Beispiele chemischer Reaktionskinetik 1

Andreas Unterreiter

30. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 a A + b B $\rightleftharpoons$ c C + d D

1.1 Modellerstellung

Parameter $1 \leq a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 < +\infty$ und $0 \leq A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ < +\infty$.

Reelle Funktionen n_A, n_B, n_C, n_D und r_1, r_2.

Intepretationen a, b, c, d stöchiometrische Koeffizeienten. κ_1, κ_2 Geschwindigkeitskonstanten. A_0, B_0, C_0, D_0 approximative Stoffmengen Substrate A, B, C, D zur Zeit $t = 0$. n_A, n_B, n_C, n_d approximative Stoffmengen Substrate A, B, C, D als Funktion der Zeit $t \geq 0$. r_1, r_2 Reaktionsraten Hin-und Rückreaktion als Funktion der Zeit $t \geq 0$.

Differentialgleichungen $n_A^\bullet = -a \cdot (r_1 - r_2)$, $n_B^\bullet = -b \cdot (r_1 - r_2)$, $n_C^\bullet = c \cdot (r_1 - r_2)$, $n_D^\bullet = d \cdot (r_1 - r_2)$.

Anfangsbedingungen $A_\circ = n_A(0)$. $B_\circ = n_B(0)$. $C_\circ = n_C(0)$. $D_\circ = n_D(0)$.

Algebraische Gleichungen $r_1 = \kappa_1 \cdot n_A^a \cdot n_B^b$. $r_2 = \kappa_2 \cdot n_C^c \cdot n_D^d$.

Erwartung 1 Definitionsbereich von n_A, n_B, n_C, n_D gleich $[0| + \infty[$.

Erwartung 2 n_A, n_B, n_C, n_D stets≥ 0.

Erwartung 3 $0 \leq \tilde{A} = \lim_{t \uparrow +\infty} n_A(t) \in \mathbb{R}$. $0 \leq \tilde{B} = \lim_{t \uparrow +\infty} n_B(t) \in \mathbb{R}$. $0 \leq \tilde{C} = \lim_{t \uparrow +\infty} n_C(t) \in \mathbb{R}$. $0 \leq \tilde{D} = \lim_{t \uparrow +\infty} n_D(t) \in \mathbb{R}$.

Erwartung 4 $\kappa_1 \cdot \tilde{A}^a \cdot \tilde{B}^b = \kappa_2 \cdot \tilde{C}^c \cdot \tilde{D}^d$.

Erwartung 5 Falls $\overline{I}$ echtes reelles Intervall mit $0 \in \overline{I} \subseteq [0| + \infty[$ und $\overline{n_A}, \overline{n_b}, \overline{n_C}, \overline{n_D} : [0| + \infty[\to \mathbb{R}$ und $\overline{n_A}^\bullet = -a \cdot (\overline{r_1} - \overline{r_2}), \overline{n_B}^\bullet = -b \cdot (\overline{r_1} - \overline{r_2}), \overline{n_C}^\bullet = c \cdot (\overline{r_1} - \overline{r_2}), \overline{n_D}^\bullet = d \cdot (\overline{r_1} - \overline{r_2})$ und $\overline{r_1} = \kappa_1 \cdot \overline{n_A}^a \cdot \overline{n_B}^b$ und $\overline{r_2} = \kappa_2 \cdot \overline{n_C}^c \cdot \overline{n_D}^d$ und $A_\circ = \overline{n_A}(0), B_\circ = \overline{n_B}(0), C_\circ = \overline{n_C}(0), D_\circ = \overline{n_D}(0)$, dann $\overline{n_A} = n_A, \overline{n_B} = n_B, \overline{n_C} = n_C, \overline{n_D} = n_D$ auf $\overline{I}$.

1.2 Modell-ODE und deren Transformation. A priori

Satz

`V1.` $1 \leq a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $0 \leq A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ \in \mathbb{R}$.

`V2.` I echtes reelles Intervall und $0 \in I \subseteq [0| + \infty[$.

`V3.` $n_A, n_B, n_C, n_D : I \to \mathbb{R}$ und n_A, n_B, n_C, n_D differenzierbar.

`V4.` $r_1, r_2 : I \to \mathbb{R}$
und $\forall t : t \in I \Rightarrow r_1(t) = \kappa_1 \cdot n_A^a(t) \cdot n_B^b(t)$ und $r_2(t) = \kappa_2 \cdot n_C^c(t) \cdot n_D^d(t)$.

`V5.` $$\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n_A^\bullet(t) &= -a \cdot (r_1(t) - r_2(t) \\ n_B^\bullet(t) &= -b \cdot (r_1(t) - r_2(t)) \\ n_C^\bullet(t) &= c \cdot (r_1(t) - r_2(t)) \\ n_D^\bullet(t) &= d \cdot (r_1(t) - r_2(t)) \end{cases}.$$

`V6.` $A_\circ = n_A(0)$ und $B_\circ = n_B(0)$ und $C_\circ = n_C(0)$ und $D_\circ = n_D(0)$.

$\Rightarrow$

`a)` Falls $\Delta = \left\{ \left(t, \int_0^t (r_1. - .r_2) \right) : t \in I \right\}$, dann $\Delta \in \mathtt{C}^1(I : \mathbb{R})$ und $0 = \Delta(0)$

$$\text{und } \forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n_A(t) &= A_\circ - a \cdot \Delta(t) \\ n_B(t) &= B_\circ - b \cdot \Delta(t) \\ n_C(t) &= C_\circ + c \cdot \Delta(t) \\ n_D(t) &= D_\circ + d \cdot \Delta(t) \end{cases},$$

und $\forall t : t \in I \Rightarrow \Delta^\bullet(t) = p(\Delta(t))$, wobei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot x)^a \cdot (B_\circ - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot x)^c \cdot (D_\circ + d \cdot x)^d,$$

und $\Delta \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R})$.

`b)` $n_A, n_B, n_C, n_D \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R})$.

<u>Beweis</u> `a)` Da n_A, n_B, n_C, n_D differenzierbar sind, sind sie stetig. Da $1 \leq a, b, c, d \in \mathbb{N}$ gilt, sind r_1, r_2 stetig. Somit ist $r_1. - .r_2$ stetig und damit ist Δ Stammfunktion von $r_1. - .r_2$ auf I. Offenbar ist Δ stetig differenzierbar und es gilt $0 = \Delta(0)$. Für

alle $t \in I$ gilt zunächst $\Delta^\bullet(t) = r_1(t) - r_2(t)$ und somit

$$\begin{cases} n_A^\bullet(t) &= -a \cdot (r_1(t) - r_2(t) = -a \cdot \Delta^\bullet(t) \\ n_B^\bullet(t) &= -b \cdot (r_1(t) - r_2(t)) = -b \cdot \Delta^\bullet(t) \\ n_C^\bullet(t) &= c \cdot (r_1(t) - r_2(t)) = c \cdot \Delta^\bullet(t) \\ n_D^\bullet(t) &= d \cdot (r_1(t) - r_2(t)) = d \cdot \Delta^\bullet(t) \end{cases},$$

woraus via `V6.` und per definitionem Δ,

$$\begin{cases} n_A(t) - A_\circ &= -a \cdot \Delta(t) \\ n_B(t) - B_\circ &= -b \cdot \Delta(t) \\ n_C(t) - C_\circ &= c \cdot \Delta(t) \\ n_D(t) - D_\circ &= d \cdot \Delta(t), \end{cases},$$

und hieraus

$$\begin{cases} n_A(t) &= A_\circ - a \cdot \Delta(t) \\ n_B(t) &= B_\circ - b \cdot \Delta(t) \\ n_C(t) &= C_\circ + c \cdot \Delta(t) \\ n_D(t) &= D_\circ + d \cdot \Delta(t) \end{cases},$$

folgt. Es gilt hiermit für alle $t \in I$,

$$\Delta^\bullet(t) = r_1(t) - r_2(t) = \kappa_1 \cdot n_A^a(t) \cdot n_B^b(t) - \kappa_2 \cdot n_C^c(t) \cdot n_D^d(t)$$
$$= \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot \Delta(t))^a \cdot (B_\circ - b \cdot \Delta(t))^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot \Delta(t))^c \cdot (D_\circ + d \cdot \Delta(t))^d$$
$$= p(\Delta(t)).$$

Wie bereits bewiesen gilt $\Delta \in \mathtt{C}^1(I : \mathbb{R})$. Falls $\Delta \in \mathtt{C}^\nu(I : \mathbb{R})$ mit $\nu \in \mathbb{N}$, dann, da das Polynom p unendlich oft differenzierbar ist, $p \circ \Delta \in \mathtt{C}^\nu(I : \mathbb{R})$. Nun via $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ auf I: $\Delta \in \mathtt{C}^{1+\nu}(I : \mathbb{R})$. Mit vollständiger Induktion ergibt sich $\Delta \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R})$.

Beweis `b)` Via `a)` evident. $\square$

1.3 Modell-ODE und deren Transformation. A posteriori

Satz

`V1.` $1 \le a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $0 \le A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ \in \mathbb{R}$.

`V2.` $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot x)^a \cdot (B_\circ - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot x)^c \cdot (D_\circ + d \cdot x)^d.$$

`V3.` I echtes reelles Intervall und $0 \in I \subseteq [0| + \infty[$.

`V4.` $\Delta : I \to \mathbb{R}$ und Δ differenzierbar.

`V5.` $0 = \Delta(0)$ und $\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \Delta^\bullet(t) = p(\Delta(t))$.

$\Rightarrow$

`a)` $\Delta \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R})$.

`b)` Falls $n_A, n_B, n_C, n_D : I \to \mathbb{R}$

$$\text{und } \forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n_A(t) &= A_\circ - a \cdot \Delta(t) \\ n_B(t) &= B_\circ - b \cdot \Delta(t) \\ n_C(t) &= C_\circ + c \cdot \Delta(t) \\ n_D(t) &= D_\circ + d \cdot \Delta(t) \end{cases},$$

dann $n_A, n_B, n_C, n_D \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R})$

und $A_\circ = n_A(0)$ und $B_\circ = n_B(0)$ und $C_\circ = n_C(0)$ und $D_\circ = n_D(0)$

$$\text{und } \forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n_A^\bullet(t) &= -a \cdot (r_1(t) - r_2(t) \\ n_B^\bullet(t) &= -b \cdot (r_1(t) - r_2(t)) \\ n_C^\bullet(t) &= c \cdot (r_1(t) - r_2(t)) \\ n_D^\bullet(t) &= d \cdot (r_1(t) - r_2(t)) \end{cases},$$

wobei $r_1, r_2 : I \to \mathbb{R}$ und $r_1(t) = \kappa_1 \cdot n_A^a(t) \cdot n_B^b(t)$ und $r_2(t) = \kappa_2 \cdot n_C^c(t) \cdot n_D^d(t)$.

