Elementare Strömungsmechanik 1

Andreas Unterreiter

27. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

1 F ist d, Ω, Z-Quasi-Flussfunktion

$\boxed{\textbf{Definition}}$ f ist d, Ω, Z-Quasi-Flussfunktion

$:\Leftrightarrow$

1. $1 \leq d \in \mathbb{N}$.
2. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. $0 \neq \Omega$ offen.
3. Z echtes, reelles Intervall.
4. $f : \Omega \to \mathtt{C}^2(Z : \mathbb{R}^d)$.
5. $\forall t : t \in Z \quad \Rightarrow \quad f(.)(t) \in \mathtt{C}^1(\Omega : \mathbb{R}^d)$, wobei
$$f(.)(t) = \{(x, f(x)(t)) : x \in \Omega\}.$$
6. $\forall t : t \in Z \quad \Rightarrow \quad f(.)^\bullet(t) \in \mathtt{C}(\Omega : \mathbb{R}^d)$, wobei
$$f(.)^\bullet(t) = \{(x, f(x)^\bullet(t)) : x \in \Omega\}.$$
7. $\forall j : j \in \{1, \ldots, d\} \quad \Rightarrow \quad f_{,j} : \Omega \to \mathtt{C}^1(Z : \mathbb{R}^d)$, wobei
$$f_{,j}(x)(t) = f(.)(t)_{,j}(x).$$

$\star$

a) Setzt man
$$f^\bullet = \{(x, f(x)^\bullet) : x \in \Omega\},$$
so ist $f^\bullet : \Omega \to \mathtt{C}(Z : \mathbb{R}^3)$ das von f induzierte Geschwindigkeitsfeld. Ähnlich ist
$$f^{\bullet\bullet} = \{(x, f(x)^{\bullet\bullet}) : x \in \Omega\},$$
das von f induzierte Beschleunigungsfeld. Es gilt $f^{\bullet\bullet} : \Omega \to {}^{Z}(\mathbb{R}^3)$.

b) Nach dem Satz von Schwarz gilt
$$\forall x, t : x \in \Omega \wedge t \in Z \Rightarrow f(.)^\bullet(t)_{,j}(x) = f_{,j}(x)^\bullet(t).$$

2 Φ inkompressible Ω, Z-Flussfunktion

Definition Φ inkompressible Ω, Z-Flussfunktion

$:\Leftrightarrow$

1. Φ ist $3, \Omega, Z$-Quasi-Flussfunktion.
2. $\forall t, \tau, x : t \in Z \wedge \tau \in Z \wedge x \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad \langle \Phi(x)^\bullet(t) | \Phi_{,1}(x)(t) \times \Phi_{,2}(x)(t) \rangle = \langle \Phi(x)^\bullet(\tau) | \Phi_{,1}(x)(\tau) \times \Phi_{,2}(x)(\tau) \rangle.$$

$\star$

a) Für $x \in \Omega$ ist $\Phi(x)$ die Bewegungskurve des Teilchens mit Index x.

b) Setzt man
$$\Phi[E](t) = \Phi(.)(t)[E],$$
so ist $\Phi[\Omega](t)$ für $t \in Z$ die Flüssigkeitsfläche zur Zeit t. $\Phi(.)(t) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ist eine $\mathtt{C}^1$-Parametrisierung dieser Flüssigkeitsfläche.

c) Ist $0 \neq E \subseteq \Omega$ offen, so ist $\Phi[E](t)$ für $t \in Z$ eine Teilfläche der Flüssigkeitsfläche zur Zeit t. Die Einschränkung $(\Phi(.)(t) \downharpoonright E) : E \to \mathbb{R}^3$ ist eine $\mathtt{C}^1$-Parametrisierung dieer Teilfläche.

d) Ist $0 \neq E \subseteq \Omega$ offen und ist $t \in Z$, so ist
$$\int_E \langle \Phi(x)^\bullet(t) | \Phi_{,1}(x)(t) \times \Phi_{,2}(x)(t) \rangle \; dx$$
der Fluss des von Φ induzierten Geschwindigkeitsfeldes durch die Teilfläche $\Phi[E](t)$. Diese Flüsse sind zeitunabhängig, da für alle $t \in Z$ und $\tau \in Z$,
$$\int_E \langle \Phi(x)^\bullet(t) | \Phi_{,1}(x)(t) \times \Phi_{,2}(x)(t) \rangle \; dx$$
$$= \int_E \langle \Phi(x)^\bullet(\tau) | \Phi_{,1}(x)(\tau) \times \Phi_{,2}(x)(\tau) \rangle \; dx.$$

3 F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre

Definition F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre

$:\Leftrightarrow$

1. κ_1 ist $1, O, I$-Quasi-Flussfunktion.
2. κ_2 ist $1, O, I$-Quasi-Flussfunktion.
3. $F = \{(x, F(x)) : x \in O\}$, wobei
$$\forall x\colon x \in O \quad \Rightarrow \quad F(x) = \{(z, (\kappa_1(x)(z), \kappa_2(x)(z), z)) : z \in I\}.$$

3.1 A priori

Satz

V. F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre.

$\Rightarrow$

a) F ist $3, O, I$-Quasi-Flussfunktion.

b) $\forall x, z : x \in O \wedge z \in I \quad \Rightarrow \quad F(x)(z) = (\kappa_1(x)(z), \kappa_2(x)(z), z)$.

Beweis trivial. $\square$

⋆

Satz

V1. F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre.

V2. $x \in O \wedge z \in I$.

$\Rightarrow$

a) $F(x)^\bullet(z) = (\kappa_1(x)^\bullet(z), \kappa_2(x)^\bullet(z), 1)$.

b) $F_{,1}(x)(z) = (\kappa_{1,1}(x)(z), \kappa_{2,1}(x)(z), 0)$.

c) $F_{,2}(x)(z) = (\kappa_{1,2}(x)(z), \kappa_{2,2}(x)(z), 0)$.

d) $F_{,1}(x)(z) \times F_{,2}(x)(z) = (0, 0, \det(\partial\kappa)(x)(z))$, wobei
$$\det(\partial\kappa) = \{(x, \det(\partial\kappa)(x)) : x \in O\} \text{ mit}$$
$$\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \det(\partial\kappa)(x) = \{(z, \kappa_{1,1}(x)(z) \cdot \kappa_{2,2}(x)(z) - \kappa_{2,1}(x)(z) \cdot \kappa_{1,2}(x)(z)) : z \in I\},$$
so dass $\det(\partial\kappa) : O \to \mathtt{C}^1(I : \mathbb{R})$ und
$$\forall x, z : x \in O \wedge z \in I \quad \Rightarrow \quad \det(\partial\kappa)(x)(z) = \kappa_{1,1}(x)(z) \cdot \kappa_{2,2}(x)(z) - \kappa_{2,1}(x)(z) \cdot \kappa_{1,2}(x)(z).$$

e) $\langle F(x)^{\bullet}(z)|F_{,1}(x)(z)\times F_{,2}(x)(z)\rangle=\det(\partial\kappa)(x)(z)$.

Beweis trivial. $\square$

3.2 F als inkompressible O,I-Flussfunktion

3.2.1 A priori

Satz

V1. F parametrisiert O,I,κ_1,κ_2-Röhre.

V2. F inkompressible O,I-Flussfunktion.

V3. $x\in O\wedge z\in I\wedge\zeta\in I$.

$\Rightarrow$

$$\det(\partial\kappa)(x)(z)=\det(\partial\kappa)(x)(\zeta).$$

Beweis trivial. $\square$

3.2.2 A posteriori

Satz

V1. F parametrisiert O,I,κ_1,κ_2-Röhre.

