo}_\Omega$.

`g)` K kinetische d,Ω-Energie von L $\quad\Leftrightarrow\quad$ $K = \dfrac{1}{2}\cdot L$.

`h)` P potentielle d,Ω-Energie von L $\quad\Leftrightarrow\quad$ $P = -\dfrac{1}{2}\cdot L$.

`i)` q ist d,Ω-Zustandskurve von L

$\Leftrightarrow\quad q$ ist 2-Kurve im $\mathbb{R}^d \wedge \mathsf{ran}\, q \subseteq O \wedge \mathfrak{o}^d \neq q^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q \wedge$

$\forall t,k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1,\ldots,d\}$

$$\Rightarrow\quad \left(\sum_{j=1}^{s}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right) + \sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)$$
$$= (\ln(L\circ q^*))^\bullet(t)\cdot\left(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\right).$$

`j)` q ist d,Ω-Zustandskurve von L

$\Leftrightarrow\quad q$ ist 2-Kurve im $\mathbb{R}^d \wedge \mathsf{ran}\, q \subseteq O \wedge \mathfrak{o}^d \neq q^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q \wedge$

$\forall t,k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1,\ldots,d\}$

$$\Rightarrow\quad q_k^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ij[k]}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t) = (\ln(L\circ q^*))^\bullet(t)\cdot q_k^\bullet(t).$$

<u>Beweis</u> `a)`, `b)`, `c)` trivial.

<u>Beweis</u> `d)` Es gilt

$$L^2:\Omega\to\mathbb{R},\quad L^2(((t,x),v)) = \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x)\cdot v_i\cdot v_j,$$

mit

$$(\partial_{\mathsf{v}k}L^2)(((t,x),v)) = 2\cdot\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(x)\cdot v_j.$$

Konsequenter Weise, auch via `a)`,

$$(\partial_{\mathsf{v}k}L)(((t,x),v)) = \frac{\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(x)\cdot v_j}{L(((t,x),v))}.$$

Beweis `e)` trivial.

Beweis `f)` Es gilt für alle t, x, v mit $((t,x),v) \in \Omega$,

$$E(((t,x),v)) = (-L + \langle \nabla_{\mathtt{v}} L | \mathtt{v} \rangle)(((t,x),v))$$
$$= -L(((t,x),v)) + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\sum_{j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_j}{L(((t,x),v))} \right)$$
$$= -L(((t,x),v)) + \frac{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j}{L(((t,x),v))} = -L(((t,x),v)) + \frac{L^2(((t,x),v))}{L(((t,x),v))}$$
$$= 0 = \mathsf{zo}_{\Omega}(((t,x),v)).$$

Beweis `g)`

$$K = \frac{1}{2} \cdot (E. + .L) = \frac{1}{2} \cdot (\mathsf{zo}_{\Omega}. + .L) = \frac{1}{2} \cdot L.$$

Beweis `h)`

$$P = \frac{1}{2} \cdot (E. - .L) = \frac{1}{2} \cdot (\mathsf{zo}_{\Omega}. - .L) = -\frac{1}{2} \cdot L.$$

Beweis `i)` $\Rightarrow$ VS q ist d, Ω-Zustandskurve von L.
Dann ist q eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^d$ mit $\mathsf{ran}\,(g^*) \subseteq \Omega$, woraus per definitionem $\mathsf{ran}\, q \subseteq O$ und $\mathfrak{o}^d \neq q^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q$ folgt. Auch gilt dann für alle $k \in \{1, \ldots, d\}$ und alle $t \in \mathsf{dom}\, q$,

$$((\partial_{\mathtt{v}k} L) \circ q^*)(t) = ((\partial_k L) \circ q^*)(t),$$

also via `c), d)`,

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q) \cdot q_j^\bullet}{L \circ q^*} \right)^\bullet (t) = \left(\frac{\sum_{i,j=1}^{d} (g((i,j))_{,k} \circ q) \cdot q_i^\bullet \cdot q_j^\bullet}{2 \cdot (L \circ q^*)} \right) (t),$$

und somit

$$
\begin{aligned}
-\frac{(L\circ q^*)^\bullet(t)}{(L\circ q^*)^2(t)}\cdot\left(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\right)\\
+\frac{1}{(L\circ q^*)(t)}\cdot\left(\left(\sum_{j,i=1}^{d}(g((k,j))_{,i}\circ q^*)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\cdot q_i^\bullet(t)\right)\right.\\
\left.+\left(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right)\right)\\
=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{d}(g((i,j))_{,k}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)}{2\cdot(L\circ q^*)(t)}
\end{aligned}
$$

so dass

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right)\\
-\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{i,j=1}^{d}(g((i,j))_{,k}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)\right)\\
+\left(\sum_{j,i=1}^{d}(g((k,j))_{,i}\circ q^*)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\cdot q_i^\bullet(t)\right)\\
=\frac{(L\circ q^*)^\bullet(t)}{(L\circ q^*)(t)}\cdot\left(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\right),
\end{aligned}
$$

woraus sich ohne allzviel Rechenaufwand

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{s}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right)+\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)\\
=\left(\ln(L\circ q^*)\right)^\bullet(t)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\right),
\end{aligned}
$$

ergibt.

<u>Beweis</u> `i)` $\Leftarrow$ VS q ist 2-Kurve in $\mathbb{R}^d$ und $\mathsf{ran}\, q \subseteq O$ und $\mathfrak{o}^d \neq g^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q$ und

$$\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{s} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t)$$
$$= (\ln(L \circ q))^\bullet(t) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^\bullet(t)\right).$$

Es folgt per definitionem $\mathsf{ran}\,(g^*) \subseteq \Omega$ und via `e)` ist L eine d, Ω-Lagrange-Funktion. Demnach ist q eine d, Ω-Kurve von L. Auch gilt für alle $k \in \{1, \ldots, d\}$ und alle $t \in \mathsf{dom}\, q$,

$$((\partial_{\mathtt{v}k} L) \circ q^*)^\bullet(t) = \left(\frac{\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q) \cdot q_j^\bullet}{L \circ q^*}\right)^\bullet (t)$$
$$= -\frac{(L \circ q^*)^\bullet(t)}{(L \circ q^*)^2(t)} \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^\bullet(t)\right)$$
$$+ \frac{1}{(L \circ q^*)(t)} \cdot \left(\left(\sum_{j,i=1}^{d} (g((k,j))_{,i} \circ q^*)(t) \cdot q_j^\bullet(t) \cdot q_i^\bullet(t)\right)\right.$$
$$\left. + \left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right)\right)$$
$$= -\frac{(L \circ q^*)^\bullet(t)}{(L \circ q^*)^2(t)} \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^\bullet(t)\right)$$
$$+ \frac{1}{(L \circ q^*)(t)} \cdot \left(\sum_{j,i=1}^{d} (g((k,j))_{,i} \circ q)(t) \cdot q_j^\bullet(t) \cdot q_i^\bullet(t)\right)$$
$$+ \frac{1}{(L \circ q^*)(t)} \cdot \left(-\left(\sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t)\right)\right.$$
$$\left. + (\ln(L \circ q^*))^\bullet(t) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^\bullet(t)\right)\right)$$
$$= \ldots$$

$$\ldots = -\frac{(L\circ q^*)^\bullet(t)}{(L\circ q^*)^2(t)}\cdot\left(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\right)$$

$$+\frac{(L\circ q^*)^\bullet(t)}{(L\circ q^*)^2(t)}\cdot\left(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\right)$$

$$+\frac{1}{(L\circ q^*)(t)}\cdot\left(\sum_{j,i=1}^{d}(g((k,j))_{,i}\circ q)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\cdot q_i^\bullet(t)\right.$$

$$\left.-\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)\right)$$

$$=\frac{1}{(L\circ q^*)(t)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{k}(g((i,j))_{,k}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)$$

$$=\frac{\sum_{i,j=1}^{k}(g((i,j))_{,k}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)}{2\cdot(L\circ q^*)(t)}=((\partial_k L)\circ q^*)(t).$$

<u>Beweis</u> `j)` $\Rightarrow$ VS q ist d,Ω-Zustandskurve von L.

Via `f)` folgt $\mathsf{ran}\, q\subseteq O$ und $\mathfrak{o}^d\neq q^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q$. Via **Satz ginv** gibt es $\tilde g$, so dass

$$\tilde g:\{1,\ldots,d\}\times\{1,\ldots,d\}\to \mathtt{C}^1(O:\mathbb{R}),$$

und $\forall x,i,j: x\in O\wedge i\in\{1,\ldots,d\}\wedge j\in\{1,\ldots d\}$,

$$\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{d} g((i,k))(x)\cdot\tilde g((k,j))(x)=\delta((i,j))$$

$$\wedge\sum_{k=1}^{d}\tilde g((i,k))(x)\cdot g((k,j))(x)=\delta((i,j)).$$

Via `i)` gilt für alle $\alpha\in\{1,\ldots,d\}$ und alle $t\in\mathsf{dom}\, q$,

$$\left(\sum_{j=1}^{d}(g((\alpha,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right)+\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ij\alpha}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)$$

$$=(\ln(L\circ q^*))^\bullet(t)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}(g((\alpha,j))\circ q)(t)\cdot q_j^\bullet(t)\right),$$

so dass für alle $k \in \{1,\dots,d\}$ und alle $t \in \mathsf{dom}\,q$ auch

$$\left(\sum_{\alpha,j=1}^{d}(\tilde{g}((k,\alpha))\circ q)(t)\cdot(g((\alpha,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right) + \sum_{\alpha,i,j=1}^{d}(\tilde{g}((k,\alpha))\circ q)(t)\cdot(\Gamma_{ij\alpha}\circ q)(t)\cdot q_i^{\bullet}(t)\cdot q_j^{\bullet}(t) = (\ln(L\circ q^*))^{\bullet}(t)\cdot\left(\sum_{\alpha,j=1}^{k}(\tilde{g})((k,\alpha))\cdot q)(t)\cdot(g((\alpha,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet}(t)\right),$$

gilt, woraus ohne allzu viel Mühe

$$\left(\sum_{j=1}^{d}\delta((k,j))\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right) + \sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ij[k]}\circ q)(t)\cdot q_i^{\bullet}(t)\cdot q_j^{\bullet}(t) = (\ln(L\circ q^*))^{\bullet}(t)\cdot\left(\sum_{j=1}^{k}\delta((k,j))\cdot q_j^{\bullet}(t)\right),$$

und somit auch

$$q_k^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ij[k]}\circ q)(t)\cdot q_i^{\bullet}(t)\cdot q_j^{\bullet}(t) = (\ln(L\circ q^*))^{\bullet}(t)\cdot q_k^{\bullet}(t),$$

folgt.