<u>Beweis</u> `a)` Mit vollständiger Induktion. Da Δ differenzierbar ist, ist Δ stetig. Es folgt $\Delta \in \mathtt{C}^0(I : \mathbb{R})$. Falls $\Delta \in \mathtt{C}^\nu(I : \mathbb{R})$ mit $\nu \in \mathbb{N}$, dann, da das Polynom p unendlich oft differenzierbar ist, $p \circ \Delta \in \mathtt{C}^\nu(I : \mathbb{R})$. Nun via $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ auf I: $\Delta \in \mathtt{C}^{1+\nu}(I : \mathbb{R})$.

<u>Beweis</u> `b)` Via `a)` ist $n_A, n_B, n_C, n_D \in \mathtt{C}^{+\infty}(I : \mathbb{R})$ per definitionem evident. Nach Voraussetzung gilt $0 = \Delta(0)$. Per definitionem folgt $A_\circ = n_A(0)$ und $B_\circ = n_B(0)$ und $C_\circ = n_C(0)$ und $D_\circ = n_D(0)$. Per definitionem gilt für alle $t \in I$ zunächst

$$\begin{aligned} &p(\Delta(t)) \\ &= \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot \Delta(t))^a \cdot (B_\circ - b \cdot \Delta(t))^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot \Delta(t))^c \cdot (D_\circ + d \cdot \Delta(t))^d \\ &\qquad = \kappa_1 \cdot n_A^a(t) \cdot n_B^b(t) - \kappa_2 \cdot n_C^c(t) \cdot n_D^d(t) = r_1(t) - r_2(t), \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} n_A^\bullet(t) &= -a \cdot \Delta^\bullet(t) = -a \cdot p(\Delta(t)) = -a \cdot (r_1(t) - r_2(t)), \\ n_B^\bullet(t) &= -b \cdot \Delta^\bullet(t) = -b \cdot p(\Delta(t)) = -b \cdot (r_1(t) - r_2(t)), \\ n_C^\bullet(t) &= c \cdot \Delta^\bullet(t) = c \cdot p(\Delta(t)) = c \cdot (r_1(t) - r_2(t)), \\ n_D^\bullet(t) &= d \cdot \Delta^\bullet(t) = d \cdot p(\Delta(t)) = d \cdot (r_1(t) - r_2(t)). \end{aligned}$$

□

1.4 $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ und ODE-Theorie. Existenz

Satz ODE/E

`V1.` $1 \le a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $0 \le A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ \in \mathbb{R}$.

`V2.` $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot x)^a \cdot (B_\circ - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot x)^c \cdot (D_\circ \cdot x)^d.$$

$\Rightarrow \quad \exists T, \Delta$:

`a)` $T \in]0| + \infty]$ und $\Delta \in \mathtt{C}^1([0|T[: \mathbb{R})$.

`b)` $0 = \Delta(0)$ und $\forall t : t \in [0|T[\quad \Rightarrow \quad \Delta^\bullet(t) = p(\Delta(t))$.

`c)` $T = +\infty$ oder $(T < +\infty$ und $(\lim\limits_{t \uparrow T} \Delta(t) = +\infty) \vee (\lim\limits_{t \uparrow T} \Delta(t) = -\infty))$.

`d)` Falls $0 = p(0)$, dann $T = +\infty$ und $\Delta = 0^{on} [0| + \infty[$.

`e)` Falls $0 < p(0)$ und

$$J = \bigcup \{\omega : 0 \in \omega \wedge \omega \text{ offenes reelles Intervall} \wedge 0 < p \text{ auf } \omega\},$$

dann ist J ein offenes reelles Intervall und $0 < p$ auf J und $0 < \Delta < \sup J$ auf $]0|T[$ und $\sup J = \lim\limits_{t \uparrow T} \Delta(t)$ und $0 < \Delta^\bullet$ auf $[0|T[$.

`f)` Falls $p(0) < 0$ und

$$J = \bigcup \{\omega : 0 \in \omega \wedge \omega \text{ offenes reelles Intervall} \wedge p < 0 \text{ auf } \omega\},$$

dann ist J ein offenes reelles Intervall und $p < 0$ auf J und $\inf J < \Delta < 0$ auf $]0|T[$ und $\inf J = \lim\limits_{t \uparrow T} \Delta(t)$ und $\Delta^\bullet < 0$ auf $[0|T[$.

`g)` Falls $0 \neq p(0)$ und

$$J = \bigcup \{\omega : 0 \in \omega \wedge \omega \text{ offenes reelles Intervall} \wedge 0 \neq p \text{ auf } \omega\},$$

und Λ ist Stammfunkton von $\dfrac{1}{p(.)}$ auf J mit $0 = \Lambda(0)$,
dann ist J offenes reelles Intervall und $\Delta = (\Lambda^{-1} \downharpoonleft [0| + \infty[)$
und $T = \sup(\mathsf{ran}\, \Lambda)$ und $\forall t : t \in [0|T[\quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_0^{\Delta(t)} \frac{dx}{p(x)} = t$.

<u>Beweis</u> Elementare ODE-Theorie. $\square$

Satz

`V1.` $1 \leq a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $0 \leq A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ \in \mathbb{R}$.

`V2.` $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot x)^a \cdot (B_\circ - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot x)^c \cdot (D_\circ \cdot x)^d.$$

`V3.` T wie in **Satz ODE/E** mit $T \in \,]0|+\infty]$.

`V4.` Δ wie in **Satz ODE/E** mit $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ und $0 = \Delta(0)$.

$\Rightarrow$

`a)` Falls $0 < p(0)$, dann $T = +\infty$
und Δ streng wachsend und $0 < \Delta^\bullet$ auf $[0|+\infty[$

und

$$0 < \tilde{\Delta} = \inf\{\omega : 0 < \omega \wedge 0 = p(\omega)\} < \min\left\{\frac{A_\circ}{a}, \frac{B_\circ}{b}\right\},$$

und $0 < \Delta < \tilde{\Delta}$ auf $]0|+\infty[$ und $\tilde{\Delta} = \lim_{t \uparrow +\infty} \Delta(t)$ und $0 = p(\tilde{\Delta})$ und $0 = \lim_{t \uparrow +\infty} \Delta^\bullet(t)$.

`b)` Falls $p(0) < 0$, dann $T = +\infty$
und Δ streng fallend und $\Delta^\bullet < 0$ auf $[0|+\infty[$

und

$$-\min\left\{\frac{C_\circ}{c}, \frac{D_\circ}{d}\right\} < \tilde{\Delta} = \sup\{\omega : \omega < 0 \wedge 0 = p(\omega)\} < 0,$$

und $\tilde{\Delta} < \Delta < 0$ auf $]0|+\infty[$ und $\tilde{\Delta} = \lim_{t \uparrow +\infty} \Delta(t)$ und $0 = p(\tilde{\Delta})$ und $0 = \lim_{t \uparrow +\infty} \Delta^\bullet(t)$.

Beweis `a)` Via **Satz ODE/E** gilt $T \in \,]0|+\infty]$ und $\Delta \in \mathtt{C}^1([0|T[\,:\mathbb{R})$ und $0 < \Delta^\bullet$ auf $[0|T[$, so dass Δ streng wachsend ist, und $0 < \Delta$ auf $]0|T[$ gilt. Mit

$$J = \bigcup\{\omega : 0 \in \omega \wedge \omega \text{ offenes reelles Intervall} \wedge 0 < p \text{ auf } \omega\},$$

gilt via **Satz ODE/E** überdies $\Delta < \sup J$ auf $[0|T[$. Aus $0 < p(0)$ folgt

$$0 < \kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b - \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d,$$

so dass wegen der Nicht-Negativität der involvierten Terme

$$0 < A_\circ, B_\circ,$$

und damit auch

$$0 < \eta = \min\left\{\frac{A_\circ}{a}, \frac{B_\circ}{b}\right\},$$

folgt. Es gilt via Nicht-Negativität von $\kappa_2, C_\circ, D_\circ, c, d$,

$$\begin{aligned} p(\eta) = \kappa_1(A_\circ - a\cdot\eta)^a \cdot (B_\circ - b\cdot\eta)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c\cdot\eta)^c \cdot (D_\circ + d\cdot\eta)^d \\ = 0 - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c\cdot\eta)^c \cdot (D_\circ + d\cdot\eta)^d < 0, \end{aligned}$$

so dass das Polynom p wegen $0 < p(0)$ und $0 < \eta$ im Intervall $]0|\eta[$ (mindestens) eine Nullstelle $x^* \in\,]0|\eta[$ hat. Somit ist einerseits

$$\{\omega : 0 < \omega \wedge 0 = p(\omega)\},$$

nichtleer und

$$\tilde{\Delta} = \inf\{\omega : 0 < \omega \wedge 0 = p(\omega)\} \in [0|x^*] \subseteq [0|\eta[,$$

woraus, da p endlich viele Nullstellen hat und $0 < p(0)$ gilt, $0 < \tilde{\Delta} < \eta$ und $0 = p(\tilde{\Delta})$ folgt und darüber hinaus

$$J \cap\,]0| + \infty[\, =\,]0|\tilde{\Delta}[,$$

gelten muss, so dass $\sup J = \tilde{\Delta}$ folgt und damit $0 < \Delta < \tilde{\Delta}$ auf $]0|T[$ gilt, woraus via **Satz ODE/E** die Aussage $T = +\infty$ folgt. Weiterhin gilt via **Satz ODE/E**, $\lim\limits_{t\uparrow+\infty} \Delta(t) = \sup J = \tilde{\Delta}$. Im Speziellen folgt via der Stetigkeit von p,

$$0 = p(\tilde{\Delta}) = p\left(\lim_{t\uparrow+\infty} \Delta(t)\right) = \lim_{t\uparrow+\infty} p(\Delta(t)) = \lim_{t\uparrow+\infty} \Delta^\bullet(t).$$