V2. $\forall x,z,\zeta:x\in O\wedge z\in I\wedge\zeta\in I\quad\Rightarrow\quad\det(\partial\kappa)(x)(z)=\det(\partial\kappa)(x)(\zeta)$.

$\Rightarrow$

F inkompressible O,I-Flussfunktion.

Beweis trivial. $\square$

3.3 $\phi=\{(x,F(x)\circ\xi(x)):x\in\ O\}$

Satz R.1

V1. F parametrisiert O,I,κ_1,κ_2-Röhre.

V2. ξ ist $1,O,Z$-Quasi-Flussfunktion.

V3. $\forall x:x\in O\quad\Rightarrow\quad\mathsf{ran}\,(\xi(x))\subseteq I$.

V4. $\phi=\{(x,F(x)\circ\xi(x)):x\in O\}$.

$\Rightarrow$

`a)` ϕ ist O,Z-Quasi-Flussfunktion.

`b)` $\forall x,t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \phi(x)(t) = (\kappa_1(x)(\xi(x)(t)), \kappa_2(x)(\xi(x)(t)), \xi(x)(t)).$$

`c)` $\forall x,t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \phi(x)^\bullet(t) = \xi(x)^\bullet(t) \cdot (\kappa_1(x)^\bullet(\xi(x)(t)), \kappa_2(x)^\bullet(\xi(x)(t)), 1).$$

`d)` $\forall x,t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad & \phi_{,1}(x)(t)\\ &= (\kappa_{1,1}(x)(\xi(x)(t)) + \kappa_1(x)^\bullet(\xi(x)(t)) \cdot \xi_{,1}(x)(t),\\ &\qquad \kappa_{2,1}(x)(\xi(x)(t)) + \kappa_2(x)^\bullet(\xi(x)(t)) \cdot \xi_{,1}(x)(t), \xi_{,1}(x)(t))\end{aligned}$$

`e)` $\forall x,t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad & \phi_{,2}(x)(t)\\ &= (\kappa_{1,2}(x)(\xi(x)(t)) + \kappa_1(x)^\bullet(\xi(x)(t)) \cdot \xi_{,2}(x)(t),\\ &\qquad \kappa_{2,2}(x)(\xi(x)(t)) + \kappa_2(x)^\bullet(\xi(x)(t)) \cdot \xi_{,2}(x)(t), \xi_{,2}(x)(t))\end{aligned}$$

`f)` $\forall x,t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad & \phi_{,1}(x)(t) \times \phi_{,2}(x)(t)\\ &= (\kappa_{2,1}(x)(\xi(x)(t)) \cdot \xi_{,2}(x)(t) - \kappa_{2,2}(x)(\xi(x)(t)) \cdot \xi_{,1}(x)(t))\\ &\qquad \cdot (1, 0, -\kappa_1(x)^\bullet(\xi(x)(t)))\\ &+ (\kappa_{1,2}(x)(\xi(x)(t)) \cdot \xi_{,1}(x)(t) - \kappa_{2,1}(x)(\xi(x)(t)) \cdot \xi_{,2}(x)(t))\\ &\qquad \cdot (0, 1, -\kappa_2(x)^\bullet(\xi(x)(t)))\\ &\qquad\qquad + \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(t)) \cdot (0,0,1)\end{aligned}$$

`g)` $\forall x,t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \langle \phi(x)^\bullet(t) | \phi_{,1}(x)(t) \times \phi_{,2}(x)(t) \rangle = \xi(x)^\bullet(t) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(t)).$$

Beweis `a)` trivial.

Beweis `b)` trivial.

Beweis `c)` trivial.

Beweis `d)` trivial.

Beweis `e)` trivial.

Beweis `f)` Rechnung.

Beweis `g)` Rechnung.

□

3.3.1 ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion - A priori

Satz

`V1.` F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre.

`V2.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

`V3.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

`V4.` ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

$\Rightarrow$

`a)` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \mathsf{ran}\,(\xi(x)) \subseteq I$.

`b)` $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \wedge \tau \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(t)) = \xi(x)^\bullet(\tau) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(\tau))$$

`c)` $\exists c : c : O \to \mathbb{R} \wedge \forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(t)) = c(x)$$

Beweis trivial. □

⋆

Die Gleichung von `c)` ist für jedes $x \in O$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $\xi(x)$.

⋆

Satz

`V1.` F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre.

`V2.` $\Lambda : O \to \mathtt{C}^1(I : \mathbb{R})$

`V3.` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \Lambda(x)$ Stammfunktion von $\det(\partial\kappa)(x)$ auf I.

`V4.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

`V5.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

`V6.` ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

$\Rightarrow$

`a)` $\exists c, a : c : O \to \mathbb{R} \wedge a : O \to \mathbb{R} \wedge \forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \Lambda(x)(\xi(x)(t)) = a(x) + t \cdot c(x).$$

`b)` $\forall x, t, s : x \in O \wedge t \in Z \wedge s \in Z$

$\Rightarrow$

$$\Lambda(x)(\xi(x)(t)) = \Lambda(x)(\xi(x)(s)) + (t - s) \cdot \xi(x)^\bullet(s) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(s)).$$

<u>Beweis</u> `a)` Via vorheriger Resultate gibt es $c : O \to \mathbb{R}$, so dass $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$ $\Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(t)) = c(x)$. Auf Grund zur Verfügung stehender Glattheit folgt hieraus $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad (\Lambda(x) \circ \xi(x))^\bullet(t) = c(x)$. Somit gibt es via HSDIR $a : O \to \mathbb{R}$, so dass $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow$ $\Lambda(x)(\xi(x)(t)) = a(x) + t \cdot c(x)$.

<u>Beweis</u> `b)` folgt sofort aus `a)`. $\square$

$\star$

Satz

`V1.` F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre.

`V2.` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \det(\partial\kappa)(x)$ auf I.

`V3.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion $\wedge\ \overline{\xi}$ ist $1, O, \overline{Z}$-Quasi-Flussfunktion.

`V4.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\} \wedge \overline{\phi} = \{(x, F(x) \circ \overline{\xi}(x)) : x \in O\}$.

`V5.` ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion
$\wedge\ \overline{\phi}$ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

`V6.` $s \in Z \cap \overline{Z}$.

`V7.` $\xi(.)(s) = \overline{\xi}(.)(s) \wedge \xi(.)^\bullet(s) = \overline{\xi}(.)^\bullet(s)$
oder $\phi(.)(s) = \overline{\phi}(.)(s) \wedge \phi(.)^\bullet(s) = \overline{\phi}(.)^\bullet(s)$.

$\Rightarrow$

`a)` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \xi(x) = \overline{\xi}(x)$ auf $Z \cap \overline{Z}$.

`b)` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \overline{\phi}(x)$ auf $Z \cap \overline{Z}$.