<u>Beweis</u> `j)` $\Leftarrow$ VS q ist 2-Kurve in $\mathbb{R}^d$ und $\mathsf{ran}\,q \subseteq O \wedge \mathfrak{o}^d \neq q^{\bullet}$ auf $\mathsf{dom}\,q$ und

$$\forall k,t : k\in\{1,\dots,d\}\wedge t\in\mathsf{dom}\,q \Rightarrow q_k^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ij[k]}\circ q)(t)\cdot q_i^{\bullet}(t)\cdot q_j^{\bullet}(t) = (\ln(L\circ q^*))^{\bullet}(t)\cdot q_k^{\bullet}(t).$$

Via **Satz ginv** gibt es $\tilde{g}$, so dass

$$\tilde{g} : \{1,\dots,d\}\times\{1,\dots,d\}\to \mathtt{C}^1(O:\mathbb{R}),$$

und $\forall x,i,j : x\in O\wedge i\in\{1,\dots,d\}\wedge j\in\{1,\dots d\}$,

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{d} g((i,k))(x)\cdot\tilde{g}((k,j))(x) = \delta((i,j)) \wedge \sum_{k=1}^{d}\tilde{g}((i,k))(x)\cdot g((k,j))(x) = \delta((i,j)).$$

Via **Präludium.** $\Gamma_{ij[k]}$ gilt für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, d\}$ und alle $x \in O$,

$$\sum_{\alpha=1}^{d} g((k,\alpha))(x) \cdot \Gamma_{ij[\alpha]}(x) = \Gamma_{ijk}(x).$$

Nach Voraussetzung gilt für alle $\alpha \in \{1, \ldots, d\}$ und alle $t \in \mathsf{dom}\, q$,

$$q_\alpha^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ij[\alpha]} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t) = (\ln(L \circ q^*))^\bullet(t) \cdot q_\alpha^\bullet(t),$$

so dass für alle $k \in \{1, \ldots, d\}$ und alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ auch

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\alpha=1}^{d} (g((k,\alpha)) \circ q)(t) \cdot q_\alpha^{\bullet\bullet}(t)\right) \\ + \sum_{\alpha,i,j=1}^{d} (g((k,\alpha)) \circ q)(t) \cdot (\Gamma_{ij[\alpha]} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t) \\ = (\ln(L \circ q^*))^\bullet(t) \cdot \sum_{\alpha=1}^{d} (g((k,\alpha)) \circ q)(t) \cdot q_\alpha^\bullet(t),\end{aligned}$$

gilt, woraus nun

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t) \\ = (\ln(L \circ q^*))^\bullet(t) \cdot \sum_{j=1}^{d} (g((k,\alpha)) \circ q)(t) \cdot q_j^\bullet(t),\end{aligned}$$

folgt. Nun ergibt sich via `i)`, dass q eine d, Ω-Zustandskurve von L ist. $\square$

3 lf - geokl-d-$g(x)$ flach

Satz flach

`V1.` $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

`V2.` $g : \{1, \dots, d\} \times \{1, \dots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`V3.` $\forall i, j : i \in \{1, \dots, d\} \wedge j \in \{1, \dots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

$\Rightarrow$

`a)` Falls $\forall x, i, j, k : x \in O \wedge i, j, k \in \{1, \dots, d\} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma_{ijk}(x)$,
dann $\forall i, j : i, j \in \{1, \dots, d\}$
$\Rightarrow \quad g((i,j))$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von O konstant.

`b)` Falls $\forall i, j : i, j \in \{1, \dots, d\}$
$\Rightarrow \quad g((i,j))$ ist auf jeder Zusammenhangskomponente von O konstant,
dann $\forall x, i, j, k : x \in O \wedge i, j, k \in \{1, \dots, d\} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma_{ijk}(x)$.

<u>Beweis</u> `a)` Für alle $x \in O$ und $i, j, k \in \{1, \dots, d\}$ gilt

$$g((i,j))_{,k}(x) = \Gamma_{jki}(x) + \Gamma_{ikj}(x) = 0.$$

Nun via reeller Analysis evident.

<u>Beweis</u> `b)` Per definitionem und via reeller Analysis evident. $\square$

3.1 A priori

Satz

`V1.` $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

`V2.` $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

`V3.` $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`V4.` $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i, j)) = g((j, i))$.

`V5.` $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

`V6.` $\forall x, i, j, k : x \in O \wedge i, j, k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma_{ijk}(x)$.

`V7.` $$L = \left\{ \left(((t, x), v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

`V8.` q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

$\Rightarrow \quad \exists x_\circ, v_\circ, \tilde{O}, A$:

`a)` $x_\circ \in \mathbb{R}^d \wedge \mathfrak{o}^d \neq v_\circ \in \mathbb{R}^d$.

`b)` $\tilde{O}$ Zusammenhangskomponente von O.

`c)` $A \in \mathtt{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R})$ und $0 < A^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q$.

`d)` $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in \tilde{O}$.

`e)` $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad (\ln(L \circ q))^\bullet(t) = \dfrac{A^{\bullet\bullet}(t)}{A^\bullet(t)}$.

`f)` $\forall x, t, \tau : x \in \tilde{O} \wedge t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \wedge t < \tau$

$$\Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(\tau) - q_j(t))}.$$

Beweis q ist stetig und $\mathsf{dom}\, q$ ist zusammenhängend. Somit ist via $\mathsf{ran}\, q \subseteq O$ die Menge $\mathsf{ran}\, q$ als zusammenhängende Menge Teilmenge einer Zusammenhangskomponente $\tilde{O}$ von O. Somit gilt auch

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) \in \tilde{O}.$$

Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$ gibt es $\tilde{g} : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathsf{C}^1(O : \mathbb{R})$, so dass für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ und alle $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\Rightarrow \quad q_k^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ij[k]} \circ q)(t) \cdot q_i^{\bullet}(t) \cdot q_j^{\bullet}(t) = (\ln(L \circ q^*))^{\bullet}(t) \cdot q_k^{\bullet}(t).$$

Via $\mathtt{V6}$. gilt für alle $x \in O$ und alle $i, j, k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$0 = \Gamma_{ijk}(x),$$

so dass auch

$$0 = \Gamma_{ij[k]}(x),$$

gelten muss. Es folgt für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ und alle $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$q_k^{\bullet\bullet}(t) = (\ln(L \circ q^*))^{\bullet} \cdot q_k^{\bullet}(t).$$

Es gilt $L \circ q^* \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R})$ mit $0 < L \circ q^*$ auf $\mathsf{dom}\, q$, so dass es eine Stammfunktion $A \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R})$ von $L \circ q^*$ auf $\mathsf{dom}\, q$ gibt. Wegen $A^{\bullet} = L \circ q^*$ gilt einerseits $0 < A^{\bullet}$ auf $\mathsf{dom}\, q$, andererseits folgt $A \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R})$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad (\ln(L \circ q^*))^{\bullet}(t) = \frac{A^{\bullet\bullet}(t)}{A^{\bullet}(t)} = (\ln A^{\bullet})^{\bullet}(t).$$

Mit elementarer ODE-Theorie ergibt sich nun, dass es $v_\circ \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ und alle $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$q_k^{\bullet}(t) = v_{\circ k} \cdot A^{\bullet}(t),$$

gilt, für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ die Aussage

$$q^{\bullet}(t) = A^{\bullet}(t) \cdot v_\circ,$$

folgt, woraus sich, da stets $\mathsf{0}^d \neq q^{\bullet}$ gelten muss,

$$\mathsf{0}^d \neq v_\circ,$$

ergibt und es somit $x_\circ \in \mathbb{R}^d$ mit

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = x_\circ + A(t) \cdot v_\circ,$$

gibt, so dass via bereits Bewiesenem auch

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in \tilde{O},$$

gilt. Gemäß **Satz flach** sind für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ die Funktionen $g((i,j))$ konstant auf $\tilde{O}$, so dass

$$\forall x, y, i, j : x \in \tilde{O} \wedge y \in \tilde{O} \wedge i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j))(x) = g((i,j))(y),$$

woraus via $\mathsf{ran}\, q \subseteq \tilde{O}$ auch

$$\forall x, t : x \in \tilde{O} \wedge t \in \mathsf{dom}\, q \wedge i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j))(x) = (g((i,j))(q(t)),$$

folgt. Da

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q^\bullet(t) = A^\bullet(t) \cdot v_\circ,$$

gilt, da $A^\bullet$ positiv auf $\mathsf{dom}\, q$ ist und da

$$\begin{aligned} &\forall t, \tau : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \\ &\qquad \Rightarrow \quad (A(\tau) - A(t)) \cdot v_\circ = (q(\tau) - x_\circ) - (q(t) - x_\circ) = q(\tau) - q(t), \end{aligned}$$

gilt, ergibt sich für alle $x \in \tilde{O}$ und $t, \tau \in \mathsf{dom}\, q$,

$$\begin{aligned} \int_t^\tau (L \circ q^*) &= \int_t^\tau \sqrt{\sum_{i,j=1}^d (g((i,j)) \circ q) \cdot q_i^\bullet \cdot q_j^\bullet} \\ &= \int_t^\tau \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot q_i^\bullet \cdot q_j^\bullet} = \int_t^\tau \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot (A^\bullet)^2 \cdot v_{\circ i} \cdot v_{\circ j}} \\ &= \int_t^\tau A^\bullet \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot v_{\circ i} \cdot v_{\circ j}} = (A(\tau) - A(t)) \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot v_{\circ i} \cdot v_{\circ j}} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot (A(\tau) - A(t)) \cdot v_{\circ i} \cdot (A(\tau) - A(t)) \cdot v_{\circ j}} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(t) - q_j(t))}. \end{aligned}$$