<u>Beweis</u> `b*)` Via **Satz ODE/E** gilt $T \in\,]0| + \infty]$ und $\Delta \in \mathtt{C}^1([0|T[\, : \mathbb{R})$ und $\Delta^\bullet < 0$ auf $[0|T[$, so dass Δ streng fallend ist, und $\Delta < 0$ auf $]0|T[$ gilt. Mit

$$J = \bigcup\{\omega : 0 \in \omega \wedge \omega \text{ offenes reelles Intervall} \wedge p < 0 \text{ auf } \omega\},$$

gilt via **Satz ODE/E** überdies $\inf J < \Delta$ auf $[0|T[$. Aus $p(0) < 0$ folgt

$$0 > \kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b - \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d,$$

so dass wegen der Nicht-Negativität der involvierten Terme

$$0 < C_\circ, D_\circ,$$

und damit auch

$$0 < \eta = \min\left\{\frac{C_\circ}{c}, \frac{D_\circ}{d}\right\},$$

folgt. Es gilt via Nicht-Negativität von $\kappa_2, C_\circ, D_\circ, c, d$,

$$\begin{aligned} p(-\eta) &= \kappa_1(A_\circ + a\cdot\eta)^a \cdot (B_\circ + b\cdot\eta)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ - c\cdot\eta)^c \cdot (D_\circ - d\cdot\eta)^d \\ &= \kappa_1 \cdot (A_\circ + a\cdot\eta)^a \cdot (B_\circ + b\cdot\eta)^b - 0 > 0, \end{aligned}$$

so dass das Polynom p wegen $p(0) < 0$ und $-\eta < 0$ im Intervall $\left]-\eta|0\right[$ (mindestens) eine Nullstelle $x^* \in \left]-\eta|0\right[$ hat. Somit ist einerseits

$$\{\omega : \omega < 0 \wedge 0 = p(\omega)\},$$

nichtleer und

$$\tilde{\Delta} = \sup\{\omega : \omega < 0 \wedge 0 = p(\omega)\} \in [x^*|0] \subseteq \left]-\eta|0\right],$$

woraus, da p endlich viele Nullstellen hat und $p(0) < 0$ gilt, $-\eta < \tilde{\Delta} < 0$ und $0 = p(\tilde{\Delta})$ folgt und darüber hinaus

$$J \cap \left]-\infty|0\right[= \left]\tilde{\Delta}|0\right[,$$

gelten muss, so dass $\inf J = \tilde{\Delta}$ folgt und damit $\tilde{\Delta} < \Delta < 0$ auf $\left]0|T\right[$ gilt, woraus via **Satz ODE/E** die Aussage $T = +\infty$ folgt. Weiterhin gilt via **Satz ODE/E**, $\lim\limits_{t\uparrow+\infty} \Delta(t) = \inf J = \tilde{\Delta}$. Im Speziellen folgt via der Stetigkeit von p,

$$0 = p(\tilde{\Delta}) = p\left(\lim_{t\uparrow+\infty} \Delta(t)\right) = \lim_{t\uparrow+\infty} p(\Delta(t)) = \lim_{t\uparrow+\in\infty} \Delta^\bullet(t).$$

1.5 Modell-ODE und Δ. A posteriori. Existenz

Satz

V1. $1 \leq a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $0 \leq A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ \in \mathbb{R}$.

V2. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot x)^a \cdot (B_\circ - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot x)^c \cdot (D_\circ + d \cdot x)^d.$$

V3. T wie in **Satz ODE/E** mit $T \in \,]0| + \infty]$.

V4. Δ wie in **Satz ODE/E** mit $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ und $0 = \Delta(0)$.

V5. $n_A, n_B, n_C, n_D : [0|T[\, \to \mathbb{R}$, $\begin{cases} n_A(t) & = & A_\circ - a \cdot \Delta(t) \\ n_B(t) & = & B_\circ - b \cdot \Delta(t) \\ n_C(t) & = & C_\circ + c \cdot \Delta(t) \\ n_D(t) & = & D_\circ + d \cdot \Delta(t) \end{cases}$.

$\Rightarrow$

a) $T = +\infty$ und $n_A, n_B, n_C, n_D \in \mathtt{C}^{+\infty}([0| + \infty[\, : \mathbb{R})$.

b) $A_\circ = n_A(0)$ und $B_\circ = n_B(0)$ und $C_\circ = n_C(0)$ und $D_\circ = n_D(0)$.

c) $\forall t : t \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n_A^\bullet(t) & = & -a \cdot (r_1(t) - r_2(t) \\ n_B^\bullet(t) & = & -b \cdot (r_1(t) - r_2(t)) \\ n_C^\bullet(t) & = & c \cdot (r_1(t) - r_2(t)) \\ n_D^\bullet(t) & = & d \cdot (r_1(t) - r_2(t)) \end{cases}$,

wobei $r_1, r_2 : [0| + \infty[\, \to \mathbb{R}$
und $r_1(t) = \kappa_1 \cdot n_A^a(t) \cdot n_B^b(t)$ und $r_2(t) = \kappa_2 \cdot n_C^c(t) \cdot n_D^d(t)$.

d) Falls $\kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b = \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d$,
dann $\forall t : t \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad n_A(t) = A_\circ$ und $n_B(t) = B_\circ$
und $n_C(t) = C_\circ$ und $n_D(t) = D_\circ$.

e) Falls $\kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b > \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d$.
dann $n_A^\bullet, n_B^\bullet < 0 < n_C^\bullet, n_D^\bullet$ auf $[0| + \infty[$,
und n_A, n_B streng fallend auf $[0| + \infty[$
und n_C, n_D streng wachsend auf $[0| + \infty[$
und $\tilde{A} < n_A < A_\circ$ und $\tilde{B} < n_B < B_\circ$ und $C_\circ < n_C < \tilde{C}$ und $D_\circ < n_D < \tilde{D}$
auf $]0| + \infty[$,
wobei $0 < \tilde{A} = A_\circ - a \cdot \tilde{\Delta}$ und $0 < \tilde{B} = B_\circ - b \cdot \tilde{\Delta}$

und $C_\circ < \tilde{C} = C_\circ + c \cdot \tilde{\Delta}$ und $D_\circ < \tilde{D} = D_\circ + d \cdot \tilde{\Delta}$,

und $\tilde{\Delta}$ mit $0 < \tilde{\Delta} = \inf\{\omega : 0 < \omega \wedge 0 = p(\omega)\} < \min\left\{\frac{A_\circ}{a}, \frac{B_\circ}{b}\right\}$

die kleinste positive Nullstelle von p ist

und $\tilde{A} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_A(t)$ und $\tilde{B} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_B(t)$

und $\tilde{C} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_C(t)$ und $\tilde{D} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_D(t)$,

und $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} n_A^\bullet(t)$ und $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} n_B^\bullet(t)$

und $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} n_C^\bullet(t)$ und $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} n_D^\bullet(t)$.

`f)` Falls $\kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b < \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d$.

dann $n_C^\bullet, n_D^\bullet < 0 < n_A^\bullet, n_B^\bullet$ auf $[0| + \infty[$,

und n_A, n_B streng wachsend auf $[0| + \infty[$

und n_C, n_D streng fallend auf $[0| + \infty[$

und $A_\circ < n_A < \tilde{A}$ und $B_\circ < n_B < \tilde{B}$ und $\tilde{C} < n_C < C_\circ$ und $\tilde{D} < n_D < D_\circ$

auf $]0| + \infty[$,

wobei $A_\circ < \tilde{A} = A_\circ - a \cdot \tilde{\Delta}$ und $B_\circ < \tilde{B} = B_\circ - b \cdot \tilde{\Delta}$

und $0 < \tilde{C} = C_\circ + c \cdot \tilde{\Delta}$ und $0 < \tilde{D} = D_\circ + d \cdot \tilde{\Delta}$,

und $\tilde{\Delta}$ mit $-\min\left\{\frac{C_\circ}{c}, \frac{D_\circ}{d}\right\} < \tilde{\Delta} = \sup\{\omega : \omega < 0 \wedge 0 = p(\omega)\} < 0$

die grösste negative Nullstelle von p ist

und $\tilde{A} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_A(t)$ und $\tilde{B} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_B(t)$

und $\tilde{C} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_C(t)$ und $\tilde{D} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_D(t)$,

und $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} n_A^\bullet(t)$ und $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} n_B^\bullet(t)$

und $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} n_C^\bullet(t)$ und $0 = \lim_{t\uparrow+\infty} n_D^\bullet(t)$.

`g)` $0 \leq \tilde{A} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_A(t) \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \tilde{B} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_B(t) \in \mathbb{R}$

und $0 \leq \tilde{C} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_C(t) \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \tilde{D} = \lim_{t\uparrow+\infty} n_D(t) \in \mathbb{R}$

und

$$\kappa_1 \cdot \tilde{A}^a \cdot \tilde{B}^b = \kappa_2 \cdot \tilde{C}^c \cdot \tilde{D}^d.$$

`h)` Falls $\kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b \neq \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d$, dann $0 < \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D} \in \mathbb{R}$.

Beweis `a), b), c)` Via $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ **und ODE-Theorie. Existenz** gilt $0 = \Delta(0)$ und $\Delta \in \mathtt{C}^1([0| + \infty[: \mathbb{R})$ und $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ auf $[0|T[$ und $T = +\infty$. Die Aussage folgt nun via **Modell-ODE und deren Transformation. A posteriori**.