<u>Beweis</u> Aus `V7.` folgt in beiden Fällen $\xi(.)(s) = \overline{\xi}(.)(s) \wedge \xi(.)^\bullet(s) = \overline{\xi}(.)^\bullet(s)$. Für jedes $x \in O$ ist die Funktion $\det(\partial\kappa)(x)$ stetig auf I. Also gibt es eine Funktion $\Lambda : O \to \mathtt{C}^1(I : \mathbb{R})$, so dass für alle $x \in O$ die Funktion $\Lambda(x)$ eine Stammfunktion von $\det(\partial\kappa)(x)$ ist. Via vorheriger Resultate gibt es $c, \overline{c}, a, \overline{a} : O \to \mathbb{R}$, so dass $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad \Lambda(x)(\xi(x)(t)) = a(x) + t \cdot c(x)$ und $\forall x, t : x \in O \wedge t \in \overline{Z} \quad \Rightarrow \quad \Lambda(x)(\overline{\xi}(x)(t)) = \overline{a}(x) + t \cdot \overline{c}(x)$, sowie $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) \cdot \Lambda(x)^\bullet(\xi(x)(t)) = c(x)$ und $\forall x, t : x \in O \wedge t \in \overline{Z} \quad \Rightarrow \quad \overline{\xi}(x)^\bullet(t) \cdot \Lambda(x)^\bullet(\overline{\xi}(x)(t)) = \overline{c}(x)$. Via $s \in Z \cap \overline{Z}$ und `V7.` folgt $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad c(x) = \overline{c}(x)$, sowie $a(x) + s \cdot c(x) = \overline{a}(x) + s \cdot \overline{c}(x)$, woraus sich auch $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad a(x) = \overline{a}(x)$ ergibt. Es folgt $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \cap \overline{Z} \quad \Rightarrow \quad \Lambda(x)(\xi(x)(t)) = \Lambda(x)(\overline{\xi}(x)(t)$. Via `V2.` ist $\Lambda(x)$ für jedes $x \in O$ streng monoton auf I. Es folgt $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \cap \overline{Z} \quad \Rightarrow \quad \xi(x)(t) = \overline{\xi}(x)(t)$. Somit auch $\xi(x) = \overline{\xi}(x)$ auf $Z \cap \overline{Z}$. Per definitionem ϕ und $\overline{\phi}$ ergibt sich hieraus auch $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \overline{\phi}(x)$ auf $Z \cap \overline{Z}$. $\square$

3.3.2 ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion - A posteriori

Satz

`V1.` F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre.

`V2.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

`V3.` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \mathsf{ran}\,(\xi(x)) \subseteq I$

`V4.` $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \wedge \tau \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x)^{\bullet}(t) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(t)) = \xi(x)^{\bullet}(\tau) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(\tau))$$

oder

$c : O \to \mathbb{R} \wedge \forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x)^{\bullet}(t) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(t)) = c(x).$$

`V5.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}.$

$\Rightarrow$

ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

<u>Beweis</u> trivial. □

⋆

Die zweite Gleichung von `V4.` ist für jedes $x \in O$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $\xi(x)$.

⋆

Satz

`V1.` F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre.

`V2.` $\Lambda : O \to \mathtt{C}^1(I : \mathbb{R})$

`V3.` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \Lambda(x)$ Stammfunktion von $\det(\partial\kappa)(x)$ auf I.

`V4.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

`V5.` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \mathsf{ran}\,(\xi(x)) \subseteq I$.

`V6.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

`V7.` $c : O \to \mathbb{R}$ und $a : O \to \mathbb{R}$ und $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$
$$\Rightarrow \quad \Lambda(x)(\xi(x)(t)) = a(x) + t \cdot c(x)$$

oder

$s \in Z \wedge \forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$
$$\Rightarrow \Lambda(x)(\xi(x)(t)) = \Lambda(x)(\xi(x)(s)) + (t - s) \cdot \xi(x)^\bullet(s) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(s)).$$

$\Rightarrow$

ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

Beweis 1.Fall $c : O \to \mathbb{R}$ und $a : O \to \mathbb{R}$ und $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$
$$\Rightarrow \quad \Lambda(x)(\xi(x)(t)) = a(x) + t \cdot c(x).$$

Via zur Verfügung stehender Glattheit folgt $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad (\Lambda(x) \circ \xi(x))^\bullet(t) = c(x)$, so dass auch $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$
$\Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) \cdot \det(\partial\kappa)(x)(\xi(x)(t)) = c(x)$. Hieraus folgt via vorheriger Resultate, dass ϕ eine O, Z-Flussfunktion ist.
2.Fall folgt sofort aus 1.Fall. □

4 F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals

Definition F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals

:⇔

1. $0 \neq O \subseteq \mathbb{R}^2$. O offen.
2. I echtes, reelles Intervall.
3. $\lambda_1 \in \mathtt{C}^2(I : \mathbb{R})$ und $\lambda_2 \in \mathtt{C}^2(I; \mathbb{R})$.
4. $\mathsf{ran}\,\lambda_1 \subseteq \,]0| + \infty[$ und $\mathsf{ran}\,\lambda_2 \subseteq \,]0| + \infty[$.
5. $F = \{(x, F(x)) : x \in O\}$, wobei
$$\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad F(x) = \{(z, (\lambda_1(z) \cdot x_1, \lambda_2(z) \cdot x_2, z)) : z \in I\}$$

4.1 A priori

Satz

V. F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals.

$\Rightarrow$

a) F ist $3, O, I$-Quasi-Flussfunktion.

b) $\forall x, z : x \in O \wedge z \in I \quad \Rightarrow \quad F(x)(z) = (\lambda_1(z) \cdot x_1, \lambda_2(z) \cdot x_2, z)$.

Beweis trivial. □

⋆

Satz

V1. F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals.

V2. $\kappa_1 = \{(x, \kappa_1(x)) : x \in O\}$, wobei
$$\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \kappa_1(x) = \{(z, \lambda_1(z) \cdot x_1) : z \in I\}$$

V3. $\kappa_2 = \{(x, \kappa_2(x)) : x \in O\}$, wobei
$$\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \kappa_2(x) = \{(z, \lambda_2(z) \cdot x_2) : z \in I\}$$

$\Rightarrow$

a) F paramatrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre.

b) $\forall x, z : x \in O \wedge z \in I \quad \Rightarrow \quad \kappa_1(x)(z) = \lambda_1(z) \cdot x_1$.

c) $\forall x, z : x \in O \wedge z \in I \quad \Rightarrow \quad \kappa_2(x)(z) = \lambda_2(z) \cdot x_2$.

d) $\forall x, z : x \in O \wedge z \in I \quad \Rightarrow \quad \det(\partial\kappa)(x)(z) = \lambda_1(z) \cdot \lambda_2(z)$.

Beweis trivial. □

4.2 $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$

4.2.1 ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion - A priori

Satz

`V1.` F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals.

`V2.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

`V3.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

`V4.` ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

$\Rightarrow$

`a)` $\forall x, t, \tau : x \in O \wedge t \in Z \wedge \tau \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(t)) = \xi(x)^\bullet(\tau) \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(\tau))$$

`b)` $\exists c : c \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R}) \wedge \forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(t)) = c(x)$$

<u>Beweis</u> trivial. □

⋆

Die Gleichung von `b)` ist für jedes $x \in O$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $\xi(x)$.

⋆

Satz

`V1.` F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals.

`V2.` Λ Stammfunktion von $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ auf I.

`V3.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

`V4.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

`V5.` ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

$\Rightarrow$

`a)` $\exists c, a : c \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R}) \wedge a \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R}) \wedge \forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \Lambda(\xi(x)(t)) = a(x) + t \cdot c(x).$$

`b)` $\forall x, t, s : x \in O \wedge t \in Z \wedge s \in Z$

$$\Rightarrow \quad \Lambda(\xi(x)(t)) = \Lambda(\xi(x)(s)) + (t - s) \cdot \xi(x)^\bullet(s) \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(s)).$$

Beweis `a)` Via vorheriger Resultate gibt es $c, a : O \to \mathbb{R}$, so dass $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad (\Lambda \circ \xi(.)(t))(x) = \Lambda(\xi(x)(t)) = a(x) + t \cdot c(x)$. Für jedes $t \in Z$ ist $(\Lambda \circ \xi(.)(t))$ stetig differenzierbar. Da Z mindestens zwei verschiedene Elemente hat, folgt hieraus die stetige Differenzierbarkeit von c, a.

Beweis `b)` folgt sofort aus `a)`. $\square$

$\star$

Satz

`V1.` F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals.