$\square$

3.2 A posteriori

Satz

V1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

V3. $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

V5. $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

V6. $\forall x, i, j, k : x \in O \wedge i, j, k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma_{ijk}(x)$.

V7. $$L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

V8. $x_\circ \in \mathbb{R}^d$ und $\mathfrak{o}^d \neq v_\circ \in \mathbb{R}^d$.

V9. A ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$ mit $0 < A^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, A$.

V10. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, A \quad \Rightarrow \quad x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in O$.

V11. $q = \{(t, x_\circ + A(t) \cdot v_\circ) : t \in \mathsf{dom}\, A\}$.

$\Rightarrow$

a) $\mathsf{dom}\, q = \mathsf{dom}\, A$.

b) q ist 2-Kurve in $\mathbb{R}^d$ und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in O$.

c) q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

d) $\exists \tilde{O}$: $\tilde{O}$ Zusammenhangskomponente von O und $\mathsf{ran}\, q \subseteq \tilde{O}$

und $\forall x, t, \tau : x \in \tilde{O} \wedge t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \wedge t < \tau$

$$\Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(\tau) - q_j(t))}.$$

<u>Beweis</u> `a), b)` trivial.

<u>Beweis</u> `c), d)` Via **lf - geokl-d-$g(x)$** ist L eine d, Ω-Lagrange-Funktion. q ist stetig und $\mathsf{dom}\, q$ ist zusammenhängend. Somit ist via $\mathsf{ran}\, q \subseteq O$ die Menge $\mathsf{ran}\, q$ als zusammenhängende Menge Teilmenge einer Zusammenhangskomponente $\tilde{O}$ von O. Somit gilt auch

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) \in \tilde{O}.$$

Gemäß **Satz flach** sind für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ die Funktionen $g((i,j))$ konstant auf $\tilde{O}$, so dass

$$\forall x, y, i, j : x \in \tilde{O} \wedge y \in \tilde{O} \wedge i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j))(x) = g((i,j))(y),$$

woraus via $\mathsf{ran}\, q \subseteq \tilde{O}$ auch

$$\forall x, t : x \in \tilde{O} \wedge t \in \mathsf{dom}\, q \wedge i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j))(x) = (g((i,j))(q(t)),$$

folgt. Da

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q^\bullet(t) = A^\bullet(t) \cdot v_\circ,$$

gilt, da $A^\bullet$ positiv auf $\mathsf{dom}\, q$ ist und da

$$\begin{aligned}&\forall t, \tau : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \quad (A(\tau) - A(t)) \cdot v_\circ = (q(\tau) - x_\circ) - (q(t) - x_\circ) = q(\tau) - q(t),\end{aligned}$$

gilt, ergibt sich für alle $x \in \tilde{O}$ und $t, \tau \in \mathsf{dom}\, q$,

$$\begin{aligned}
\int_t^\tau (L \circ q^*) &= \int_t^\tau \sqrt{\sum_{i,j=1}^d (g((i,j)) \circ q) \cdot q_i^\bullet \cdot q_j^\bullet} \\
&= \int_t^\tau \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot q_i^\bullet \cdot q_j^\bullet} = \int_t^\tau \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot (A^\bullet)^2 \cdot v_{\circ i} \cdot v_{\circ j}} \\
&= \int_t^\tau A^\bullet \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot v_{\circ i} \cdot v_{\circ j}} = (A(\tau) - A(t)) \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot v_{\circ i} \cdot v_{\circ j}} \\
&= \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot (A(\tau) - A(t)) \cdot v_{\circ i} \cdot (A(\tau) - A(t)) \cdot v_{\circ j}} \\
&= \sqrt{\sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(t) - q_j(t))}.
\end{aligned}$$

Via **Satz ginv** und **Präludium.** $\Gamma_{ij[k]}$ gibt es $\tilde{g} : \{1,\ldots,d\}\times\{1,\ldots,d\} \to \mathtt{C}^1(O:\mathbb{R})$, so dass für alle $x \in O$ und alle $i,j,k \in \{1,\ldots,d\}$,

$$\Gamma_{ij[k]}(x) = \sum_{\alpha=1}^{d} \tilde{g}((k,\alpha))(x) \cdot \Gamma_{ij\alpha}(x),$$

woraus viia `V6.`

$$0 = \Gamma_{ij[k]}(x),$$

folgt. Auch gilt für alle $x \in \tilde{O}$ und alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ wie bereits vorhin genauer begründet,

$$\begin{aligned}(L \circ q^*)(t) &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(q(t)) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t)} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot A^\bullet(t) \cdot v_{\circ i} \cdot A^\bullet(t) \cdot v_{\circ j}} \\ &= A^\bullet(t) \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_{\circ i} \cdot v_{\circ j}},\end{aligned}$$

woraus mit wenig Aufwand nicht zuletzt wegen $0 < A^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q$ und wegen $\mathsf{0}^d \neq v_\circ$,

$$0 < \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_{\circ i} \cdot v_{\circ j}},$$

und die Aussage

$$(\ln(L \circ q^*))^\bullet(t) = (\ln A^\bullet)^\bullet(t) = \frac{A^{\bullet\bullet}(t)}{A^\bullet(t)},$$

folgt. Nun gilt für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ und alle $k \in \{1,\ldots,d\}$,

$$\begin{aligned}q_k^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ij[k]} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t) &= q_k^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d} 0 \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t) \\ = q_k^{\bullet\bullet}(t) = A^{\bullet\bullet} \cdot v_{\circ k} &= \frac{A^{\bullet\bullet}(t)}{A^\bullet(t)} \cdot A^\bullet(t) \cdot v_{\circ k} = (\ln(L \circ q^*))^\bullet(t) \cdot q_k^\bullet(t).\end{aligned}$$

Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$ folgt, dass q eine d, Ω-Zustandskurve von L ist. $\square$

4 lf - geokl-d-g

4.1 A priori

Satz

`V1.` $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

`V2.` $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

`V3.` $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathbb{R}$.

`V4.` $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

`V5.` $\forall v : \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot v_i \cdot v_j$.

`V6.` $$L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

`V7.` q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

$\Rightarrow \quad \exists x_\circ, v_\circ, A$:

a) $x_\circ \in \mathbb{R}^d \wedge \mathfrak{o}^d \neq v_\circ \in \mathbb{R}^d$.

b) $A \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R})$ und $0 < A^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q$.

c) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in O$.

d) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad (\ln(L \circ q))^\bullet(t) = \dfrac{A^{\bullet\bullet}(t)}{A^\bullet(t)}$.

e) $\forall t, \tau : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \wedge t < \tau$

$$\Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \int_t^\tau \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot q_i^\bullet \cdot q_j^\bullet}$$
$$= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(\tau) - q_j(t))}.$$

<u>Beweis</u> Für $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ seien

$$G((i,j)) = g((i,j))^{on} O.$$

Dann für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$G((i,j)) \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R}), \quad G((i,j)) = G((j,i)),$$

und für alle $x \in O$ und $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\mathfrak{o}^d \neq v$ gilt

$$0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot v_i \cdot v_j = \sum_{i,j=1}^{d} G((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Konsequenter Weise,

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge v \in \mathbb{R}^d \right\} \\ &= \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} G((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge v \in \mathbb{R}^d \right\}, \end{aligned}$$

und in dieser Darstellung folgt via **lf - geokl-d-$g(x)$**, dass

$$L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t,x),v)) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} G((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j},$$

gilt und da q eine d, Ω-Zustandskurve von L ist und da $G((i,j))$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ konstant auf O ist, gibt es via **lf - geokl-d-$g(x)$ flach. A priori** $x_\circ, v_\circ, \tilde{O}, A$, so dass $\tilde{O}$ Zusammenhangskomponente von O ist,

$$x_\circ \in \mathbb{R}^d \quad \text{und} \quad \mathfrak{o}^d \neq v_\circ \in \mathbb{R}^d,$$

$$A \in \mathtt{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad 0 < A^\bullet \quad \text{auf} \quad \mathsf{dom}\, q,$$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \Rightarrow q(t) = x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in \tilde{O},$$

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \Rightarrow (\ln(L \circ q))^\bullet(t) = \frac{A^{\bullet\bullet}(t)}{A^\bullet(t)},$$

und $\forall x, t, \tau : x \in \tilde{O} \wedge t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \wedge t < \tau$

$$\Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} G((i,j))(x) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(\tau) - q_j(t))}.,$$

gilt. Via $\tilde{O} \subseteq O$ gilt auh $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in O$, und da für alle $x \in O$ und alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ die Gleichung

$$G((i,j))(x) = g((i,j)),$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} &\forall t, \tau : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \wedge t < \tau \\ &\qquad \Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(\tau) - q_j(t))}., \end{aligned}$$

$\square$

4.2 A posteriori

Satz

V1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

V3. $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathbb{R}$.