<u>Beweis</u> `d)` Es folgt

$$p(0) = \kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b - \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d = 0,$$

so dass via **Satz ODE/E**, $\Delta = 0^{on} [0| + \infty[$. Es folgt per definitionem für alle $t \in [0| + \infty[$,

$$\begin{aligned} n_A(t) &= A_\circ - a \cdot \Delta(t) = A_\circ - a \cdot 0 = A_\circ, \\ n_B(t) &= B_\circ - b \cdot \Delta(t) = B_\circ - b \cdot 0 = B_\circ, \\ n_C(t) &= C_\circ + c \cdot \Delta(t) = C_\circ + c \cdot 0 = C_\circ, \\ n_D(t) &= D_\circ + d \cdot \Delta(t) = D_\circ + d \cdot 0 = D_\circ. \end{aligned}$$

<u>Beweis</u> `e)` Es folgt

$$0 < \kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b - \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d = p(0),$$

so dass nun via $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ **und ODE-Theorie. Existenz** folgt, dass Δ streng wachsend ist, dass $0 < \Delta^\bullet$ auf $[0| + \infty[$ gilt, dass

$$0 < \tilde{\Delta} = \inf\{\omega : 0 < \omega \wedge 0 = p(\omega)\} < \min\left\{\frac{A_\circ}{a}, \frac{B_\circ}{b}\right\},$$

gilt, woraus im Speziellen, da p endlich viele Nullstellen hat, folgt, dass $\tilde{\Delta}$ die kleinste positive Nullstelle von p ist, dass $0 < \Delta < \tilde{\Delta}$ auf $]0| + \infty[$ gilt, dass $\tilde{\Delta} = \lim_{t \uparrow +\infty} \Delta(t)$, sowie $0 = \lim_{t \uparrow +\infty} \Delta^\bullet(t)$ gilt. Aus diesen Aussagen folgen per definitionem die zu verifizierenden Aussagen.

<u>Beweis</u> `f*)` Es folgt

$$0 > \kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b - \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d = p(0),$$

so dass nun via $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ **und ODE-Theorie. Existenz** folgt, dass Δ streng fallend ist, dass $\Delta^\bullet < 0$ auf $[0| + \infty[$ gilt, dass

$$-\min\left\{\frac{C_\circ}{c}, \frac{D_\circ}{d}\right\} < \tilde{\Delta} = \sup\{\omega : \omega < 0 \wedge 0 = p(\omega)\} < 0,$$

gilt, woraus im Speziellen, da p endlich viele Nullstellen hat, folgt, dass $\tilde{\Delta}$ die grösste negative Nullstelle von p ist, dass $\tilde{\Delta} < \Delta < 0$ auf $]0| + \infty[$ gilt, dass $\tilde{\Delta} = \lim_{t \uparrow +\infty} \Delta(t)$, sowie $0 = \lim_{t \uparrow +\infty} \Delta^\bullet(t)$ gilt. Aus diesen Aussagen folgen per definitionem die zu verifizierenden Aussagen.

<u>Beweis</u> `g)` Im Fall $\kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b = \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d$ gilt via `d)` $\tilde{A} = \lim_{t \uparrow +\infty} n_A(t) = A_\circ \in [0| + \infty[$ und $\tilde{B} = \lim_{t \uparrow +\infty} n_B(t) = B_\circ \in [0| + \infty[$ und $\tilde{C} = \lim_{t \uparrow +\infty} n_C(t) = C_\circ \in [0| + \infty[$ und $\tilde{D} = \lim_{t \uparrow +\infty} n_D(t) = D_\circ \in [0| + \infty[$, so dass im Speziellen

$$\kappa_1 \cdot \tilde{A}^a \cdot \tilde{B}^b = \kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b = \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d = \kappa_2 \cdot \tilde{C}^c \cdot \tilde{D}^d.$$

Im Fall $\kappa_1 \cdot A_\circ^a \cdot B_\circ^b \neq \kappa_2 \cdot C_\circ^c \cdot D_\circ^d$ gilt via `e), f)`, $0 < \tilde{A} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} n_A(t) = A_\circ - a \cdot \tilde{\Delta} \in \mathbb{R}$ und $0 < \tilde{B} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} n_B(t) = B_\circ - b \cdot \tilde{\Delta} \in \mathbb{R}$ und $0 < \tilde{C} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} n_C(t) = C_\circ + c \cdot \tilde{\Delta} \in \mathbb{R}$ und $0 < \tilde{D} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} n_D(t) = D_\circ + d \cdot \tilde{\Delta} \in \mathbb{R}$, wobei $\tilde{\Delta}$ eine Nullstelle von p ist. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 = p(\tilde{\Delta}) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot \tilde{\Delta})^a \cdot (B_\circ - b \cdot \tilde{\Delta})^a - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot \tilde{\Delta})^c \cdot (D_\circ + d \cdot \tilde{\Delta})^d \\ = \kappa_1 \cdot \tilde{A}^a \cdot \tilde{B}^b - \kappa_2 \cdot \tilde{C}^c \cdot \tilde{D}^d, \end{aligned}$$

so dass auch in diesem Fall

$$\kappa_1 \cdot \tilde{A}^a \cdot \tilde{B}^b = \kappa_2 \cdot \tilde{C}^c \cdot \tilde{D}^d,$$

gilt.

<u>Beweis</u> `h)` Via `e), f)` evident. $\square$

⋆

Bemerkung. Die hier angegebenen Lösungen n_A, n_B, n_C, n_D der Modell-ODE erfüllen die Erwartungen 1-4.

1.6 $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ und ODE-Theorie. Eindeutigkeit

Satz/ODE U

`V1.` $1 \leq a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $0 \leq A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ \in \mathbb{R}$.

`V2.` $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot x)^a \cdot (B_\circ - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot x)^c \cdot (D_\circ \cdot x)^d.$$

`V3.` I echtes reelles Intervall und $\overline{I}$ echtes reelles Intervall.

`V4.` $\Delta : I \to \mathbb{R}$ und $\overline{\Delta} : \overline{I} \to \mathbb{R}$.

`V5.` Δ differenzierbar und $\overline{\Delta}$ differenzierbar.

`V6.` $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ und $\overline{\Delta}^\bullet = p \circ \overline{\Delta}$.

`V7.` $s \in I \cap \overline{I}$ und $\Delta(s) = \overline{\Delta}(s)$.

$\Rightarrow$

$\Delta = \overline{\Delta}$ auf $I \cap \overline{I}$.

<u>Beweis</u> Elementare ODE-Theorie. $\square$

1.7 Modell-ODE und Eindeutigkeit

Satz

V1. $1 \leq a,b,c,d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $0 \leq A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ \in \mathbb{R}$.

V2. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot x)^a \cdot (B_\circ - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot x)^c \cdot (D_\circ \cdot x)^d.$$

V3. T wie in **Satz ODE/E** mit $T \in \,]0|+\infty]$.

V4. Δ wie in **Satz ODE/E** mit $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ und $0 = \Delta(0)$.

V5. $n_A, n_B, n_C, n_D : [0|T[\, \to \mathbb{R}, \begin{cases} n_A(t) &=& A_\circ - a \cdot \Delta(t) \\ n_B(t) &=& B_\circ - b \cdot \Delta(t) \\ n_C(t) &=& C_\circ + c \cdot \Delta(t) \\ n_D(t) &=& D_\circ + d \cdot \Delta(t) \end{cases}.$

V6. $\overline{I}$ echtes reelles Intervall und $0 \in \overline{I} \subseteq [0|+\infty[$.

V7. $\overline{n_A}, \overline{n_B}, \overline{n_C}, \overline{n_D} : \overline{I} \to \mathbb{R}$ und $\overline{n_A}, \overline{n_B}, \overline{n_C}, \overline{n_D}$ differenzierbar.

V8. $\overline{r_1}, \overline{r_2} : \overline{I} \to \mathbb{R}$ und $\overline{r_1}(t) = \kappa_1 \cdot \overline{n_A}^a(t) \cdot \overline{n_B}^b(t)$ und $\overline{r_2}(t) = \kappa_2 \cdot \overline{n_C}^c(t) \cdot \overline{n_D}^d(t)$.

V9. $\forall t : t \in I \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{n_A}^\bullet(t) &=& -a \cdot (\overline{r_1}(t) - \overline{r_2}(t) \\ \overline{n_B}^\bullet(t) &=& -b \cdot (\overline{r_1}(t) - \overline{r_2}(t)) \\ \overline{n_C}^\bullet(t) &=& c \cdot (\overline{r_1}(t) - \overline{r_2}(t)) \\ \overline{n_D}^\bullet(t) &=& d \cdot (\overline{r_1}(t) - \overline{r_2}(t)) \end{cases}.$

V10. $A_\circ = \overline{n_A}(0)$ und $B_\circ = \overline{n_B}(0)$ und $C_\circ = \overline{n_C}(0)$ und $D_\circ = \overline{n_D}(0)$.

$\Rightarrow$

$\overline{n_A} = n_A$ auf $\overline{I}$ und $\overline{n_B} = n_B$ auf $\overline{I}$ und $\overline{n_C} = n_C$ auf $\overline{I}$ und $\overline{n_D} = n_D$ auf $\overline{I}$.

<u>Beweis</u> Via **Modell-ODE und Δ. A posteriori. Existenz** gilt $T = +\infty$. Gemäß Voraussetzungen sind $\overline{r_1}, \overline{r_2}$ stetig. Somit gibt es $\overline{\Delta} \in \mathtt{C}^1(\overline{I} : \mathbb{R})$ mit

$$\overline{\Delta}(t) = \int_0^t (\overline{r_1}. - .\overline{r_2}).$$

Klarer Weise gilt $0 = \overline{\Delta}(0)$. Via **Modell-ODE und deren Transformation. A priori** gilt

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{n_A}(t) &= A_\circ - a \cdot \overline{\Delta}(t) \\ \overline{n_B}(t) &= B_\circ - b \cdot \overline{\Delta}(t) \\ \overline{n_C}(t) &= C_\circ + c \cdot \overline{\Delta}(t) \\ \overline{n_D}(t) &= D_\circ + d \cdot \overline{\Delta}(t) \end{cases},$$

sowie

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad \Rightarrow \quad \overline{\Delta}^\bullet(t) = p(\overline{\Delta}(t)).$$

Andererseits gilt via **Satz ODE/E**

$$0 = \Delta(0) \quad \text{und} \quad \forall t : t \in [0|T[\quad \Rightarrow \Delta^\bullet(t) = p(\Delta(t)),$$

so dass nun via $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ **und ODE-Theorie. Eindeutigkeit** die Aussage

$$\forall t : t \in [0|T[\cap \overline{I} \quad \Rightarrow \quad \Delta(t) = \overline{\Delta}(t),$$

zur Verfügung steht, aus der via $T = +\infty$

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad \Rightarrow \quad \Delta(t) = \overline{\Delta}(t),$$

folgt. Somit gilt

$$\forall t : t \in \overline{I} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overline{n_A}(t) &= A_\circ - a \cdot \overline{\Delta}(t) = A_\circ - a \cdot \Delta(t) = n_A(t) \\ \overline{n_B}(t) &= B_\circ - b \cdot \overline{\Delta}(t) = B_\circ - b \cdot \Delta(t) = n_B(t) \\ \overline{n_C}(t) &= C_\circ + c \cdot \overline{\Delta}(t) = C_\circ + c \cdot \Delta(t) = n_C(t) \\ \overline{n_D}(t) &= D_\circ + d \cdot \overline{\Delta}(t) = D_\circ + d \cdot \Delta(t) = n_D(t) \end{cases},$$

woraus

$$\overline{n_A} = n_A \text{ auf } \overline{I} \text{ und } \overline{n_B} = n_B \text{ auf } \overline{I} \text{ und } \overline{n_C} = n_C \text{ auf } \overline{I} \text{ und } \overline{n_D} = n_D \text{ auf } \overline{I},$$

folgt. $\square$

⋆

Bemerkung. Die hier angegebenen Lösungen n_A, n_B, n_C, n_D der Modell-ODE erfüllen auch Erwartung 5.