`V2.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion $\wedge\ \overline{\xi}$ ist $1, O, \overline{Z}$-Quasi-Flussfunktion.

`V3.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\} \wedge \overline{\phi} = \{(x, F(x) \circ \overline{\xi}(x)) : x \in O\}$.

`V4.` ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion
$\wedge\ \overline{\phi}$ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

`V5.` $s \in Z \cap \overline{Z}$.

`V6.` $\xi(.)(s) = \overline{\xi}(.)(s) \wedge \xi(.)^\bullet(s) = \overline{\xi}(.)^\bullet(s)$
oder $\phi(.)(s) = \overline{\phi}(.)(s) \wedge \phi(.)^\bullet(s) = \overline{\phi}(.)^\bullet(s)$.

$\Rightarrow$

`a)` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \xi(x) = \overline{\xi}(x)$ auf $Z \cap \overline{Z}$.

`b)` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \overline{\phi}(x)$ auf $Z \cap \overline{Z}$.

Beweis F parametrisiert O, I, κ_1, κ_2-Röhre mit $\forall x, z : x \in O \wedge z \in Z \quad \Rightarrow$ $\det(\partial\kappa)(x)(z) = \lambda_1(z) \cdot \lambda_2(z) \in\ ]0| + \infty[$, so dass $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad 0 \neq \det(\partial\kappa)(x)$ auf I. $\square$

$\star$

Satz R.2

`V1.` F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals.

`V2.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

`V3.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

`V4.` ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

$\Rightarrow$

$\exists c : c \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R}) \wedge \forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) = \frac{c(x)}{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(t))}$$

$$\wedge \quad \xi(x)^{\bullet\bullet}(t) = -c^2(x) \cdot \frac{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)^\bullet(\xi(x)(t))}{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)^3(\xi(x)(t))}$$

$$\wedge \quad \phi(x)(t) = (\lambda_1(\xi(x)(t)) \cdot x_1, \lambda_2(\xi(x)(t)), \xi(x)(t))$$

$$\wedge \quad \phi(x)^\bullet(t) = \frac{c(x)}{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(t))} \cdot (\lambda_1^\bullet(\xi(x)(t)) \cdot x_1, \lambda_2^\bullet(\xi(x)(t)) \cdot x_2, 1)$$

$$\wedge \quad \phi(x)^{\bullet\bullet}(t) = -c^2(x) \cdot \frac{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)^\bullet(\xi(x)(t))}{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)^3(\xi(x)(t))} \cdot (\lambda_1^\bullet(\xi(x)(t)) \cdot x_1, \lambda_2^\bullet(\xi(x)(t)) \cdot x_2, 1)$$

$$+ \frac{c^2(x)}{(\lambda_1 \cdot \lambda_2)^2(\xi(x)(t))} \cdot (\lambda_1^{\bullet\bullet}(\xi(x)(t)) \cdot x_1, \lambda_2^{\bullet\bullet}(\xi(x)(t)) \cdot x_2, 0).$$

<u>Beweis</u> Rechnung. $\square$

4.2.2 ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion - A posteriori

Satz

`V1.` F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals.

`V2.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

`V3.` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \mathsf{ran}\,(\xi(x)) \subseteq I$

`V4.` $\forall x, t, \tau : x \in O \wedge t \in Z \wedge \tau \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(t)) = \xi(x)^\bullet(\tau) \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(\tau))$$

oder

$c : O \to \mathbb{R} \wedge \forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x)^\bullet(t) \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(t)) = c(x).$$

`V5.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

$\Rightarrow$

ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

Beweis trivial. $\square$

$\star$

Die zweite Gleichung von `V4.` ist für jedes $x \in O$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $\xi(x)$.

$\star$

Satz

`V1.` F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals.

`V2.` Λ Stammfunktion von $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ auf I.

`V3.` ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

`V4.` $\forall x : x \in O \quad\Rightarrow\quad \mathsf{ran}\,(\xi(x)) \subseteq I.$

`V5.` $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}.$

`V6.` $s \in Z.$

`V7.` $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$
$$\Rightarrow \quad \Lambda(\xi(x)(t)) = \Lambda(\xi(x)(s)) + (t - s) \cdot \xi(x)^\bullet(s) \cdot (\lambda_1 \cdot \lambda_2)(\xi(x)(s)).$$

$\Rightarrow$

ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

Beweis trivial. □

⋆

Satz

V1. F parametrisiert $O, I, \lambda_1, \lambda_2$-Flaschenhals.

V2. Λ Stammfunktion von $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ auf I.

V3. $c \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$ und $a \in \mathtt{C}^1(O : \mathbb{R})$.

V4. Z echtes, reelles Intervall.

V5. $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad a(x) + t \cdot c(x) \in \mathsf{ran}\,\Lambda$.

V6. $\xi = (x, \xi(x)) : x \in O\}$, wobei

$$\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \xi(x) = \{(t, \Lambda^{-1}(a(x) + t \cdot c(x))) : t \in Z\}.$$

V7. $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

$\Rightarrow$

a) $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad \xi(x)(t) = \Lambda^{-1}(a(x) + t \cdot c(x))$ und

$$\Lambda(\xi(x)(t)) = a(x) + t \cdot c(x).$$

b) ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

c) $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \mathsf{ran}\,(\xi(x)) \subseteq I$.

d) ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

Beweis Via VSen ist Λ streng monoton und dreimal stetig differenzierbar mit $0 \neq \Lambda^\bullet$ auf I, so dass $\mathsf{ran}\,\Lambda$ echtes, reelles Intervall und $\Lambda^{-1} \in \mathtt{C}^3(\mathsf{ran}\,\Lambda : I)$ mit $\Lambda^{-1} : \mathsf{ran}\,\Lambda \to I$ bijektiv. Es folgt $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \xi(x) \in \mathtt{C}^3(Z : \mathbb{R})$ und $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad \xi(x)(t) = \Lambda^{-1}(a(x) + t \cdot c(x))$, woraus sich entsprechend der Eigenschaften von Λ auch $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\xi(x)(t)) = a(x) + t \cdot c(x)$ ergibt. a) $\square$

Weiterhin folgt $\xi : O \to \mathtt{C}^3(Z : \mathbb{R})$ und aus der Darstellung von ξ folgt trivialer Weise: ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion. b) $\square$

Für alle $x \in O$ gilt $\mathsf{ran}\,(\xi(x)) \subseteq \mathsf{ran}\,(\Lambda^{-1}) \subseteq I$ c) $\square$

Nun folgt trivialer Weise: ϕ ist O, Z-Flussfunktion. d) $\square$

$\square$

5 F parametrisiert $O, I, \lambda_\epsilon, \lambda_\epsilon$-Flaschenhals

5.1 Vorstellung λ_ϵ

Satz R.3

a) Falls $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und

$$p(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(a)(x) = \frac{1}{a^5} \cdot (3 \cdot (2-a) \cdot (x-a)^2 + a \cdot (a-3) \cdot (x-a) + a^2),$$

dann

$$p(a)(a) = \frac{1}{a^3}, \quad p(a)^{\bullet}(a) = (a-3) \cdot \frac{1}{a^3}, \quad p(a)^{\bullet\bullet}(a) = 6 \cdot (2-a) \cdot \frac{1}{a^5}.$$

b) Falls $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und

$$\gamma(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \gamma(a)(x) = x^3 \cdot p(a)(x),$$

dann

$$\gamma(a)(0) = 0, \quad \gamma(a)^{\bullet}(0) = 0, \quad \gamma(a)^{\bullet\bullet}(0) = 0,$$
$$\gamma(a)(a) = 1, \quad \gamma(a)^{\bullet}(a) = 1, \quad \gamma(a)^{\bullet\bullet}(a) = 0.$$

c) Falls $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $A, b \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \in \,]0|+\infty[$ und