V4. $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

V5. $\forall v : \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot v_i \cdot v_j$.

V6. $$L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

V7. $x_\circ \in \mathbb{R}^d$ und $\mathfrak{o}^d \neq v_\circ \in \mathbb{R}^d$.

V8. A ist 2-Kurve in $\mathbb{R}$ mit $0 < A^\bullet$ auf $\operatorname{dom} A$.

V9. $\forall t : t \in \operatorname{dom} A \quad \Rightarrow \quad x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in O$.

V10. $q = \{(t, x_\circ + A(t) \cdot v_\circ) : t \in \operatorname{dom} A\}$.

$\Rightarrow$

a) $\operatorname{dom} q = \operatorname{dom} A$.

b) q ist 2-Kurve in $\mathbb{R}^d$ und $\forall t : t \in \operatorname{dom} q \quad \Rightarrow \quad q(t) = x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in O$.

c) q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

d) $\forall t, \tau : t \in \operatorname{dom} q \wedge \tau \in \operatorname{dom} q \wedge t < \tau$

$$\Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(\tau) - q_j(t))}.$$

<u>Beweis</u> Für $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ seien

$$G((i,j)) = g((i,j))^{on}O.$$

Dann für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$G((i,j)) \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R}), \quad G((i,j)) = G((j,i)),$$

und für alle $x \in O$ und $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\mathfrak{o}^d \neq v$ gilt

$$0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot v_i \cdot v_j = \sum_{i,j=1}^{d} G((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

Konsequenter Weise,

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j)) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge v \in \mathbb{R}^d \right\} \\ &= \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} G((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge v \in \mathbb{R}^d \right\}, \end{aligned}$$

und in dieser Darstellung folgt via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$, dass L eine d, Ω-Lagrange-Funktion ist und dass

$$L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L((((t,x),v)) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} G((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j},$$

gilt. Da q eine d, Ω-Zustandskurve von L in dieser Darstellung ist und da $G((i,j))$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ konstant auf O ist, folgt via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$ **flach. A posteriori**,

$$\mathsf{dom}\, q = \mathsf{dom}\, A,$$

$$q \text{ ist 2-Kurve in } \mathbb{R}^d \text{ und } \forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = x_\circ + A(t) \cdot v_\circ \in O,$$

$$q \text{ ist } d, \Omega\text{-Zustandskurve von } L,$$

und dass es eine Zusammenhangskomponente $\tilde{O}$ von O gibt, so dass $\forall x, t, \tau : x \in \tilde{O} \wedge t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \wedge t < \tau$

$$\Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} G((i,j))(x) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(\tau) - q_j(t))}.$$

Da für alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ die Gleichung

$$G((i,j))(x) = g((i,j)),$$

gilt, folgt

$$\forall t, \tau : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \wedge t < \tau$$

$$\Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^d q((i,j)) \cdot (q_i(\tau) - q_i(t)) \cdot (q_j(\tau) - q_j(t)).},$$

$\square$

5 Intermezzo Differentialgeometrie

5.1 Reguläre $\mathtt{C}^2$-Flächen der Dimension d im $\mathbb{R}^m$

Satz

`V1.` $1 \leq d, n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

`V2.` $\Psi \in \mathtt{C}^2(O : \mathbb{R}^n)$.

`V3.` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \{\Psi_{,1}(x), \ldots, \Psi_{,d}(x)\}$ linear unabhängig.

`V4.` $\forall i, j; i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = \{(x, \langle \Psi_{,i}(x) | \Psi_{,j}(x) \rangle) : x \in O\}$.

`V5.` $g = \{((i,j), g((i,j))) : i, j \in \{1, \ldots, d\}\}$.

$\Rightarrow$

`a)` $\mathsf{dom}\, g = \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\}$.

`b)` $\forall i, j : i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R}^d)$.

`c)` $\forall x, i, j : x \in O \wedge i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j))(x) = \langle \Psi_{,i}(x) | \Psi_{,j}(x) \rangle$.

`d)` $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`e)` $\forall i, j : i, j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((ij, i))$.

`f)` $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^d g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

g) Falls $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$

und $L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : \right.$

$\left. t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\},$

so ist L eine d, Ω-Lagrange-Funktion und es gilt

$$L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t,x),v)) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j}.$$

Beweis a), b), c), d), e), f) Via Linearer Algebra evident.

Beweis g) Via V1., d), e), f) und **lf - geokl-d-$g(x)$** evident. □

⋆

Bemerkung Falls unter den hier getroffenen Voraussetzugen wie in g),

$$L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\},$$

und falls γ eine $d, (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}$-Kurve von L ist, dann ist $\Psi \circ \gamma$ eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^n$ und falls $t, \tau \in \mathsf{dom}\, \gamma$ mit $t < \tau$, dann ist

$$\int_t^\tau (L \circ \gamma^*),$$

die Länge der Kurve $(\Psi \circ \gamma \restriction [t|\tau])$ im $\mathbb{R}^n$.

5.2 Zylinder im $\mathbb{R}^3$

Satz zyl

`V1.` $0 < r \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3$ und $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\}$ ONB $\mathbb{R}^3$.

`V2.` $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \Psi((\phi, z)) = \mathfrak{x} + z \cdot \mathfrak{e} + (r \cdot \cos\phi) \cdot \mathfrak{f} + (r \cdot \sin\phi) \cdot \mathfrak{g}.$

`V3.` $\forall i, j : i, j \in \{1, 2\}$

$$\Rightarrow \quad g((i,j)) = \{((\phi, z), \langle \Psi_{,i}((\phi, z)) | \Psi_{,j}((\phi, z)) \rangle) : (\phi, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

`V4.` $g = \{((i,j), g((i,j))) : i, j \in \{1, 2\}\}$.

`V5.` $\Omega = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathfrak{o}^2\})$.

`V6.` $$L = \left\{ \left(((t, (\phi, z)), v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g((i,j))((\phi, z)) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : \right. \\ \left. t \in \mathbb{R} \wedge (\phi, z) \in \mathbb{R}^2 \wedge \mathfrak{o}^2 \neq v \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$\Rightarrow$

`a)` $\Psi \in \mathtt{C}^{+\infty}(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^3)$.

`b)` $\forall \phi, z : (\phi, z) \in \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \Psi_{,1}((\phi, z)) = -(r \cdot \sin\phi) \cdot \mathfrak{f} + (r \cdot \cos\phi) \cdot \mathfrak{g}$ und $\Psi_{,2}((\phi, z)) = \mathfrak{e}$.

`c)` $\forall \phi, z : (\phi, z) \in \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \{\Psi_{,1}((\phi, z)), \Phi_{,2}((\phi, z))\}$ linear unabhängig.

`d)` $\forall \phi, z : (\phi, z) \in \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \quad g((1,1))((\phi, z)) = r^2, \quad g((1,2))((\phi, z)) = g((2,1))((\phi, z)) = 0, \\ g((2,2))((\phi, z)) = 1.$$

`e)` $\forall \phi, z, i, j, k : (\phi, z) \in \mathbb{R}^2 \wedge i, j, k \in \{1, 2\} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma_{ijk}((\phi, z))$.

`f)` L eine d, Ω-Lagrange-Funktion und es gilt

$$L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t, x), v)) = \sqrt{r^2 \cdot v_1^2 + v_2^2}.$$

`g)` Falls q eine $2,\Omega$-Zustandskurve von L ist, dann $\exists(\phi_\circ, z_\circ), v_\circ, A$, so dass $(\phi_\circ, z_\circ) \in \mathbb{R}^2$ und $\mathfrak{o}^2 \neq v_\circ \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R})$ und $0 < A^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q$
und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = (\phi_\circ, z_\circ) + A(t) \cdot v_\circ$
und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad (\ln(L \circ q^*))^\bullet(t) = \dfrac{A^{\bullet\bullet}(t)}{A^\bullet(t)}$
und $\forall t, \tau : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \wedge t < \tau$

$$\Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \sqrt{r^2 \cdot (q_1(\tau) - q_1(t))^2 + (q_2(\tau) - q_2(t))^2}.$$

`h)` Falls $(\phi_\circ, z_\circ) \in \mathbb{R}^2$ und $\mathfrak{o}^2 \neq v_\circ \in \mathbb{R}^2$ und A eine 2-Kurve in $\mathbb{R}$ mit $0 < A^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, A$ und $q = \{(t, (\phi_\circ, z_\circ) + A(t) \cdot v_\circ) : t \in \mathsf{dom}\, A\}$ ist, dann ist q eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit $\mathsf{dom}\, q = \mathsf{dom}\, A$
und $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = (\phi_\circ, z_\circ) + A(t) \cdot v_\circ$
und q ist $2,\Omega$-Zustandskurve von L
und $\forall t, \tau : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge \tau \in \mathsf{dom}\, q \wedge t < \tau$

$$\Rightarrow \quad \int_t^\tau (L \circ q^*) = \sqrt{r^2 \cdot (q_1(\tau) - q_1(t))^2 + (q_2(\tau) - q_2(t))^2}.$$