2 $\mathbf{A+B \rightleftharpoons C+D}$ - $\epsilon = \sqrt{\kappa_1 : \kappa_2} < 1$

2.1 Schwieriger Abbau bei $\epsilon \ll 1$ - gelegentlich

Satz

V1. $1 \leq a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $0 \leq A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ \in \mathbb{R}$.

V2. $\epsilon = \sqrt{\kappa_1 : \kappa_2} < 1$ und $1 = a = b = c = d$ und $C_\circ = 0$ und $D_\circ = 0$.

V3. $0 < m = \min\{A_\circ, B_\circ\}$ und $1 \leq \lambda = \dfrac{\max\{A_\circ, B_\circ\}}{\min\{A_\circ, B_\circ\}}$.

V4. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot x)^a \cdot (B_\circ - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot x)^c \cdot (D_\circ + d \cdot x)^d.$$

V5. T wie in **Satz ODE/E** mit $T \in \,]0|+\infty]$.

V6. Δ wie in **Satz ODE/E** mit $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ und $0 = \Delta(0)$.

V7. $n_A, n_B, n_C, n_D : [0|T[\,\to \mathbb{R}$, $\begin{cases} n_A(t) &= A_\circ - a \cdot \Delta(t) \\ n_B(t) &= B_\circ - b \cdot \Delta(t) \\ n_C(t) &= C_\circ + c \cdot \Delta(t) \\ n_D(t) &= D_\circ + d \cdot \Delta(t) \end{cases}$.

$\Rightarrow$

a) $T = +\infty$.

b) $0 < \tilde{\Delta} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} \Delta(t) < m \cdot \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ und $\tilde{\Delta} \leq \dfrac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \dfrac{A_\circ + B_\circ}{2}$

und $\left(\lambda < \dfrac{1}{\epsilon} + \sqrt{\dfrac{1}{\epsilon^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \dfrac{A_\circ + B_\circ}{2} < m \cdot \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right)$

und $m \cdot \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \left(1 - \left(\dfrac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) < \tilde{\Delta}$

und $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad 0 < m \cdot \dfrac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \left(1 - \left(\dfrac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) < \tilde{\Delta}\right)$,

wobei $0.44721 < \dfrac{1}{\sqrt{5}} < 0.44722$, und falls $0 < \theta \leq 1$ und $\dfrac{4 \cdot \theta \cdot \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \leq 1$ - dies ist etwa für $0 < \theta \leq 1$ und $\epsilon \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ der Fall - und

$$\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{2 \cdot \theta \cdot \epsilon^2} \cdot \left(\sqrt{1-\epsilon^2} + \sqrt{1-(1+4\cdot\theta)\cdot\epsilon^2}\right) - 1 \leq \lambda,$$

dann

$$m \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot (1-\theta) < \tilde{\Delta}.$$

c) $0 < \tilde{A} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} n_A(t) = A_\circ - \tilde{\Delta} < A_\circ$

und $0 < \tilde{B} = \lim\limits_{n \uparrow +\infty} n_B(t) = B_\circ - \tilde{\Delta} < B_\circ$.

d) $\dfrac{1}{1+\epsilon} \cdot A_\circ - \dfrac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot B_\circ \leq \tilde{A}$ und $\dfrac{1}{1+\epsilon} \cdot B_\circ - \dfrac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot A_\circ \leq \tilde{B}$.

e) Falls $A_\circ < B_\circ$, dann $\forall t : t \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad n_A(t) < n_B(t)$ und $\tilde{A} < \tilde{B}$ und $m = A_\circ$ und $\lambda \cdot m = B_\circ$ und $\dfrac{1}{1+\lambda} \cdot A_\circ < \tilde{A}$ und $\dfrac{\lambda}{1+\lambda} \cdot B_\circ < \tilde{B}$ und

$$\left(\lambda < \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+\lambda} \cdot A_\circ < \frac{1}{1+\epsilon} \cdot A_\circ - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot B_\circ \leq \tilde{A}\right.$$
$$\left.\text{und } \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot B_\circ < \frac{1}{1+\epsilon} \cdot B_\circ - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot A_\circ \leq \tilde{B}\right)$$

und $\tilde{A} < A_\circ - \dfrac{1}{1+\lambda} \cdot B_\circ \cdot \left(1 - \left(\dfrac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right)$

$$\text{und } \tilde{B} < B_\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\lambda} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right)\right)$$

$$\text{und } \left(\frac{1}{\sqrt{5}} < \epsilon \Rightarrow \tilde{A} < A_\circ - \frac{1}{1+\lambda} \cdot B_\circ \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) < A_\circ\right.$$
$$\left.\text{und } \tilde{B} < B_\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\lambda} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) < B_\circ\right)$$

und falls $0 < \theta \leq 1$ und $\dfrac{4 \cdot \theta \cdot \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \leq 1$ und

$$\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{2 \cdot \theta \cdot \epsilon^2} \cdot \left(\sqrt{1-\epsilon^2} + \sqrt{1-(1+4\cdot\theta)\cdot\epsilon^2}\right) - 1 \leq \lambda,$$

dann $\tilde{A} < \dfrac{\theta + \frac{1}{\lambda}}{1 + \frac{1}{\lambda}} \cdot A_\circ$ und $\tilde{B} < \dfrac{\theta + \lambda}{1+\lambda} \cdot B_\circ$.

f) Falls $A_\circ = B_\circ$, dann $\forall t : t \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad n_A(t) = n_B(t)$ und $\tilde{A} = \tilde{B}$ und $m = A_\circ = B_\circ$ und $1 = \lambda$ und $\frac{1}{2} \cdot A_\circ < \tilde{A}$ und $\frac{1}{2} \cdot B_\circ < \tilde{B}$

und $\frac{1}{2} \cdot A_\circ < \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \cdot A_\circ \leq \tilde{A}$ und $\frac{1}{2} \cdot B_\circ < \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \cdot B_\circ \leq \tilde{B}$

und $\tilde{A} < \frac{1}{2} \cdot A_\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right)\right)$ und $\tilde{B} < \frac{1}{2} \cdot B_\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right)\right)$

und $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} < \frac{1}{2} \cdot A_\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right)\right) < A_\circ\right.$

$$\left. \text{und } \tilde{B} < \frac{1}{2} \cdot B_\circ \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right)\right) < B_\circ\right)$$

g) Falls $A_\circ > B_\circ$, dann $\forall t : t \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad n_A(t) > n_B(t)$ und $\tilde{A} > \tilde{B}$ und $\lambda \cdot m = A_\circ$ und $m = B_\circ$ und $\frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot A_\circ < \tilde{A}$ und $\frac{1}{1+\lambda} \cdot B_\circ < \tilde{B}$ und

$$\left(\lambda < \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot A_\circ < \frac{1}{1+\epsilon} \cdot A_\circ - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot B_\circ \leq \tilde{A}\right.$$

$$\left. \text{und } \frac{1}{1+\lambda} \cdot B_\circ < \frac{1}{1+\epsilon} \cdot B_\circ - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot A_\circ \leq \tilde{B}\right)$$

und $\tilde{A} < A_\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\lambda} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right)\right)$

$$\text{und } \tilde{B} < B_\circ - \frac{1}{1+\lambda} \cdot A_\circ \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right)$$

und $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} < \epsilon \Rightarrow \tilde{B} < B_\circ - \frac{1}{1+\lambda} \cdot A_\circ \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) < B_\circ\right.$

$$\left. \text{und } \tilde{A} < A_\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\lambda} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right)\right) < A_\circ\right)$$

und falls $0 < \theta \leq 1$ und $\frac{4 \cdot \theta \cdot \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \leq 1$ und

$$\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{2 \cdot \theta \cdot \epsilon^2} \cdot \left(\sqrt{1-\epsilon^2} + \sqrt{1 - (1 + 4 \cdot \theta) \cdot \epsilon^2}\right) - 1 \leq \lambda,$$

dann $\tilde{A} < \frac{\theta + \lambda}{1 + \lambda} \cdot A_\circ$ und $\tilde{B} < \frac{\theta + \frac{1}{\lambda}}{1 + \frac{1}{\lambda}} \cdot B_\circ$.

h) $0 < \tilde{C} = \lim_{n \uparrow +\infty} n_C(t) = \tilde{\Delta} = \lim_{t \uparrow +\infty} n_D(t) = \tilde{D} \in \mathbb{R}$

$$\text{und } \forall t : t \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad n_C(t) = n_D(t).$$

i) $\tilde{C} = \tilde{D} < m \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda}$ und $\tilde{C} = \tilde{D} \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \frac{A_\circ + B_\circ}{2}$

und $\left(\lambda < \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \cdot \frac{A_\circ + B_\circ}{2} < m \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$

und $m \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) < \tilde{C} = \tilde{D}$

und $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} < \epsilon \Rightarrow 0 < m \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) < \tilde{C} = \tilde{D}\right)$,

und falls $0 < \theta \leq 1$ und $\frac{4 \cdot \theta \cdot \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \leq 1$ - dies ist etwa für $0 < \theta \leq 1$ und $\epsilon \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ der Fall - und

$$\frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{2 \cdot \theta \cdot \epsilon^2} \cdot \left(\sqrt{1-\epsilon^2} + \sqrt{1 - (1 + 4 \cdot \theta) \cdot \epsilon^2}\right) - 1 \leq \lambda,$$

dann

$$m \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot (1 - \theta) < \tilde{C} = \tilde{D}.$$

<u>Beweis</u> `a)` Via $\Delta^* = p \circ \Delta$ **und ODE-Theorie. Existenz** evident.