$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_1(x) = A - \epsilon \cdot \gamma(a)(b + x/\epsilon),$$

dann

$$g_1(-\epsilon \cdot b) = A, \quad g_1^{\bullet}(-\epsilon \cdot b) = 0, \quad g_1^{\bullet\bullet}(-\epsilon \cdot b) = 0,$$
$$g_1(-\epsilon \cdot (b-a)) = A - \epsilon, \quad g_1^{\bullet}(-\epsilon \cdot (b-a)) = -1, \quad g_1^{\bullet\bullet}(-\epsilon \cdot (b-a)) = 0.$$

d) Falls $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $C, d \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \in \,]0|+\infty[$ und

$$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_2(x) = C + \epsilon \cdot \gamma(a)(d - x/\epsilon),$$

dann

$$g_2(\epsilon \cdot d) = C, \quad g_2^{\bullet}(\epsilon \cdot d) = 0, \quad g_2^{\bullet\bullet}(\epsilon \cdot d) = 0,$$
$$g_2(\epsilon \cdot (d-a)) = C + \epsilon, \quad g_2^{\bullet}(\epsilon \cdot (d-a)) = -1, \quad g_2^{\bullet\bullet}(\epsilon \cdot (d-a)) = 0.$$

e) $\gamma(1)$ streng wachsend auf $[0|1]$
und $\gamma(1)(0) = 0 \leq \gamma(1) \leq 1 = \gamma(1)(1)$ auf $[0|1]$
und $\gamma(1)^{\bullet}$ streng wachsend auf $[0|3/5]$, $\gamma(1)^{\bullet}$ streng fallend auf $[3/5|1]$
mit

$$\gamma(1)^{\bullet}(3/5) = \frac{189}{125} = \|\gamma(1)^{\bullet} : [0|1]\|_{\infty},$$

und $\gamma(1)^{\bullet}(0) = 0 \leq \gamma(1)^{\bullet} \leq \frac{189}{125} = \gamma(1)^{\bullet}(3/5)$ auf $[0|3/5]$

und $\gamma(1)^{\bullet}(1) = 1 \leq \gamma(1)^{\bullet} \leq \frac{189}{125} = \gamma(1)^{\bullet}(3/5)$ auf $[3/5|1]$

$$\text{und} \quad \gamma(1)(2/5) = \frac{656}{3125} \wedge \gamma(1)^{\bullet}(2/5) = \frac{152}{125} \wedge \gamma(1)^{\bullet\bullet}(2/5) = \frac{72}{25}.$$

`f)` Falls $\epsilon \in \,]0|2[$,

$$\lambda_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \lambda_\epsilon(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 6 - \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2+z}{\epsilon}) & , \quad -2 < z < -2 + \epsilon \\ 4 - z & , \quad -2 + \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon \\ 2 + \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2-z}{\epsilon}) & , \quad 2 - \epsilon < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$$

dann $\lambda_\epsilon \in \mathtt{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ und λ_ϵ fallend, λ_ϵ streng fallend auf $[-2|2]$, $2 \leq \lambda_\epsilon \leq 6$ auf $\mathbb{R}$ und

$$\lambda_\epsilon^\bullet : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \lambda_\epsilon^\bullet(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \leq -2 \\ -\gamma(1)^\bullet(\frac{2+z}{\epsilon}) & , \quad -2 < z < -2 + \epsilon \\ -1 & , \quad -2 + \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon \\ -\gamma(1)^\bullet(\frac{2-z}{\epsilon}) & , \quad 2 - \epsilon < z < 2 \\ 0 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$$

und

$$\lambda_\epsilon^{\bullet\bullet} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \lambda_\epsilon^{\bullet\bullet}(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \leq -2 \\ -\frac{1}{\epsilon} \cdot \gamma(1)^{\bullet\bullet}(\frac{2+z}{\epsilon}) & , \quad -2 < z < -2 + \epsilon \\ 0 & , \quad -2 + \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon} \cdot \gamma(1)^{\bullet\bullet}(\frac{2-z}{\epsilon}) & , \quad 2 - \epsilon < z < 2 \\ 0 & , \quad 2 \leq z \end{cases} .$$

<u>Beweis</u> Rechnung. $\square$

$\star$

5.2 $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$

5.2.1 ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion - A priori

Satz R.4

V1. $\epsilon \in]0|2[$.

V2. $\lambda_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \lambda_\epsilon(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 6 - \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2+z}{\epsilon}) & , \quad -2 < z < -2 + \epsilon \\ 4 - z & , \quad -2 + \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon \\ 2 + \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2-z}{\epsilon}) & , \quad 2 - \epsilon < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

V3. F parametrisiert $O, \mathbb{R}, \lambda_\epsilon, \lambda_\epsilon$-Flaschenhals.

V4. ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

V5. $x_\circ \in O$ und $s \in Z$ und $\sigma \in Z_\epsilon$ und $\alpha \in]0| + \infty[$.

V6. $\xi(x_\circ)(s) = -2$ und $\xi(x_\circ)^\bullet(s) = \alpha$.

V7. $\xi(x_\circ)(\sigma) = 2$.

V8. $\phi = \{(x, F(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

V9. ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

$\Rightarrow$

a) $\forall t : t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x_\circ)^\bullet(t) = \frac{36 \cdot \alpha}{\lambda_\epsilon^2(\xi(x_\circ)(t))}$$

$$\wedge \quad \xi(x_\circ)^{\bullet\bullet}(t) = -2 \cdot (36 \cdot \alpha)^2 \cdot \frac{\lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t))}{\lambda_\epsilon^5(\xi(x_\circ)(t)}$$

$$\wedge \quad \phi(x_\circ)(t) = (\lambda_\epsilon(\xi(x_\circ)(t) \cdot x_{01}, \lambda_\epsilon(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{02}, \xi(x_0)(t))$$

$$\wedge \quad \phi(x_\circ)^\bullet(t) = \frac{36 \cdot \alpha}{\lambda_\epsilon^2(\xi(x_\circ)(t))} \cdot (\lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{01}, \lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{02}, 1)$$

$$\begin{aligned} \wedge \quad \phi(x_\circ)^{\bullet\bullet}(t) = -2 \cdot (36 \cdot \alpha)^2 \cdot \frac{\lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t))}{\lambda_\epsilon^5(\xi(x_\circ)(t))} & \\ \cdot (\lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{01}, \lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{02}, 1) & \\ + (36 \cdot \alpha)^2 \cdot \frac{\lambda_\epsilon^{\bullet\bullet}(\xi(x_\circ)(t))}{\lambda_\epsilon^4(\xi(x_\circ)(t))} \cdot (x_{01}, x_{02}, 0). & \end{aligned}$$

b) $\forall t : t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \alpha \leq \xi(x_\circ)^\bullet(t) \leq 9 \cdot \alpha \quad \wedge \quad 0 \leq \xi(x_\circ)^{\bullet\bullet}(t) \leq \frac{15309}{125} \cdot \alpha^2$$

$$\wedge \quad \|\phi(x_\circ)^\bullet(t)\| \leq 9 \cdot \alpha \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{189}{125}\right)^2 \cdot \|x_\circ\|^2}.$$

c) $\exists t_\epsilon : t_\epsilon \in \,]\, s_\epsilon | \sigma_\epsilon [\, \subseteq Z$

$$\wedge \quad \xi(x_\circ)(t_\epsilon) = -2 + \epsilon \cdot \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \wedge \quad \phi(x_\circ)^{\bullet\bullet}(t_\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1}{\left(6 - \epsilon \cdot \frac{656}{3125}\right)^5} \cdot (36 \cdot \alpha)^2 & \\ \cdot \left(2 \cdot \epsilon \cdot \left(\frac{152}{125}\right)^2 \cdot \left(x_{01}, x_{02}, -\frac{125}{152}\right)\right. & \\ \left. + \frac{72}{25} \cdot \left(6 - \epsilon \cdot \frac{656}{3125}\right) \cdot (x_{01}, x_{02}, 0)\right). & \end{aligned}$$

<u>Beweis</u> Rechnung. □

Der letzte Term ist genau für $0 \neq \|x_0\|$ von der Grössenordnung $\frac{1}{\epsilon}$. Für $0 = \|x_0\|$ ist der Term von der Grössenordnung 1.