`i)` Falls $\phi_1 \in]-\pi|\pi]$ und $z_1 \in \mathbb{R}$ und $t_\circ, t_1 \in \mathbb{R}$ und $t_\circ < t_1$ und q eine $2,\Omega$-Zustandskurve von L ist, so dass $t_\circ, t_1 \in \mathsf{dom}\, q$ und

$$\Psi(q(t_\circ)) = \Psi((0,0)) = \mathfrak{x} + r \cdot \mathfrak{f},$$
$$\Psi(q(t_1)) = \Psi((\phi_1, z_1)) = \mathfrak{x} + z_1 \cdot \mathfrak{e} + (r \cdot \cos\phi_1) \cdot \mathfrak{f} + (r \cdot \sin\phi_1) \cdot \mathfrak{g},$$

gilt, so gibt es $\nu, \mu \in \mathbb{Z}$ und $A \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, q : \mathbb{R})$, so dass

$$q(t_\circ) = (2 \cdot \nu \cdot \pi, 0), \quad q(t_1) = (\phi_1 + 2 \cdot \mu \cdot \pi, z_1),$$

und $q(t_\circ) \neq q(t_1)$ und $0 < A^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q$ und

$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \frac{A(t_1)}{A(t_1) - A(t_\circ)} \cdot q(t_\circ) - \frac{A(t_\circ)}{A(t_1) - A(t_\circ)} \cdot q(t_1) + \frac{A(t)}{A(t_1) - A(t_\circ)} \cdot (q(t_1) - q(t_\circ)),$$

und die Länge von $(\Psi \circ q \downharpoonright [t_\circ|t_1])$ ist gleich

$$\begin{aligned} \int_{t_\circ}^{t_1} \sqrt{r^2 \cdot (q_1^\bullet)^2 + (q_2^\bullet)^2} &= \sqrt{r^2 \cdot (q_1(t_1) - q_1(t_\circ))^2 + (q_2(t_1) - q_2(t_\circ))^2} \\ &= \sqrt{r^2 \cdot (\phi_1 + 2 \cdot (\mu - \nu) \cdot \pi)^2 + z_1^2} \\ &\geq \begin{cases} \sqrt{r^2 \cdot \phi_1^2 + z_1^2} & , \quad (\phi_1, z_1) \neq (0,0) \\ 2 \cdot r \cdot \pi & , \quad (\phi_1, z_1) = (0,0) \end{cases}. \end{aligned}$$

j) Falls $\phi_1 \in \,]-\pi|\pi]$ und $z_1 \in \mathbb{R}$ und $\nu, \mu \in \mathbb{Z}$ und $(2\cdot\nu\cdot\pi, 0) \neq (\phi_1 + 2\cdot\mu\cdot\pi, z_1)$ und $t_\circ, t_1 \in \mathbb{R}$ und $t_\circ < t_1$ und $A \in \mathtt{C}^2([t_\circ|t_1] : \mathbb{R})$ mit $0 < A^\bullet$ auf $[t_\circ|t_1]$ und

$$q = \left\{ \left(t, \frac{A(t_1)}{A(t_1) - A(t_\circ)} \cdot (2 \cdot \nu \cdot \pi, 0) \right.\right.$$
$$- \frac{A(t_\circ)}{A(t_1) - A(t_\circ)} \cdot (\phi_1 + 2 \cdot \mu \cdot \pi, z_1)$$
$$\left.\left. + \frac{A(t)}{A(t_1) - A(t_\circ)} \cdot (\phi_1 + 2 \cdot (\mu - \nu) \cdot \pi, z_1) \right) : t \in [t_\circ|t_1] \right\}$$

so ist q eine $2, \Omega$-Zustandskurve von L, so dass $q(t_\circ) \neq q(t_1)$,

$$q(t_\circ) = (2 \cdot \nu \cdot \pi, 0), \quad q(t_1) = (\phi_1 + 2 \cdot \mu \cdot \pi, z_1),$$

und

$$\Psi(q(t_\circ)) = \mathfrak{x} + r \cdot \mathfrak{f}, \quad \Psi(q(t_1)) = \mathfrak{x} + z_1 \cdot \mathfrak{e} + (r \cdot \cos\phi_1) \cdot \mathfrak{f} + (r \cdot \sin\phi_1) \cdot \mathfrak{g},$$

und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q$$
$$\Rightarrow \quad q(t) = \frac{A(t_1)}{A(t_1) - A(t_\circ)} \cdot q(t_\circ) - \frac{A(t_\circ)}{A(t_1) - A(t_\circ)} \cdot q(t_1)$$
$$+ \frac{A(t)}{A(t_1) - A(t_\circ)} \cdot (q(t_1) - q(t_\circ)),$$

und die Länge von $\Psi \circ q$ ist gleich

$$\int_{t_\circ}^{t_1} \sqrt{r^2 \cdot (q_1^\bullet)^2 + (q_2^\bullet)^2} = \sqrt{r^2 \cdot (q_1(t_1) - q_1(t_\circ))^2 + (q_2(t_1) - q_2(t_\circ))^2}$$
$$= \sqrt{r^2 \cdot (\phi_1 + 2 \cdot (\mu - \nu) \cdot \pi)^2 + z_1^2}$$
$$\geq \begin{cases} \sqrt{r^2 \cdot \phi_1^2 + z_1^2} & , \quad (\phi_1, z_1) \neq (0,0) \\ 2 \cdot r \cdot \pi & , \quad (\phi_1, z_1) = (0,0) \end{cases}.$$

`k)` Falls $\phi_1 \in \left]-\pi|\pi\right]$ und $z_1 \in \mathbb{R}$ und $(0,0) \neq (\phi_1, z_1)$ und

$$q = \left\{ \left(t, \frac{t - t_\circ}{t_1 - t_\circ} \cdot (\phi_1, z_1) \right) : t \in \left[t_\circ | t_1\right] \right\},$$

so ist q eine $2, \Omega$-Zustandskurve von L, so dass $q(t_1) \neq q(t_\circ)$,

$$q(t_\circ) = (0,0), \quad q(t_1) = (\phi_1, z_1),$$

und

$$\Psi(q(t_\circ)) = \mathfrak{x} + r \cdot \mathfrak{f}, \quad \Psi(q(t_1)) = \mathfrak{x} + z_1 \cdot \mathfrak{e} + (r \cdot \cos\phi_1) \cdot \mathfrak{f} + (r \cdot \sin\phi_1) \cdot \mathfrak{g},$$

und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = \frac{t_1}{t_1 - t_\circ} \cdot q(t_\circ) - \frac{t_\circ}{t_1 - t_\circ} \cdot q(t_1) + \frac{t}{t_1 - t_\circ} \cdot (q(t_1) - q(t_\circ)),$$

und die Länge von $\Psi \circ q$ ist gleich

$$\int_{t_\circ}^{t_1} \sqrt{r^2 \cdot (q_1^\bullet)^2 + (q_2^\bullet)^2} = \sqrt{r^2 \cdot \phi_1^2 + z_1^2}.$$

`l)` Falls

$$q = \left\{ \left(t, \frac{t - t_\circ}{t_1 - t_\circ} \cdot (2 \cdot \pi, 0) \right) : t \in \left[t_\circ | t_1\right] \right\},$$

so ist q eine $2, \Omega$-Zustandskurve von L, so dass $q(t_1) \neq q(t_\circ)$,

$$q(t_\circ) = (0,0), \quad q(t_1) = (2 \cdot \pi, 0),$$

und

$$\Psi(q(t_\circ)) = \mathfrak{x} + r \cdot \mathfrak{f} = \Psi(q(t_1)),$$

und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad q(t) = \frac{t_1}{t_1 - t_\circ} \cdot q(t_\circ) - \frac{t_\circ}{t_1 - t_\circ} \cdot q(t_1) + \frac{t}{t_1 - t_\circ} \cdot (q(t_1) - q(t_\circ)),$$

und die Länge von $\Psi \circ q$ ist gleich

$$\int_{t_\circ}^{t_1} \sqrt{r^2 \cdot (q_1^\bullet)^2 + (q_2^\bullet)^2} = 2 \cdot r \cdot \pi.$$

Beweis `a), b)` trivial.

Beweis `c)` Da $\{\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\}$ ONB $\mathbb{R}^3$ via `b)` evident.

Beweis `d)` Via `a), c)` und via **Reguläre** $\mathtt{C}^2$**-Flächen der Dimension** d **im** $\mathbb{R}^m$ gilt $\forall (\phi, z), i, j : (\phi, z) \in \mathbb{R}^2 \wedge i, j \in \{1, 2\}$

$$\Rightarrow \quad g((i,j))((\phi, z)) = \langle \Psi_{,i}((\phi, z)) | \Psi_{,2}((\phi, z)) \rangle,$$

woraus sich ohne viel Aufwand mit Hilfe von `V1.`, `b)` die behaupteten Gleichungen ergeben.

Beweis `e)` Per definitionem via `d)` evident.

Beweis `f)` Via **Reguläre** $\mathtt{C}^2$**-Flächen der Dimension** d **im** $\mathbb{R}^m$ und `d)` evident.

Beweis `g)` Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$**-flach. A priori** und `f)` evident.

Beweis `h)` Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$**-flach. A posteriori** und `f)` evident.

Beweis `i), j), k), l)` Rechnung. □

6 lf - geokl-d-$g(x)$ (+1)

6.1 $(L \circ \gamma^*)^\bullet$

Satz

V1. $1 \le d \in \mathbb{N}$ und $0 \ne O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

V3. $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

V5. $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \ne v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

V6. $$L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \ne v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

V7. γ ist d, Ω-Kurve von L.