<u>Beweis</u> `b)` Es gilt

$$\begin{aligned} p(0) &= \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot 0)^a \cdot (B_\circ - b \cdot 0)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot 0)^c \cdot (D_\circ + d \cdot 0)^d \\ &= \kappa_1 \cdot (A_\circ - 1 \cdot 0)^1 \cdot (B_\circ - 1 \cdot 0)^1 - \kappa_2 \cdot (0 + 1 \cdot 0)^1 \cdot (0 + 1 \cdot 0)^1 \\ &= \kappa_1 \cdot A_\circ \cdot B_\circ - \kappa_2 \cdot 0 = \kappa_1 \cdot \lambda \cdot m^2 > 0, \end{aligned}$$

so dass $\tilde{\Delta}$ via $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ **und ODE-Theorie. Existenz** die kleinste positive Nullstelle von p ist, für die zusätzlich $0 < \tilde{\Delta} < m$ gilt. Mit $1 = a = b = c = d$ und $C_\circ = D_\circ = 0$ gilt

$$0 = p(\tilde{\Delta}) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - \tilde{\Delta}) \cdot (B_\circ - \tilde{\Delta}) - \kappa_2 \cdot \tilde{\Delta}^2,$$

so dass nach Division durch κ_2 mit $\epsilon^2 = \kappa_1 : \kappa_2$ nach Umstellung

$$(1 - \epsilon^2) \cdot \tilde{\Delta}^2 + \epsilon^2 \cdot (A_\circ + B_\circ) \cdot \tilde{\Delta} - \epsilon^2 \cdot A_\circ \cdot B_\circ = 0,$$

folgt. Hieraus ergibt sich

$$\left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right) \cdot \tilde{\Delta}^2 = (A_\circ + B_\circ) \cdot \left(\frac{A_\circ \cdot B_\circ}{A_\circ + B_\circ} - \tilde{\Delta}\right) = m \cdot (1 + \lambda) \cdot \left(m \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} - \tilde{\Delta}\right),$$

so dass wegen der Positivität der linken Seite

$$\tilde{\Delta} < m \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

folgt, und dies, eingesetzt in die linke Seite die Abschätzung

$$\left(\frac{1}{\epsilon^2}-1\right)\cdot m^2\cdot\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} > m\cdot(1+\lambda)\cdot\left(m\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}-\tilde{\Delta}\right),$$

ergibt, woraus ohne allzu viel Rechnung

$$\tilde{\Delta} > m\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{\epsilon^2}-1\right)\cdot\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right),$$

folgt. Falls $\frac{1}{\sqrt{5}} < \epsilon$, dann $\frac{1}{\epsilon^2}-1 < 5-1 = 4$, und da aus $1 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \leq \frac{1}{4},$$

folgt, ergibt sich $\left(\frac{1}{\epsilon^2}-1\right)\cdot\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} < 1$, und hieraus

$$0 < 1-\left(\frac{1}{\epsilon^2}-1\right)\cdot\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2},$$

woraus via Positivität die Abschätzung

$$0 < m\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{\epsilon^2}-1\right)\cdot\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right),$$

folgt. Aus

$$(1-\epsilon^2)\cdot\tilde{\Delta}^2+\epsilon^2\cdot(A_\circ+B_\circ)\cdot\tilde{\Delta}-\epsilon^2\cdot A_\circ\cdot B_\circ = 0.$$

ergibt sich via $0 < \tilde{\Delta}$ mit Hilfe der Mitternachtsformel,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta} &= \frac{-\epsilon^2\cdot(A_\circ+B_\circ)+\sqrt{\epsilon^4\cdot(A_\circ+B_\circ)^2+4\cdot\epsilon^2\cdot(1-\epsilon^2)\cdot A_\circ\cdot B_\circ}}{2\cdot(1-\epsilon^2)}\\ &= \frac{\epsilon^2}{2\cdot(1-\epsilon^2)}\cdot(A_\circ+B_\circ)\cdot\left(-1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{\epsilon^2}-1\right)\cdot\frac{4\cdot A_\circ\cdot B_\circ}{(A_\circ+B_\circ)^2}}\right).\end{aligned}$$

Nach kurzer Rechnung zeigt sich via $0 < A_\circ, B_\circ$ und $0 < m \in \mathbb{R}$, $1 \leq \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\frac{4\cdot A_\circ\cdot B_\circ}{(A_\circ+B_\circ)^2} = \frac{4\cdot\lambda}{(1+\lambda)^2} \leq 1,$$

so dass nun

$$\begin{aligned}0 < \tilde{\Delta} &\leq \frac{\epsilon^2}{2\cdot(1-\epsilon^2)}\cdot(A_\circ+B_\circ)\cdot\left(-1+\sqrt{1+\left(\frac{1}{\epsilon^2}-1\right)\cdot 1}\right)\\ &= \frac{\epsilon^2}{2\cdot(1-\epsilon^2)}\cdot(A_\circ+B_\circ)\cdot\left(-1+\frac{1}{\epsilon}\right) = \frac{\epsilon^2}{2\cdot(1-\epsilon^2)}\cdot(A_\circ+B_\circ)\cdot\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\\ &= \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\cdot\frac{A_\circ+B_\circ}{2},\end{aligned}$$

folgt. Falls $\lambda < \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1}$, dann, da $1 \leq \lambda$ und via $0 < \epsilon < 1$,

$$1 < \frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1},$$

gilt, auch

$$\frac{1}{\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1}} < \lambda,$$

woraus mit der zweiten binomischen Formel

$$\frac{1}{\epsilon} - \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1} < \lambda,$$

folgt und sich

$$-\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1} < \lambda - \frac{1}{\epsilon} < \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1},$$

ergibt und hieraus

$$\left|\lambda - \frac{1}{\epsilon}\right| < \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1},$$

abgeschätzt werden kann, so dass

$$\left(\lambda - \frac{1}{\epsilon}\right)^2 < \frac{1}{\epsilon^2} - 1,$$

verfügbar ist. Nach kurzer Rechnung wird nun

$$\epsilon < \frac{2 \cdot \lambda}{1 + \lambda^2},$$

sichtbar, so dass via strengen Wachstums und $0 < \epsilon$,

$$\frac{\epsilon}{1 + \epsilon} < \frac{\frac{2 \cdot \lambda}{1 + \lambda^2}}{1 + \frac{2 \cdot \lambda}{1 + \lambda^2}} = \frac{2 \cdot \lambda}{(1 + \lambda)^2},$$

und hieraus ohne allzu viel weitere Rechung

$$\frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \cdot \frac{A_\circ + B_\circ}{2} = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \cdot \frac{m \cdot (1 + \lambda)}{2} < m \cdot \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

folgt. Falls $0 < \theta \leq 1$ und $\frac{4 \cdot \theta \cdot \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \leq 1$ und falls

$$\frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{2 \cdot \theta \cdot \epsilon^2} \cdot \left(\sqrt{1 - \epsilon^2} + \sqrt{1 - (1 + 4 \cdot \theta) \cdot \epsilon^2}\right) - 1 \leq \lambda,$$

dann gilt zunächst im Speziellen

$$\frac{1-\epsilon^2}{2\cdot\theta\cdot\epsilon^2} - 1 \geq 1,$$

so dass das quadratische Polynom

$$q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad q(x) = x^2 - \left(\frac{1-\epsilon^2}{\theta\cdot\epsilon^2} - 2\right)\cdot x + 1,$$

zwei reelle Nullstellen, nämlich, wie sich nach kurzer Rechung herausstellt,

$$\frac{1-\epsilon^2}{2\cdot\theta\cdot\epsilon^2}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\cdot\theta\cdot\epsilon^2}{1-\epsilon^2}}\right) - 1,$$

hat, so dass

$$\forall x: \frac{1-\epsilon^2}{2\cdot\theta\cdot\epsilon^2}\cdot\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\cdot\theta\cdot\epsilon^2}{1-\epsilon^2}}\right) - 1 \leq x$$

$$\Rightarrow \quad q(x) = x^2 - \left(\frac{1-\epsilon^2}{\theta\cdot\epsilon^2} - 2\right)\cdot x + 1 \geq 0,$$

gelten muss. Nach kurzer Umstellung wird

$$\frac{1-\epsilon^2}{2\cdot\theta\cdot\epsilon^2}\cdot\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\cdot\theta\cdot\epsilon^2}{1-\epsilon^2}}\right) - 1 \leq \lambda,$$

sichtbar und es folgt

$$0 \leq \lambda^2 - \left(\frac{1-\epsilon^2}{\theta\cdot\epsilon^2} - 2\right)\cdot\lambda + 1,$$

also auch

$$\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2}\cdot\lambda \leq \lambda^2 + 2\cdot\lambda + 1 = (1+\lambda)^2,$$

und somit

$$\left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right)\cdot\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \leq \theta,$$

so dass hiermit

$$m\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot(1-\theta) \leq m\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right)\cdot\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right),$$

gilt und da auf Grund des bereits Bewiesenen auch

$$m\cdot\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{\epsilon^2} - 1\right)\cdot\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\right) < \tilde{\Delta},$$

verfügbar ist, folgt

$$m \cdot \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot (1-\theta) < \tilde{\Delta}.$$

`c)` Via **Modell-ODE und Δ. A posteriori. Existenz** evident.

`d), e), f), g)` Via Voraussetzungen und `a), b)` evident.