Satz R.4*

V1. $\epsilon \in \,]0|2[$.

V2. $\lambda_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \lambda_\epsilon(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 6 - \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2+z}{\epsilon}) & , \quad -2 < z < -2+\epsilon \\ 4 - z & , \quad -2+\epsilon \leq z \leq 2-\epsilon \\ 2 + \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2-z}{\epsilon}) & , \quad 2-\epsilon < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

V3. F_ϵ parametrisiert $O, \mathbb{R}, \lambda_\epsilon, \lambda_\epsilon$-Flaschenhals.

V4. ξ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

V5. $x_\circ \in O$ und $s_\epsilon \in Z$ und $\sigma_\epsilon \in Z$ und $\alpha \in \,]0| +\infty[$.

V6. $\xi(x_\circ)(s_\epsilon) = 2$ und $\xi(x_\circ)^\bullet(s_\epsilon) = -\alpha$.

V7. $\xi(x_\circ)(\sigma_\epsilon) = -2$.

V8. $\phi = \{(x, F_\epsilon(x) \circ \xi(x)) : x \in O\}$.

V9. ϕ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

$\Rightarrow$

a) $\forall t : t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \xi(x_\circ)^\bullet(t) = -\frac{4 \cdot \alpha}{\lambda_\epsilon^2(\xi(x_\circ)(t))}$$

$$\wedge \quad \xi(x_\circ)^{\bullet\bullet}(t) = -2 \cdot (4 \cdot \alpha)^2 \cdot \frac{\lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t))}{\lambda_\epsilon^5(\xi(x_\circ)(t)}$$

$$\wedge \quad \phi(x_\circ)(t) = (\lambda_\epsilon(\xi(x_\circ)(t) \cdot x_{01}, \lambda_\epsilon(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{02}, \xi(x_0)(t))$$

$$\wedge \quad \phi(x_\circ)^\bullet(t) = -\frac{4 \cdot \alpha}{\lambda_\epsilon^2(\xi(x_\circ)(t))} \cdot (\lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{01}, \lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{02}, 1)$$

$$\wedge \quad \phi(x_\circ)^{\bullet\bullet}(t) = -2 \cdot (4 \cdot \alpha)^2 \cdot \frac{\lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t))}{\lambda_\epsilon^5(\xi(x_\circ)(t))} \cdot (\lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{01}, \lambda_\epsilon^\bullet(\xi(x_\circ)(t)) \cdot x_{02}, 1) + (4 \cdot \alpha)^2 \cdot \frac{\lambda_\epsilon^{\bullet\bullet}(\xi(x_\circ)(t))}{\lambda_\epsilon^4(\xi(x_\circ)(t))} \cdot (x_{01}, x_{02}, 0).$$

b) $\forall t : t \in Z$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\alpha}{9} \leq \xi(x_\circ)^\bullet(t) \leq -\alpha \quad \wedge \quad 0 \leq \xi(x_\circ)^{\bullet\bullet}(t) \leq \frac{189}{125} \cdot \alpha^2$$

$$\wedge \quad \|\phi(x_\circ)^\bullet(t)\| \leq \alpha \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{189}{125}\right)^2 \cdot \|x_\circ\|^2}.$$

c) $\exists t_\epsilon : t_\epsilon \in \,]s_\epsilon|\sigma_\epsilon[\, \subseteq Z$

$$\wedge \quad \xi(x_\circ)(t_\epsilon) = 2 - \epsilon \cdot \frac{2}{5}$$

$$\wedge \quad \phi(x_\circ)^{\bullet\bullet}(t_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{1}{\left(2 + \epsilon \cdot \frac{656}{3125}\right)^5} \cdot (4 \cdot \alpha)^2$$

$$\cdot \left(-2 \cdot \epsilon \cdot \left(\frac{152}{125}\right)^2 \cdot \left(x_{01}, x_{02}, -\frac{125}{152}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{72}{25} \cdot \left(2 + \epsilon \cdot \frac{656}{3125}\right) \cdot (x_{01}, x_{02}, 0) \right).$$

<u>Beweis</u> Rechnung*. □

⋆

Der letzte Term ist genau für $0 \neq \|x_0\|$ von der Grössenordnung $\frac{1}{\epsilon}$. Für $0 = \|x_0\|$ ist der Term von der Grössenordnung 1.

5.2.2 Reguläre Grenzwerte $\epsilon \downarrow 0$

$\boxed{\textbf{Satz}}$

`V1.` $\lambda :]0|2[\to \mathtt{C}^2(\mathbb{R} : \mathbb{R})$, wobei

$$\forall \epsilon : \epsilon \in]0|2[\quad \Rightarrow \quad \lambda(\epsilon) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\lambda(\epsilon)(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 6 - \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2+z}{\epsilon}) & , \quad -2 < z < -2 + \epsilon \\ 4 - z & , \quad -2 + \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon \\ 2 + \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2-z}{\epsilon}) & , \quad 2 - \epsilon < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$$

`V2.` $\lambda(0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lambda(0)(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 4 - z & , \quad -2 < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\forall z : z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lambda(\epsilon)(z) = \lambda(0)(z).$$

<u>Beweis</u> trivial. $\square$

$\star$

Satz R.5

`V1.` $\epsilon \in \,]0|2[.$

`V2.` $\lambda_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \lambda_\epsilon(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 6 - \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2+z}{\epsilon}) & , \quad -2 < z < -2+\epsilon \\ 4 - z & , \quad -2+\epsilon \leq z \leq 2-\epsilon \\ 2 + \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2-z}{\epsilon}) & , \quad 2-\epsilon < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

`V3.` $\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \lambda_0(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 4 - z & , \quad -2 < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

`V4.` $\mu_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mu_\epsilon(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z \leq -2 \\ \epsilon & , \quad -2 < z < -2+\epsilon \\ 0 & , \quad -2+\epsilon \leq z \leq 2-\epsilon \\ \epsilon & , \quad 2-\epsilon < z < 2 \\ 0 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

$\Rightarrow$

`a)` $\forall z : z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad |\lambda_\epsilon(z) - \lambda_0(z)| \leq \mu_\epsilon(z) \leq \epsilon.$

`b)` $\forall z, n : z \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad |\lambda_\epsilon^n(z) - \lambda_0^n(z)| \leq n \cdot 6^{-1+n} \cdot \mu_\epsilon(z) \leq n \cdot 6^{-1+n} \cdot \epsilon.$$

<u>Beweis</u> Rechnung. $\square$

$\star$

Satz

`V1.` $\epsilon \in]0|2[$.

`V2.` $\lambda_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda_\epsilon(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 6 - \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2+z}{\epsilon}) & , \quad -2 < z < -2 + \epsilon \\ 4 - z & , \quad -2 + \epsilon \leq z \leq 2 - \epsilon \\ 2 + \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2-z}{\epsilon}) & , \quad 2 - \epsilon < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

`V3.` $\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda_0(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 4 - z & , \quad -2 < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

`V4.` $z_\circ \in \mathbb{R}$.