$\Rightarrow$

$\forall t : t \in \mathsf{dom}\,\gamma$

$$\Rightarrow \quad (L \circ \gamma^*)^\bullet(t) = \frac{1}{(L \circ \gamma^*)(t)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ \gamma)(t) \cdot \gamma_j^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=2}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ \gamma)(t) \cdot \gamma_i^\bullet(t) \cdot \gamma_j^\bullet(t) \right) \cdot \gamma_k^\bullet(t) \right).$$

Beweis Via **lf - geokl-d-$g(x)$** ist L eine d, Ω-Lagrange-Funktion mit

$$L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t,x),v)) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j}.$$

Somit gilt für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$
\begin{aligned}
(L\circ\gamma^*)^\bullet(t) = \left(\sqrt{\sum_{i,j=1}^{d}(g((i,j))\circ\gamma)\cdot\gamma_i^\bullet\cdot\gamma_j^\bullet}\right)^\bullet(t) = \frac{1}{(L\circ\gamma^*)(t)}\cdot\Bigg(\\
\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j,k=1}^{d}(g((i,j))_{,k}\circ\gamma)(t)\cdot\gamma_i^\bullet(t)\cdot\gamma_j^\bullet(t)\cdot\gamma_k^\bullet(t)\\
+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{d}(g((i,j))\circ\gamma)(t)\cdot\gamma_i^{\bullet\bullet}(t)\cdot\gamma_j^\bullet(t)\\
+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{d}(g((i,j))\circ\gamma)(t)\cdot\gamma_i^\bullet(t)\cdot\gamma_j^{\bullet\bullet}(t)\Bigg)\\
= \frac{1}{(L\circ\gamma^*)(t)}\cdot\Bigg(\sum_{i,j,k=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ)(t)\cdot\gamma_i^\bullet(t)\cdot\gamma_j^\bullet(t)\cdot\gamma_k^\bullet(t)\\
+\frac{1}{2}\cdot\sum_{j,k=1}^{d}(g((k,j))\circ\gamma)(t)\cdot\gamma_j^{\bullet\bullet}(t)\cdot\gamma_k^\bullet(t)\\
+\frac{1}{2}\cdot\sum_{k,j=1}^{d}(g((k,j))\circ\gamma)(t)\cdot\cdot\gamma_j^{\bullet\bullet}(t)\gamma_k^\bullet(t)\Bigg)\\
= \frac{1}{(L\circ\gamma^*)(t)}\cdot\Bigg(\sum_{i,j,k=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ)(t)\cdot\gamma_i^\bullet(t)\cdot\gamma_j^\bullet(t)\cdot\gamma_k^\bullet(t)\\
+\sum_{j,k=1}^{d}(g((k,j))\circ\gamma)(t)\cdot\gamma_j^{\bullet\bullet}(t)\cdot\gamma_k^\bullet(t)\Bigg),
\end{aligned}
$$

und demnach via Umstellen und Ausklammern für alle $t \in \mathsf{dom}\,\gamma$,

$$
\begin{aligned}
(L\circ\gamma^*)^\bullet(t) = \frac{1}{(L\circ\gamma^*)(t)}\cdot\Bigg(\sum_{k=1}^{d}\Bigg(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ\gamma)(t)\cdot\gamma_j^{\bullet\bullet}(t)\\
+\sum_{i,j=2}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ\gamma)(t)\cdot\gamma_i^\bullet(t)\cdot\gamma_j^\bullet(t)\Bigg)\cdot\gamma_k^\bullet(t)\Bigg).
\end{aligned}
$$

$\square$

6.2 $0=(L\circ q^*)^\bullet$. A priori

Satz

V1. $1\le d\in\mathbb{N}$ und $0\neq O\subseteq\mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\Omega=(\mathbb{R}\times O)\times(\mathbb{R}^d\setminus\{\mathfrak{o}^d\})$.

V3. $g:\{1,\dots,d\}\times\{1,\dots,d\}\to\mathtt{C}^1(O:\mathbb{R})$.

V4. $\forall i,j: i\in\{1,\dots,d\}\wedge j\in\{1,\dots,d\}\quad\Rightarrow\quad g((i,j))=g((j,i))$.

V5. $\forall x,v: x\in O\wedge\mathfrak{o}^d\neq v\in\mathbb{R}^d\quad\Rightarrow\quad 0<\sum_{i,j=1}^{d}g((i,j))(x)\cdot v_i\cdot v_j$.

V6. $$L=\left\{\left(((t,x),v),\sqrt{\sum_{i,j=1}^{d}g((i,j))(x)\cdot v_i\cdot v_j}\right):\right.$$
$$\left. t\in\mathbb{R}\wedge x\in O\wedge\mathfrak{o}^d\neq v\in\mathbb{R}^d\right\}.$$

V7. q ist d,Ω-Zustandskurve von L.

V8. $\forall t: t\in\mathsf{dom}\,q\quad\Rightarrow\quad 0=(L\circ q^*)^\bullet(t)$.

$\Rightarrow$

a) $\forall t,k: t\in\mathsf{dom}\,q\wedge k\in\{1,\dots,d\}$

$$\Rightarrow\quad\left(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right)+\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)=0.$$

b) $\forall t,k: t\in\mathsf{dom}\,q\wedge k\in\{1,\dots,d\}$

$$\Rightarrow\quad q_k^{\bullet\bullet}(t)+\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ij[k]}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)=0.$$

Beweis a) Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$ evident.

Beweis b) Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$**. A priori** evident. □

6.3 $0 = (L \circ q^*)^\bullet$. A posteriori

Satz

V1. $1 \le d \in \mathbb{N}$ und $0 \ne O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

V3. $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i, j)) = g((j, i))$.

V5. $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \ne v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

V6. $$L = \left\{ \left(((t, x), v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \ne v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

V7. Q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

V8. δ Stammfunktion von $L \circ Q^*$ auf $\mathsf{dom}\, Q$.

V9. $q = Q \circ \delta^{-1}$.

$\Rightarrow$

a) $\delta \in \mathtt{C}^2(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R})$ und $0 < \delta^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, Q$ und δ streng wachsend und $\mathsf{ran}\, \delta$ echtes reelles Intervall und $\delta : \mathsf{dom}\, Q \to \mathsf{ran}\, \delta$ bijektiv und $\delta^\bullet = L \circ Q^*$ und $\delta^{\bullet\bullet} = (L \circ Q^*)^\bullet$.

b) $\delta^{-1} : \mathsf{ran}\, \delta \to \mathsf{dom}\, Q$ bijektiv und $\delta^{-1} \in \mathtt{C}^2(\mathsf{ran}\, \delta : \mathsf{dom}\, Q)$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{ran}\, \delta \quad \Rightarrow \quad \delta^{-1}(\delta(t)) = t \wedge (\delta^{-1})'(\delta(t)) \cdot \delta^\bullet(t) = 1,$$

$$\forall \sigma : \sigma \in \mathsf{ran}\, \delta \quad \Rightarrow \quad \delta(\delta^{-1}(\sigma)) = \sigma \wedge \delta^\bullet(\delta^{-1}(\sigma)) \cdot (\delta^{-1})'(\sigma) = 1,$$

und $0 < (\delta^{-1})'$ und

$$\forall \sigma : \sigma \in \mathsf{ran}\, \delta \quad \Rightarrow \quad (\delta^{-1})''(\sigma) \cdot \delta^\bullet(\delta^{-1}(\sigma)) + ((\delta^{-1})')^2(\sigma) \cdot \delta^{\bullet\bullet}(\delta^{-1}(\sigma)) = 0.$$

c) q ist d, Ω-Kurve von L und $\mathsf{dom}\, q = \mathsf{ran}\, \delta$ und

$$\text{und } Q^\bullet = (q' \circ \delta) \cdot \delta^\bullet \text{ und } Q^{\bullet\bullet} = (q'' \circ \delta) \cdot (\delta^\bullet)^2 + (q' \circ \delta) \cdot \delta^{\bullet\bullet}$$

$$\text{und } \delta^\bullet = L \circ (q \circ \delta)^* \text{ und } \delta^{\bullet\bullet} = (\ln(L \circ (q \circ \delta)^*))^\bullet \cdot \delta^\bullet.$$

d) $\forall s : s \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad 1 = (L \circ q^*)(s)$ und $0 = (L \circ q^*)'(s)$.

e) $\forall s, k : s \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$:

$$\left(\sum_{j=1}^{k} (g((k,j)) \circ q)(s) \cdot q_k''(s)\right) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ q)(s) \cdot q_i'(s) \cdot q_j'(s) = 0.$$

f) $\forall s, k : s \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$

$$\Rightarrow \quad q_k''(s) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ij[k]} \circ q)(s) \cdot q_i'(s) \cdot q_j'(s) = 0.$$

g) q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

Beweis a) Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$ ist L eine d, Ω-Lagrange-Funktion und es gilt $0 < L \circ Q^*$ auf $\mathsf{dom}\, Q$ sowie

$$L : \Omega \to \mathbb{R}, \quad L(((t,x),v)) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j}.$$

Via $L \circ Q^* \in \mathsf{C}^1(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R})$ ergibt sich $\delta \in \mathsf{C}^2(\mathsf{dom}\, Q : \mathbb{R})$. Per definitionem gilt $\delta^\bullet = L \circ Q^*$ auf $\mathsf{dom}\, Q$. Es folgt $\delta^{\bullet\bullet} = (L \circ Q^*)^\bullet$ und $0 < \delta^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, Q$ und somit ist δ streng wachsend. Wegen $\mathsf{ran}\, \delta = \delta[\mathsf{dom}\, Q]$ ist $\mathsf{ran}\, \delta$ als Bild eines echten reellen Intervalls unter einer stetigen, nicht konstanten Funktion ein echtes reelles Intervall. δ ist als streng wachsende Funktion injektiv. Also gilt via $\mathsf{dom}\, \delta = \mathsf{dom}\, Q$ auch $\delta : \mathsf{dom}\, Q \to \mathsf{ran}\, \delta$ bijektiv und $\delta^\bullet = L \circ Q^*$.