`h), i)` Via **Modell-ODE und Δ. A posteriori. Existenz** evident. □

2.2 Einfache Herstellung bei $\epsilon \ll 1$

Hilfssatz

`V.` $0 < \epsilon < 1$.

$\Rightarrow$

`a)` Die Funktion

$$f : [0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + x + \sqrt{(-1+x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x},$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar und $0 < f'$ und f streng wachsend und

$$f(0) = 2, \quad f(1) = 2 \cdot (1+\epsilon), \quad \lim_{x \uparrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

`b)` Die Funktion

$$h : [0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{1 + x + \sqrt{(-1+x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x}},$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar und $h' < 0$ und h streng fallend und

$$h(0) = 1, \quad h(1) = \frac{1}{1+\epsilon}, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} h(x) = 0.$$

`c)` Die Funktion

$$g : [0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{2 \cdot x}{1 + x + \sqrt{(-1+x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x}},$$

ist beliebig oft stetig differenzierbar und $0 < g'0$ und g streng wachsend und

$$g(0) = 0, \quad g(1) = \frac{1}{1+\epsilon}, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} g(x) = 1,$$

und $\forall x : 0 < x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad g(x) = h(1/x)$.

<u>Beweis</u> `a)` Klarer Weise ist f beliebig oft differenzierbar und es gilt $f(0) = 2$, $f(19 = 2 \cdot (1 + \epsilon)$ und $\lim\limits_{x \uparrow +\infty} f(x) = +\infty$ und es gilt

$$f' : [0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 + \frac{-1 + x + 2 \cdot \epsilon^2}{\sqrt{(-1 + x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x}}.$$

Falls $1 - 2 \cdot \epsilon^2 \leq x$, dann $0 < 1 \leq f'(x)$. Falls $0 < x < 1 - 2 \cdot \epsilon^2$, dann folgt aus

$$0 < \epsilon < 1,$$

zunächst

$$0 < 1 - \epsilon^2,$$

hieraus

$$-4 \cdot \epsilon^2 \cdot (1 - \epsilon^2) < 0,$$

also

$$-4 \cdot \epsilon^2 + 4 \cdot \epsilon^4 < 0,$$

somit

$$-4 \cdot \epsilon^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x + 4 \cdot \epsilon^4 < 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x,$$

demnach

$$-4 \cdot \epsilon^2 \cdot (1 - x) + 4 \cdot \epsilon^4 < 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x,$$

sodann via $(1 - x)^2 = (-1 + x)^2$,

$$(1 - x)^2 - 4 \cdot \epsilon^2 \cdot (1 - x) + 4 \cdot \epsilon^4 < (-1 + x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x,$$

also auch

$$((1 - x) - 2 \cdot \epsilon^2)^2 < (-1 + x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x.$$

woraus

$$|1 - x - 2 \cdot \epsilon^2| < \sqrt{(-1 + x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x},$$

folgt und diese Abschätzung via $0 < 1 - x - 2 \cdot \epsilon^2$ in

$$1 - x - 2 \cdot \epsilon^2 < \sqrt{(-1 + x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x},$$

umgeformt werden kann, woraus sich

$$\frac{1 - x - 2 \cdot \epsilon^2}{\sqrt{(-1 + x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x}} < 1,$$

ergibt, so dass

$$-1 < \frac{-1 + x + 2 \cdot \epsilon^2}{\sqrt{(-1 + x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x}},$$

und hieraus

$$0 < 1 + \frac{-1 + x + 2 \cdot \epsilon^2}{\sqrt{(-1+x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x}} = f'(x),$$

folgt. Somit $0 < f'$ und konsequenter Weise ist f streng wachsend.

<u>Beweis</u> `b)` Via `a)` evident.

<u>Beweis</u> `c)` Klarer Weise ist g beliebig oft stetig differenzierbar und für alle $x \in]0| + \infty[$ gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2 \cdot x}{1 + x + \sqrt{(-1+x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{x} + 1 + \sqrt{\left(-\frac{1}{x} + 1\right)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \frac{1}{x}}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\left(-1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \frac{1}{x}}} \\ &= h(1/x), \end{aligned}$$

so dass via `b)` die Funktion g streng wachsend ist,

$$g(0) = \lim_{x \uparrow +\infty} h(x) = 0, \quad g(1) = h(1) = \frac{1}{1+\epsilon}, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} g(x) = h(0) = 1,$$

gilt und $0 < g'$ auf $]0|+\infty[$ gelten muss. Auch gilt offenbar für alle $x \in [0|+\infty[$,

$$g(x) = \frac{2 \cdot x}{f(x)},$$

so dass

$$g'(x) = \frac{2 \cdot f(x) - 2 \cdot x \cdot f'(x)}{f^2(x)},$$

und demnach

$$g'(0) = \frac{2 \cdot f(0) - 2 \cdot 0 \cdot f'(0)}{f^2(0)} = \frac{2}{f(0)} = \frac{2}{2} = 1 > 0,$$

gilt. $\square$

Satz

`V1.` $1 \leq a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ und $0 \leq A_\circ, B_\circ, C_\circ, D_\circ \in \mathbb{R}$.

`V2.` $\epsilon = \sqrt{\kappa_1 : \kappa_2} < 1$ und $1 = a = b = c = d$ und $A_\circ = 0$ und $B_\circ = 0$.

`V3.` $0 < m = \min\{C_\circ, D_\circ\}$ und $1 \leq \lambda = \dfrac{\max\{C_\circ, D_\circ\}}{\min\{C_\circ, D_\circ\}}$.

`V4.` $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot x)^a \cdot (B_\circ - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot x)^c \cdot (D_\circ + d \cdot x)^d.$$

`V5.` T wie in **Satz ODE/E** mit $T \in \left]0|+\infty\right]$.

`V6.` Δ wie in **Satz ODE/E** mit $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ und $0 = \Delta(0)$.

`V7.` $n_A, n_B, n_C, n_D : \left[0|T\right[\to \mathbb{R}, \begin{cases} n_A(t) &= A_\circ - a \cdot \Delta(t) \\ n_B(t) &= B_\circ - b \cdot \Delta(t) \\ n_C(t) &= C_\circ + c \cdot \Delta(t) \\ n_D(t) &= D_\circ + d \cdot \Delta(t) \end{cases}.$

$\Rightarrow$

`a)` $T = +\infty$.

`b)` $-m < \tilde{\Delta} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} \Delta(t) < 0$ und $\tilde{\Delta} = -m \cdot g(\lambda)$, wobei

$$g : \left[0|+\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{2 \cdot x}{1 + x + \sqrt{(-1+x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x}},$$

beliebig oft stetig differenzierbar, streng wachsend mit

$$g(0) = 0, \quad g(1) = \frac{1}{1+\epsilon}, \quad \lim_{x \uparrow +\infty} g(x) = 1,$$

ist.

`c)` $0 < \tilde{A} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} n_A(t) = -\tilde{\Delta} = m \cdot g(\lambda) = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} n_B(t) = \tilde{B} \in \mathbb{R}$
und $\forall t : t \in \left[0|+\infty\right[\quad \Rightarrow \quad n_A(t) = n_B(t)$.

`d)` $0 < \tilde{C} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} n_C(t) = C_\circ - m \cdot g(\lambda) < C_\circ$
und $0 < \tilde{D} = \lim\limits_{t \uparrow +\infty} n_D(t) = D_\circ - m \cdot g(\lambda) < D_\circ$.

`e)` Falls $C_\circ < D_\circ$, dann $\forall t : t \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad n_C(t) < n_D(t)$ und $\tilde{C} < \tilde{D}$ und $m = C_\circ$ und $\lambda \cdot m = D_\circ$ und $\tilde{C} = C_\circ \cdot (1 - g(\lambda))$ und $\tilde{D} = D_\circ \cdot (1 - h(\lambda))$, wobei

$$h : [0| + \infty[\to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{1 + x + \sqrt{(-1 + x)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot x}},$$

beliebig oft stetig differenzierbar, streng fallend mit

$$h(0) = 1, \quad h(1) = \frac{1}{1 + \epsilon}, \quad \lim_{x \uparrow + \infty} h(x) = 0,$$

ist.

`f)` Falls $C_\circ = D_\circ$, dann $\forall t : t \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad n_C(t) = n_D(t)$ und $\tilde{C} = C_\circ \cdot (1 - g(\lambda)) = D_\circ \cdot (1 - g(\lambda)) = \tilde{D}$.

`g)` Falls $C_\circ > D_\circ$, dann $\forall t : t \in [0| + \infty[\quad \Rightarrow \quad n_C(t) > n_D(t)$ und $\tilde{C} > \tilde{D}$ und $\lambda \cdot m = C_\circ$ und $m = D_\circ$ und $\tilde{C} = C_\circ \cdot (1 - h(\lambda))$ und $\tilde{D} = D_\circ \cdot (1 - g(\lambda))$.

Beweis `a)` Via $\Delta^* = p \circ \Delta$ **und ODE-Theorie. Existenz** evident.