`V5.` $\Lambda_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Lambda_\epsilon(z) = \displaystyle\int_{z_\circ}^{z} \lambda_\epsilon^2$.

`V6.` $\Lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Lambda_0(z) = \displaystyle\int_{z_\circ}^{z} \lambda_0^2$.

$\Rightarrow$

`a)` $\forall z$: $z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad |\Lambda_\epsilon(z) - \Lambda_0(z)| \leq 24 \cdot \epsilon^2$.

`b)` $\Lambda_\epsilon^{-1} \in \mathtt{C}^3(\mathbb{R} : \mathbb{R})$.

`c)` $\Lambda_0^{-1} \in \mathtt{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$.

`d)` $\forall w : w \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \left|\Lambda_\epsilon^{-1}(w) - \Lambda_0^{-1}(w)\right| \leq 6 \cdot \epsilon^2$.

Beweis `a)` Via vorherigen Satzes für $z \in \mathbb{R}$,

$$|\lambda_\epsilon^2(z) - \lambda_0^2(z)| \leq 12 \cdot \mu_\epsilon(z).$$

Somit für alle $z \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
|\Lambda_\epsilon(z) - \Lambda_0(z)| &= \left| \int_{z_\circ}^{z} \lambda_\epsilon^2 - \int_{z_\circ}^{z} \lambda_0^2 \right| = \left| \int_{z_\circ}^{z} \left(\lambda_\epsilon^2 - \lambda_0^2\right) \right| \\
&\le \left| \int_{z_\circ}^{z} \left|\lambda_\epsilon^2 - \lambda_0^2\right| \right| \le \left| \int_{z_\circ}^{z} 12 \cdot \mu_\epsilon \right| = 12 \cdot \left| \int_{z_\circ}^{z} \mu_\epsilon \right| \\
&\le 12 \cdot \int_{\mathbb{R}} \mu_\epsilon = 12 \cdot \left(\int_{-2}^{-2+\epsilon} \mu_\epsilon + \int_{2-\epsilon}^{2} \mu_\epsilon \right) \le 12 \cdot \left(\int_{-2}^{-2+\epsilon} \epsilon + \int_{2-\epsilon}^{2} \epsilon \right) \\
&= 12 \cdot \left(\epsilon^2 + \epsilon^2\right) = 24 \cdot \epsilon^2.
\end{aligned}
$$

<u>Beweis</u> `b)` trivial.

<u>Beweis</u> `c)` trivial.

<u>Beweis</u> `d)` Mit $a = \Lambda_\epsilon^{-1}(w)$ und $b = \Lambda_0^{-1}(w)$ gilt

$$\Lambda_\epsilon(a) = w = \Lambda_0(b),$$

und es gibt $\theta \in \,]0|1[$, so dass

$$
\begin{aligned}
0 = \Lambda_\epsilon(a) - \Lambda_0(b) &= (\Lambda_\epsilon(a) - \Lambda_\epsilon(b)) + (\lambda_\epsilon(b) - \Lambda_0(b)) \\
&= \Lambda_\epsilon^\bullet(\theta \cdot a + (1-\theta) \cdot b) \cdot (a-b) + (\lambda_\epsilon(b) - \Lambda_0(b)) \\
&= \lambda_\epsilon^2(\theta \cdot a + (1-\theta) \cdot b) \cdot (a-b) + (\lambda_\epsilon(b) - \Lambda_0(b)),
\end{aligned}
$$

woraus wegen $4 = 2^2 \le \lambda_\epsilon^2 \le 6^2 = 36$ auf $\mathbb{R}$, also im Speziellen $0 \ne \Lambda_\epsilon^2$ auf $\mathbb{R}$ die Gleichung

$$a - b = -\frac{\lambda_\epsilon(b) - \Lambda_0(b)}{\lambda_\epsilon^2(\theta \cdot a + (1-\theta) \cdot b)},$$

folgt aus der sich die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\left|\Lambda_\epsilon^{-1}(w) - \Lambda_0^{-1}(w)\right| = |a-b| &= \left| -\frac{\lambda_\epsilon(b) - \Lambda_0(b)}{\lambda_\epsilon^2(\theta \cdot a + (1-\theta) \cdot b)} \right| \\
&= \frac{|\lambda_\epsilon(b) - \Lambda_0(b)|}{\lambda_\epsilon^2(\theta \cdot a + (1-\theta) \cdot b)} \le \frac{24 \cdot \epsilon^2}{4} = 6 \cdot \epsilon^2
\end{aligned}
$$

ergibt. $\square$

$\star$

Satz

V1. $\epsilon \in]0|2[$.

V2. $\lambda_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \lambda_\epsilon(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 6 - \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2+z}{\epsilon}) & , \quad -2 < z < -2+\epsilon \\ 4 - z & , \quad -2+\epsilon \leq z \leq 2-\epsilon \\ 2 + \epsilon \cdot \gamma(1)(\frac{2-z}{\epsilon}) & , \quad 2-\epsilon < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

V3. F parametrisiert $O, \mathbb{R}, \lambda_\epsilon, \lambda_\epsilon$-Flaschenhals.

V4. ξ_ϵ ist $1, O, Z$-Quasi-Flussfunktion.

V5. $\phi_\epsilon = \{(x, F(x) \circ \xi_\epsilon(x)) : x \in O\}$.

V6. ϕ_ϵ inkompressible O, Z-Flussfunktion.

V7. $s \in Z$

V8. $\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \lambda_0(z) = \begin{cases} 6 & , \quad z \leq -2 \\ 4 - z & , \quad -2 < z < 2 \\ 2 & , \quad 2 \leq z \end{cases}$

V9. $\Lambda_0 = \{(x, \Lambda_0(x)) : x \in O\}$, wobei

$$\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \Lambda_0(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \Lambda_0(x)(z) = \int_{\xi_\epsilon(x)(s)}^{z} \lambda_0^2.$$

V10. $\xi_0 = \{(x, \xi_0(x)) : x \in O\}$, wobei

$$\forall x : x \in O$$

$$\Rightarrow \quad \xi_\circ(x) = \left\{(t, \Lambda_0(x)^{-1}((t-s) \cdot \xi_\epsilon(x)^\bullet(s) \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s)) : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

$\Rightarrow$

a) $\Lambda_0 : O \to \mathtt{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$.

b) $\xi_0 : O \to \mathtt{C}^1(\mathbb{R} : \mathbb{R})$.

c) $\forall x, t : x \in O \wedge t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \int_{\xi_\epsilon(x)(s)}^{\xi_0(x)(t)} \lambda_0^2 = (t-s) \cdot \xi_\epsilon(x)^\bullet(s) \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s)).$

d) $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \xi_0(x)(s) = \xi_\epsilon(x)(s).$

`e)` $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \xi_0(x)^\bullet(s) = \xi_\epsilon(x)^\bullet(s)$.

`f)` $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{\xi_\epsilon(x)(s)}^{\xi_\epsilon(x)(t)} \lambda_\epsilon^2 = (t-s) \cdot \xi_\epsilon(x)^\bullet(s) \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s))$.

`g)` $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad |\xi_\epsilon(x)(t) - \xi_0(x)(t)| \leq 6 \cdot \epsilon^2$.

`h)` $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad |\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_0(x)(t))| \leq \epsilon \cdot (1 + 6 \cdot \epsilon)$.

`i)` $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow \quad |\lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0^2(\xi_0(x)(t))| \leq 12 \cdot \epsilon \cdot (1 + 6 \cdot \epsilon)$.