Beweis b) Via a) gilt $\delta^{-1} : \mathsf{ran}\, \delta \to \mathsf{dom}\, Q$ bijektiv und mit reeller Analysis gilt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, Q \quad \Rightarrow \quad \delta^{-1}(\delta(t)) = t,$$

$$\forall \sigma : \sigma \in \mathsf{ran}\, \delta \quad \Rightarrow \quad \delta(\delta^{-1}(\sigma)) = \sigma,$$

und via $0 < \delta^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, Q$ ist δ^{-1} zweimal stetig differenzierbar und es gilt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, Q \quad \Rightarrow \quad (\delta^{-1})'(\delta(t)) \cdot \delta^\bullet(t) = 1,$$

$$\forall \sigma : \sigma \in \mathsf{ran}\, \delta \quad \Rightarrow \quad \delta^\bullet(\delta^{-1}(\sigma)) \cdot (\delta^{-1})'(\sigma) = 1,$$

so dass insbesondere $0 < (\delta^{-1})'$ und weiterhin

$$\forall \sigma : \sigma \in \mathsf{ran}\, \delta \quad \Rightarrow \quad \delta^{\bullet\bullet}(\delta^{-1}(\sigma)) \cdot ((\delta^{-1})')^2(\sigma) + \delta^\bullet(\delta^{-1}(\sigma)) \cdot (\delta^{-1})''(\sigma) = 0.$$

<u>Beweis</u> Via $Q = q \circ \delta$ evident.

<u>Beweis</u> d) Für alle $s \in \mathsf{dom}\, q = \mathsf{ran}\, \delta$ gilt via $\delta \circ \delta^{-1} = \mathsf{id}_{\mathsf{ran}\,\delta} = \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,q}$ via a), c) und $0 < \delta^\bullet$,

$$\begin{aligned}
((L \circ q^*)(s))^2 &= \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(q(s)) \cdot q_i'(s) \cdot q_j'(s) \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))((q\circ\delta)(\delta^{-1}(s))) \cdot (q_i' \circ \delta)(\delta^{-1}(s)) \cdot (q_j' \circ \delta)(\delta^{-1}(s)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(Q(\delta^{-1}(s))) \cdot \frac{Q_i^\bullet(\delta^{-1}(s))}{\delta^\bullet(\delta^{-1}(s))} \cdot \frac{Q_j^\bullet(\delta^{-1}(s))}{\delta^\bullet(\delta^{-1}(s))} \\
&= \frac{1}{(\delta^\bullet(\delta^{-1}(s)))^2} \cdot \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(Q(\delta^{-1}(s))) \cdot Q_i^\bullet(\delta^{-1}(s)) \cdot Q_j^\bullet(\delta^{-1}(s)) \\
&= \frac{1}{(\delta^\bullet(\delta^{-1}(s)))^2} \cdot ((L \circ Q^*)(\delta^{-1}(s)))^2 = \frac{(\delta^\bullet(\delta^{-1}(s)))^2}{(\delta^\bullet(\delta^{-1}(s)))^2} = 1,
\end{aligned}$$

woraus via $0 < L \circ q^*$ die Aussage $(L \circ q^*)(s) = 1$ folgt. Konsequenter Weise gilt für alle $s \in \mathsf{dom}\, q$,

$$0 = (L \circ q^*)'(s).$$

<u>Beweis</u> e) Via **lf - geokl-**d-$g(x)$ und via c) gilt für alle $s \in \mathsf{dom}\, q = \mathsf{ran}\, \delta$, $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{d} g((k,j))(Q(\delta^{-1}(s))) \cdot Q_j^{\bullet\bullet}(\delta^{-1}(s)) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_{ijk}(Q(\delta^{-1}(s))) \cdot Q_i^\bullet(\delta^{-1}(s)) \cdot Q_j^\bullet(\delta^{-1}(s)) \\
&\quad - (\ln(L \circ Q^*))^\bullet(\delta^{-1}(s)) \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(Q(\delta^{-1}(s))) \cdot Q_j^\bullet(\delta^{-1}(s)) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{d} g((k,j))(q(s)) \cdot \left(q_j''(s) \cdot (\delta^\bullet)^2(\delta^{-1}(s)) + q_j'(s) \cdot \delta^{\bullet\bullet}(\delta^{-1}(s)) \right) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_{ijk}(q(s)) \cdot q_i'(s) \cdot \delta^\bullet(\delta^{-1}(s)) \cdot q_j'(s) \cdot \delta^\bullet(\delta^{-1}(s)) \\
&\quad - (\ln(L \circ Q^*))^\bullet(\delta^{-1}(s)) \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(q(s))) \cdot q_j'(s) \cdot \delta^\bullet(\delta^{-1}(s)) \right) \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ldots = \sum_{j=1}^{d} g((k,j))(q(s)) \cdot \big(q_j''(s) \cdot (\delta^\bullet)^2(\delta^{-1}(s)) \\
+ q_j'(s) \cdot (\ln(L \circ Q^*))^\bullet(\delta^{-1}(s)) \cdot \delta^\bullet(\delta^{-1}(s))\big) \\
+ \sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_{ijk}(q(s)) \cdot (\delta^\bullet)^2(\delta^{-1}(s)) \cdot q_i'(s) \cdot q_j'(s) \\
- (\ln(L \circ Q^*))^\bullet(\delta^{-1}(s)) \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(q(s))) \cdot q_j'(s) \cdot \delta^\bullet(\delta^{-1}(s))\right) \\
= (\delta^\bullet)^2(\delta^{-1}(s)) \\
\cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(q(s)) \cdot q_j''(s)\right) + \sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_{ijk}(q(s)) \cdot q_i'(s) \cdot q_j'(s)\right) \\
+ (\ln(L \circ Q^*))^\bullet(\delta^{-1}(s)) \cdot \delta^\bullet(\delta^{-1}(s)) \\
\cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(q(s)) \cdot q_j'(s)\right) - \left(\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(q(s)) \cdot q_j'(s)\right)\right) \\
= (\delta^\bullet)^2(\delta^{-1}(s)) \cdot \\
\left(\left(\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(q(s)) \cdot q_j''(s)\right) + \sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_{ijk}(q(s)) \cdot q_i'(s) \cdot q_j'(s)\right),
\end{aligned}$$

so dass via $0 < \delta^\bullet$,

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{d} g((k,j))(q(s)) \cdot q_j''(s)\right) + \sum_{i,j=1}^{d} \Gamma_{ijk}(q(s)) \cdot q_i'(s) \cdot q_j'(s),$$

folgt.

Beweis `f)` trivial.

Beweis `g)` Via `d)`, `e)` gilt für alle $s \in \mathsf{dom}\, q$ und $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q)(s) \cdot q_k''(s)\right) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ q)(s) \cdot q_i'(s) \cdot q_j'(s) \\
= 0 = (\ln(L \circ q^*))'(s) \\
= (\ln(L \circ q^*))'(s) \cdot \sum_{j=1}^{d} g((k,j))(s) \cdot q_j'(s),
\end{aligned}$$

so dass q via `c)` und **lf - geokl-**d**-**$g(x)$ eine d, Ω-Zustandskurve von L ist. $\square$

$\star$

Satz

V1. $1 \le d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

V3. $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

V5. $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

V6. $$L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

V7. q ist $2, \Omega$-Kurve von L.

V8. $\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^{\bullet\bullet}(t) \right) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ q)(t) \cdot q_i^{\bullet}(t) \cdot q_j^{\bullet}(t) = 0,$$

oder

$\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$

$$\Rightarrow \quad q_k^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ij[k]} \circ q)(t) \cdot q_i^{\bullet}(t) \cdot q_j^{\bullet}(t) = 0.$$

$\Rightarrow$

a) $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad 0 = (L \circ q^*)^{\bullet}(t)$.

b) q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

<u>Beweis</u> Aus V8 folgt via **Präludium** in beiden Fällen für alle $t \in \mathsf{dom}\, q$ und alle $k \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^{\bullet\bullet}(t) \right) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ q)(t) \cdot q_i^{\bullet}(t) \cdot q_j^{\bullet}(t) = 0.$$

Via **lf - geokl-d-$g(x)$ (-1).** $(L\circ\gamma^*)^\bullet$ gilt für alle $t\in\mathsf{dom}\,q$,

$$
\begin{aligned}
(L\circ q^*)^\bullet(t) = \frac{1}{(L\circ q^*)(t)}\cdot\Bigg(\sum_{k=1}^{d}\Bigg(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\\
+\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)\Bigg)\cdot q_k^\bullet(t)\Bigg)\\
= \frac{1}{(L\circ q^*)(t)}\cdot\left(\sum_{k=1}^{d}0\cdot q_k^\bullet(t)\right) = \frac{0}{(L\circ q^*)(t)} = 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt für alle $t\in\mathsf{dom}\,q$,

$$0 = (\ln(L\circ q^*))^\bullet(t),$$

und somit für alle $t\in\mathsf{dom}\,q$ und alle $k\in\{1,\ldots,d\}$,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{d}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^{\bullet\bullet}(t)\right)+\sum_{i,j=1}^{d}(\Gamma_{ijk}\circ q)(t)\cdot q_i^\bullet(t)\cdot q_j^\bullet(t)\\
= 0 = (\ln(L\circ q^*))^\bullet(t)\\
= (\ln(L\circ q^*))^\bullet(t)\cdot\sum_{j=1}^{k}(g((k,j))\circ q)(t)\cdot q_j^\bullet(t),
\end{aligned}
$$

so dass nun via **lf - geokl-d-$g(x)$**, da offenbar q eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^d$ mit $\mathsf{ran}\,q\subseteq O$ und $\mathfrak{o}^d\neq q^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\,q$ ist, die Aussage

$$q \text{ ist } d,\Omega\text{-Zustandskurve von } L,$$

folgt. $\square$

7 lf - geokl-d-$g(x)$ flach (+1)

7.1 $(L \circ \gamma^*)^\bullet$

Satz

V1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

V3. $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

V5. $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

V6. $\forall x, i, j, k : x \in O \wedge i, j, k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma_{ijk}(x)$.

V7. $$L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

V7. γ ist d, Ω-Kurve von L.

$\Rightarrow$

$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, \gamma$

$$\Rightarrow \quad (L \circ \gamma^*)^\bullet(t) = \frac{1}{(L \circ \gamma^*)(t)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ \gamma)(t) \cdot \gamma_j^{\bullet\bullet}(t) \right) \cdot \gamma_k^{\bullet(}(t) \right)$$

<u>Beweis</u> Via **lf - geokl-d-$g(x)$ (+1)** evident. $\square$

7.2 $0 = (L \circ q^*)^\bullet$. A priori

Satz

V1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

V3. $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i, j)) = g((j, i))$.

V5. $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

V6. $\forall x, i, j, k : x \in O \wedge i, j, k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma_{ijk}(x)$.

V7. $$L = \left\{ \left(((t, x), v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i, j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

V8. q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

V9. $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad 0 = (L \circ q^*)^\bullet(t)$.

$\Rightarrow$

a) $\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{d} (g((k, j)) \circ q)(t) \cdot q_j^{\bullet\bullet}(t) = 0$.

b) $\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad q_k^{\bullet\bullet}(t) = 0$.

Beweis Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$**.** $0 = (L \circ \gamma^*)^\bullet$**. A priori** evident. $\square$

7.3 $0 = (L \circ q^*)^\bullet$. A posteriori

Satz

V1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

V2. $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

V3. $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

V5. $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

V6. $\forall x, i, j, k : x \in O \wedge i, j, k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma_{ijk}(x)$.

V7. $$L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

V8. Q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

V9. δ Stammfunktion von $L \circ Q^*$ auf $\mathsf{dom}\, Q$.

V10. $q = Q \circ \delta^{-1}$.

$\Rightarrow$

a) q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

b) $\forall s, k : s \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad q''_k(s) = 0$.

<u>Beweis</u> Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$**.** $0 = (L \circ \gamma^*)^\bullet$**. A posteriori** evident. $\square$

Satz

`V1.` $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

`V2.` $\Omega = (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\})$.

`V3.` $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`V4.` $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

`V5.` $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

`V6.` $\forall x, i, j, k : x \in O \wedge i, j, k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Gamma_{ijk}(x)$.

`V7.` $$L = \left\{ \left(((t,x),v), \sqrt{\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

`V8.` q ist $2, \Omega$-Kurve von L.

`V9.` $\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ q)(t) \cdot q_j^{\bullet\bullet}(t) = 0,$

oder

$\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad q_k^{\bullet\bullet}(t) = 0$.

$\Rightarrow$

`a)` $\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad 0 = (L \circ q^*)^\bullet(t)$.

`b)` q ist d, Ω-Zustandskurve von L.

<u>Beweis</u> Via **lf - geokl-**d**-**$g(x)$**.** $0 = (L \circ \gamma^*)^\bullet$**. A posteriori** evident. $\square$

8 lf - δ-geokl-d-$g(x)$

Satz - geodlt

`V0.` $0 < \delta \in \mathbb{R}$.

`V1.` $1 \leq d \in \mathbb{N}$ und $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^d$ und O offen.

`V2.` $\Omega(\delta) = \begin{cases} (\mathbb{R} \times O) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{\mathfrak{o}^d\}) & , \quad 0 < \delta < 2 \\ (\mathbb{R} \times O) \times \mathbb{R}^d & , \quad 2 \leq \delta \end{cases}$

`V3.` $g : \{1, \ldots, d\} \times \{1, \ldots, d\} \to \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

`V4.` $\forall i, j : i \in \{1, \ldots, d\} \wedge j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad g((i,j)) = g((j,i))$.

`V5.` $\forall x, v : x \in O \wedge \mathfrak{o}^d \neq v \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad 0 < \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j$.

`V6.` $$L(\delta) = \left\{ \left(((t,x),v), \left(\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j \right)^{\delta} \right) : t \in \mathbb{R} \wedge x \in O \wedge v \in \mathbb{R}^d \wedge ((t,x),v) \in \Omega(\delta) \right\}.$$

$\Rightarrow$

`a)` $L(\delta) : \Omega(\delta) \to \mathbb{R}, \quad L(\delta)(((t,x),v)) = \left(\sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))(x) \cdot v_i \cdot v_j \right)^{\delta}$ und $0 \leq L(\delta)$ auf $\Omega(\delta)$.

`b)` $\partial_{\mathtt{t}}(L(\delta)) : \Omega \to \mathbb{R}, \quad (\partial_{\mathtt{t}}(L(\delta)))(((t,x),v)) = 0$.

`c)` $k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad L(\delta)_{,k} : \Omega(\delta) \to \mathbb{R}$,

$$L(\delta)_{,k}(((t,x),v)) = \delta \cdot L(\delta)^{1-1/\delta}(((t,x),v)) \cdot \sum_{i,j=1}^{d} g((i,j))_{,k}(x) \cdot v_i \cdot v_j.$$

`d)` $k \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mathtt{v}k} L(\delta) : \Omega(\delta) \to \mathbb{R}$,

$$(\partial_{\mathtt{v}k} L(\delta))(((t,x),v)) = 2 \cdot \delta \cdot L(\delta)^{1-1/\delta}(((t,x),v)) \cdot \sum_{j=1}^{k} g((k,j))(x) \cdot v_j.$$

`e)` $L(\delta)$ ist $d, \Omega(\delta)$-Lagrange-Funktion.

`f)` $E(\delta)$ ist $d, \Omega(\delta)$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow \quad E(\delta) = (2 \cdot \delta - 1) \cdot L(\delta)$.

`g)` $K(\delta)$ kinetische $d, \Omega(\delta)$-Energie von $L(\delta) \quad \Leftrightarrow \quad K(\delta) = \delta \cdot L(\delta)$.

`h)` $P(\delta)$ potentielle $d, \Omega(\delta)$-Energie von $L \quad \Leftrightarrow \quad P(\delta) = (\delta - 1) \cdot L(\delta)$.

`i)` Falls $\frac{1}{2} \neq \delta$ und falls q eine $d, \Omega(\delta)$- Zustandskurve von $L(\delta)$ ist, dann

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad 0 = (L(\delta) \circ q^*)^\bullet(t),$$

und

$$\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$$
$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ g)(t) \cdot q_j^{\bullet\bullet}(t) \right) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t) = 0,$$

und

$$\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$$
$$\Rightarrow \quad q_k^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ij[k]} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t) = 0,$$

`j)` Falls q eine $d, \Omega(\delta)$-Zustandskurve von $L(\delta)$ ist, dann gilt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{o}^d = q^\bullet(t) \quad \textit{oder} \quad \forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{o}^d \neq q^\bullet(t).$$

`k)` Falls q eine $d, \Omega(d)$-Kurve von $L(\delta)$ ist und falls

$$\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$$
$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{j=1}^{d} (g((k,j)) \circ g)(t) \cdot q_j^{\bullet\bullet}(t) \right) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ijk} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t) = 0,$$

oder

$$\forall t, k : t \in \mathsf{dom}\, q \wedge k \in \{1, \ldots, d\}$$
$$\Rightarrow \quad q_k^{\bullet\bullet}(t) + \sum_{i,j=1}^{d} (\Gamma_{ij[k]} \circ q)(t) \cdot q_i^\bullet(t) \cdot q_j^\bullet(t) = 0,$$

dann ist q eine $d, \Omega(\delta)$-Zustandskurve von $L(\delta)$ und es gilt

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad 0 = (L \circ q^*)^\bullet(t).$$

`l)` Falls $2 \leq \delta$ und falls q eine 2-Kurve im $\mathbb{R}^d$ ist, so dass $\mathsf{ran}\, q \subseteq O$ und

$$\forall t : t \in \mathsf{dom}\, q \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{o}^d = q^\bullet(t),$$

dann ist q eine $d, \Omega(\delta)$-Zustandskurve von $L(\delta)$.

<u>Beweis</u> `a), b)` trivial

<u>Beweis</u> `c), d), e), f), g), h), i)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `j)` Via $0 = (L \circ q^*)^\bullet$ auf $\mathsf{dom}\, q$ und positiver Definitheit von g evident.

<u>Beweis</u> `k)` Rechnung.

<u>Beweis</u> `l)` Per definitionem und via `k)` evident. □

9 Literatur

Heinrich Brauner, *Differentialgeometrie*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1981.

Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*, BG Teubner, Stuttgart, 1988[4].