`j)` $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z \quad \Rightarrow$

$$|\xi_\epsilon(x)^\bullet(t) - \xi_0(x)^\bullet(t)| \leq \frac{3}{4} \cdot |\xi_\epsilon(x)^\bullet(s)| \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s) \cdot \epsilon \cdot (1 + 6 \cdot \epsilon).$$

`k)` $\forall x, t : x \in O \wedge t \in Z$

$$\Rightarrow \quad \|\phi_\epsilon(x)(t) - \phi_0(x)(t)\| \leq \epsilon \cdot \sqrt{(1 + 6 \cdot \epsilon)^2 \cdot \|x_0\|^2 + 36 \cdot \epsilon^2},$$

wobei $\phi_0 : O \to \mathtt{C}(\mathbb{R} : \mathbb{R})$, mit
$\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \phi_0(x) = \{(z, (\lambda_0(z) \cdot x_{01}, \lambda_0(z) \cdot x_{02}, \xi_0(x)(z))) : z \in \mathbb{R}\}$.

<u>Beweis</u> `a)` trivial.

<u>Beweis</u> `b)` trivial.

<u>Beweis</u> `c)` trivial.

<u>Beweis</u> `d)` trivial.

<u>Beweis</u> `e)` trivial.

<u>Beweis</u> `f)` trivial.

<u>Beweis</u> `g)` Sei $\Lambda_\epsilon = \{(x, \Lambda_\epsilon(x)) : x \in O\}$ mit $\forall x : x \in O \quad \Rightarrow \quad \Lambda_\epsilon(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Lambda_\epsilon(x)(z) = \displaystyle\int_{\xi_\epsilon(x)(s)}^{z} \lambda_\epsilon^2$. Dann via vorheriger Resultate $\forall x, z : x \in O \wedge w \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$ $|\Lambda_\epsilon(x)^{-1}(w) - \Lambda_0(x)^{-1}(w)| \leq 6 \cdot \epsilon^2$. Via `c)` und `g)` folgt nun $\forall x, t$: $x \in O \wedge t \in Z$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |\xi_\epsilon(x)(t) - \xi_0(x)(t)| & \\ &= \big|\Lambda_\epsilon(x)^{-1}((t-s) \cdot \xi_\epsilon(x)^\bullet(s) \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s))) \\ &\quad -\Lambda_\epsilon(x)^{-1}((t-s) \cdot \xi_\epsilon(x)^\bullet(s) \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s)))\big| \\ &\leq 6 \cdot \epsilon^2. \end{aligned}$$

Beweis `h)` Via vorheriger Resultate und der offensichtlichen globalen Lipschitz-Stetigkeit von λ_0 mit Lipschitz-Konstanter 1 gilt für alle $x \in O$ und $t \in Z$,

$$\begin{aligned}
&|\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_0(x)(t)| \\
&\qquad \leq |\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_\epsilon(x)(t))| + |\lambda_0(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_0(x)(t))| \\
&\qquad\qquad \leq \epsilon + |\xi_\epsilon(x)(t) - \xi_0(x)(t)| \leq \epsilon + 6 \cdot \epsilon^2 = \epsilon \cdot (1 + 6 \cdot \epsilon).
\end{aligned}$$

Beweis `i)` Via `h)` und $2 \leq \lambda_\epsilon, \lambda_0 \leq 6$ auf $\mathbb{R}$ folgt für alle $x \in O$ und $t \in Z$,

$$\begin{aligned}
&|\lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0^2(\xi_0(x)(t)| \\
&\qquad = ||\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_0(x)(t)| \cdot |\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) + \lambda_0(\xi_0(x)(t)| \\
&\qquad\qquad \leq \epsilon \cdot (1 + 6 \cdot \epsilon) \cdot (6 + 6) = 12 \cdot \epsilon \cdot (1 + 6 \cdot \epsilon).
\end{aligned}$$

Beweis `j)` Es gilt für alle $x \in O$ und $t \in Z$,

$$\xi_\epsilon(x)^\bullet(t) \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(t)) = \xi_\epsilon(x)^\bullet(s) \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s)),$$

sowie

$$\xi_0(x)^\bullet(t) \cdot \lambda_0^2(\xi_\epsilon(x)(t)) = \xi_\epsilon(x)^\bullet(s) \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s)),$$

, so dass via `i)` wegen $2 \leq \lambda_\epsilon, \lambda_0 \leq 6$ auf $\mathbb{R}$ für alle $x \in O$ und $t \in Z$,

$$\begin{aligned}
&|\xi_\epsilon(x)^\bullet(t) - \xi_0^\bullet(x)(t)| \\
&\qquad = |\xi_\epsilon(x)^\bullet(s)| \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s)) \cdot \left| \frac{1}{\lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(t))} - \frac{1}{\lambda_0^2(\xi_0(x)(t))} \right| \\
&\qquad = |\xi_\epsilon(x)^\bullet(s)| \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s)) \cdot \frac{|\lambda_0^2(\xi_0(x)(t)) - \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(t))|}{\lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(t)) \cdot \lambda_0^2(\xi_0(x)(t))} \\
&\qquad\quad \leq |\xi_\epsilon(x)^\bullet(s)| \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s)) \cdot \frac{12 \cdot \epsilon \cdot (1 + 6 \cdot \epsilon)}{2^2 \cdot 2^2} \\
&\qquad\qquad = \frac{3}{4} \cdot |\xi_\epsilon(x)^\bullet(s)| \cdot \lambda_\epsilon^2(\xi_\epsilon(x)(s)) \cdot \epsilon \cdot (1 + 6 \cdot \epsilon).
\end{aligned}$$

Beweis `k)` Unter Heranziehung bereits bekannter Resultate gilt für alle $x \in O$ und $t \in Z$,

$$\begin{aligned}
&\|\phi_\epsilon(x)(t) - \phi_0(x)(t)\|^2 \\
&\qquad = \|(\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) \cdot x_{01}, \lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) \cdot x_{02}, \xi_\epsilon(x)(t)) \\
&\qquad\quad - (\lambda_0(\xi_0(x)(t)) \cdot x_{01}, \lambda_0(\xi_0(x)(t)) \cdot x_{02}, \xi_0(x)(t))\|^2 \\
&\qquad = \|((\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_0(x)(t))) \cdot x_{01}, (\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_0(x)(t))) \cdot x_{02}, \\
&\qquad\quad \xi_\epsilon(x)(t) - \xi_0(x)(t))\|^2 \\
&\qquad = (\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_0(x)(t)))^2 \cdot x_{01}^2 + (\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_0(x)(t)))^2 \cdot x_{02}^2 \\
&\qquad\quad + (\xi_\epsilon(x)(t) - \xi_0(x)(t))^2 \\
&\qquad = (\lambda_\epsilon(\xi_\epsilon(x)(t)) - \lambda_0(\xi_0(x)(t)))^2 \cdot \|x_0\|^2 + (\xi_\epsilon(x)(t) - \xi_0(x)(t))^2 \\
&\qquad \leq (\epsilon \cdot (1 + 6 \cdot \epsilon))^2 \cdot \|x_0\|^2 + (6 \cdot \epsilon^2)^2 \\
&\qquad = \epsilon^2 \cdot \left((1 + 6 \cdot \epsilon)^2 \cdot \|x_0\|^2 + 36 \cdot \epsilon^2\right),
\end{aligned}$$

so dass

$$\|\phi_\epsilon(x)(t) - \phi_0(x)(t)\| \leq \epsilon \cdot \sqrt{(1 + 6 \cdot \epsilon)^2 \cdot \|x_0\|^2 + 36 \cdot \epsilon^2}.$$

□

6 Literatur

Hunter Rouse, *Elementary Mechanics of Fluids*, Dover Publications Inc., New York, 1978.