Beweis `b)` Es gilt

$$\begin{aligned} p(0) &= \kappa_1 \cdot (A_\circ - a \cdot 0)^a \cdot (B_\circ - b \cdot 0)^b - \kappa_2 \cdot (C_\circ + c \cdot 0)^c \cdot (D_\circ + d \cdot 0)^d \\ &= \kappa_1 \cdot (0 - 1 \cdot 0)^1 \cdot (0 - 1 \cdot 0)^1 - \kappa_2 \cdot (C_\circ + 1 \cdot 0)^1 \cdot (D_\circ + 1 \cdot 0)^1 \\ &= \kappa_1 \cdot 0 - \kappa_2 \cdot C_\circ \cdot D_\circ = -\kappa_2 \cdot \lambda \cdot m^2 < 0, \end{aligned}$$

so dass $\tilde{\Delta}$ via $\Delta^\bullet = p \circ \Delta$ **und ODE-Theorie. Existenz** die grösste negative Nullstelle von p ist, für die zusätzlich $-m < \tilde{\Delta} < 0$ gilt. Mit $1 = a = b = c = d$ und $C_\circ = D_\circ = 0$ gilt

$$0 = p(\tilde{\Delta}) = \kappa_1 \cdot \tilde{\Delta}^2 - \kappa_2 \cdot (C_\circ + \tilde{\Delta}) \cdot (D_\circ + \tilde{\Delta}),$$

so dass nach Division durch κ_2 mit $\epsilon^2 = \kappa_1 : \kappa_2$ nach Umstellung

$$(1 - \epsilon^2) \cdot \tilde{\Delta}^2 + (C_\circ + D_\circ) \cdot \tilde{\Delta} + C_\circ \cdot D_\circ = 0,$$

und hieraus

$$(1 - \epsilon^2) \cdot \tilde{\Delta}^2 + m \cdot (1 + \lambda) \cdot \tilde{\Delta} + \lambda \cdot m^2 = 0,$$

folgt. Mit Hilfe der Mitternachtsformel ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\tilde{\Delta} = -\frac{m}{2 \cdot (1 - \epsilon)^2} \cdot \left(1 + \lambda \pm \sqrt{(-1 + \lambda)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda}\right),$$

wobei mit Hilfe der Funktion f des vorherigen **Hilfssatz**es

$$1 + \lambda + \sqrt{(-1 + \lambda)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda} = f(\lambda) \geq 2,$$

gilt, so dass wegen $-m < \tilde{\Delta}$ die Gleichung

$$\tilde{\Delta} = -\frac{m}{2 \cdot (1-\epsilon)^2} \cdot \left(1 + \lambda - \sqrt{(-1+\lambda)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda}\right),$$

gelten muss. Mit Hilfe der zweiten binomischen Formel und der Funktion g kann nun weiter umgeformt werden,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} = -\frac{m}{2 \cdot (1-\epsilon)^2} \cdot \left(1 + \lambda - \sqrt{(-1+\lambda)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda}\right) \\
= -\frac{m}{2 \cdot (1-\epsilon)^2} \cdot \frac{(1+\lambda)^2 - ((-1+\lambda)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda)}{1 + \lambda + \sqrt{(-1+\lambda)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda}} \\
= -\frac{m}{2 \cdot (1-\epsilon)^2} \cdot \frac{4 \cdot \lambda - 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda}{1 + \lambda + \sqrt{(-1+\lambda)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda}} \\
= -\frac{m}{2 \cdot (1-\epsilon)^2} \cdot \frac{4 \cdot \lambda \cdot (1 - \epsilon^2)}{1 + \lambda + \sqrt{(-1+\lambda)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda}} \\
= -m \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{1 + \lambda + \sqrt{(-1+\lambda)^2 + 4 \cdot \epsilon^2 \cdot \lambda}} = -m \cdot g(\lambda).
\end{aligned}$$

Die angegebenen Aussagen über g sind via vorherigen **Hilfssatz**es evident.

`c), d)` Via **Modell-ODE und Δ. A posteriori. Existenz** und `b)` evident.

`e)` Via Voraussetzungen und `b)` und vorherigen **Hilfssatz** evident.

`f)` Via Voraussetzungen und `b)` evident.

`g)` Via Voraussetzungen und `b)` und vorherigen **Hilfssatz** evident.

3 a A + b B $\rightleftharpoons$ c C + d D - $Q, \Delta^*, A^*, B^*, C^*, D^*$

Satz

V1. $1 \leq a, b, c, d \in \mathbb{N}$ und $0 < \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$.

V2. $d_4 = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \wedge 0 < \alpha \cdot \beta + \gamma \cdot \delta\}$.

V3. $Q : d_4 \to \mathtt{C}^{+\infty}(\mathbb{R} : \mathbb{R}), \quad Q((\alpha, \beta, \gamma, \delta)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$Q((\alpha, \beta, \gamma, \delta))(x) = \kappa_1 \cdot (\alpha - a \cdot x)^a \cdot (\beta - b \cdot x)^b - \kappa_2 \cdot (\gamma + c \cdot x)^c \cdot (\delta + d \cdot x)^d.$$

V4. $$\Delta^* = \Bigg\{((\alpha, \beta, \gamma, \delta), y) : (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in d_4 \wedge - \min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} < y < \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\} \wedge 0 = Q((\alpha, \beta, \gamma, \delta))(y)\Bigg\}.$$

V5. $A^* = \{((\alpha, \beta, \gamma, \delta), \alpha - a \cdot y) : ((\alpha, \beta, \gamma, \delta), y) \in \Delta^*\}$.

V6. $B^* = \{((\alpha, \beta, \gamma, \delta), \beta - b \cdot y) : ((\alpha, \beta, \gamma, \delta), y) \in \Delta^*\}$.

V7. $C^* = \{((\alpha, \beta, \gamma, \delta), \gamma + c \cdot y) : ((\alpha, \beta, \gamma, \delta), y) \in \Delta^*\}$.

V8. $D^* = \{((\alpha, \beta, \gamma, \delta), \delta + d \cdot y) : ((\alpha, \beta, \gamma, \delta), y) \in \Delta^*\}$.

$\Rightarrow$

a) $\forall (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in d_4, x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q((\alpha, \beta, \gamma, \delta))'(x) = &-\kappa_1 \cdot a^2 \cdot (\alpha - a \cdot x)^{-1+a} \cdot (\beta - b \cdot x)^b \\ &- \kappa_1 \cdot b^2 \cdot (\alpha - a \cdot x)^a \cdot (\beta - b \cdot x)^{-1+b} \\ &- \kappa_2 \cdot c^2 \cdot (\gamma + c \cdot x)^{-1+c} \cdot (\delta + d \cdot x)^d \\ &- \kappa_2 \cdot d^2 \cdot (\gamma + c \cdot x)^c \cdot (\delta + d \cdot x)^{-1+d}. \end{aligned}$$

b) $\forall (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in d_4$:

$$Q((\alpha, \beta, \gamma, \delta))\left(\min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}\right) < 0 < Q((\alpha, \beta, \gamma, \delta))\left(-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\}\right),$$

und $Q((\alpha, \beta, \gamma, \delta))' < 0$ auf $]-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \mid \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}[$
und $Q((\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ streng fallend auf $[-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \mid \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}]$
und $Q((\alpha, \beta, \gamma, \delta))$ hat in $]-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \mid \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}[$ genau eine Nullstelle.

c) Δ^* Funktion und für alle $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in d_4$ gilt

$$-\min\left\{\frac{\gamma}{c},\frac{\delta}{d}\right\} < \Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < \min\left\{\frac{\alpha}{a},\frac{\beta}{b}\right\},$$

und

$$0 = Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))(\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta))),$$

und $\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta))$ ist die einzige Nullstelle
von $Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))$ in $[\![-\min\left\{\frac{\gamma}{c},\frac{\delta}{d}\right\} \mid \min\left\{\frac{\alpha}{a},\frac{\beta}{b}\right\}]\!]$.

d) $\Delta^* \in \mathtt{C}^1(d_4 : \mathbb{R})$ und $\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in d_4$:

$$(\partial_1\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) = -\frac{(\partial_1 Q)((\alpha,\beta,\gamma,\delta))(\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)))}{Q'((\alpha,\beta,\gamma,\delta))(\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta))}$$
$$= \frac{\kappa_1 \cdot a \cdot (\alpha^*)^{-1+a} \cdot (\beta^*)^b}{\kappa_1(\alpha^*)^{-1+a}(\beta^*)^{-1+b}(a^2\beta^* + b^2\alpha^*) + \kappa_2(\gamma^*)^{-1+c}(\delta^*)^{+1+d}(c^2\delta^* + d^2\gamma^*)}$$
$$\in]\!]0|\frac{1}{a}[\![,$$

$$(\partial_2\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) = -\frac{(\partial_2 Q)((\alpha,\beta,\gamma,\delta))(\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)))}{Q'((\alpha,\beta,\gamma,\delta))(\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta))}$$
$$= \frac{\kappa_1 \cdot b \cdot (\alpha^*)^{a} \cdot (\beta^*)^{-1+b}}{\kappa_1(\alpha^*)^{-1+a}(\beta^*)^{-1+b}(a^2\beta^* + b^2\alpha^*) + \kappa_2(\gamma^*)^{-1+c}(\delta^*)^{+1+d}(c^2\delta^* + d^2\gamma^*)}$$
$$\in]\!]0|\frac{1}{b}[\![,$$

$$(\partial_3\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) = -\frac{(\partial_3 Q)((\alpha,\beta,\gamma,\delta))(\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)))}{Q'((\alpha,\beta,\gamma,\delta))(\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta))}$$
$$= -\frac{\kappa_2 \cdot c \cdot (\gamma^*)^{-1+c} \cdot (\delta^*)^{d}}{\kappa_1(\alpha^*)^{-1+a}(\beta^*)^{-1+b}(a^2\beta^* + b^2\alpha^*) + \kappa_2(\gamma^*)^{-1+c}(\delta^*)^{+1+d}(c^2\delta^* + d^2\gamma^*)}$$
$$\in]\!] -\frac{1}{c}|0[\![,$$

$$(\partial_4\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) = -\frac{(\partial_4 Q)((\alpha,\beta,\gamma,\delta))(\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)))}{Q'((\alpha,\beta,\gamma,\delta))(\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta))}$$
$$= -\frac{\kappa_2 \cdot d \cdot (\gamma^*)^{c} \cdot (\delta^*)^{-1+d}}{\kappa_1(\alpha^*)^{-1+a}(\beta^*)^{-1+b}(a^2\beta^* + b^2\alpha^*) + \kappa_2(\gamma^*)^{-1+c}(\delta^*)^{+1+d}(c^2\delta^* + d^2\gamma^*)}$$
$$\in]\!] -\frac{1}{d}|0[\![,$$

wobei

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \alpha - a\cdot\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) > 0,\\ \beta^* &= \beta - b\cdot\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) > 0,\\ \gamma^* &= \gamma + c\cdot\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) > 0,\\ \delta^* &= \delta + d\cdot\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) > 0,\end{aligned}$$

`e)` $A^* \in \mathtt{C}^1(d_4:\mathbb{R})$ und $\mathsf{ran}\,A^* \subseteq \,]0|+\infty[$ und $\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in d_4$:

$$\begin{gathered}0 < (\partial_1 A^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = 1 - a\cdot(\partial_1\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < 1,\\ -\frac{b}{a} < (\partial_2 A^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = -a\cdot(\partial_2\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < 0,\\ 0 < (\partial_3 A^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = -a\cdot(\partial_3\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < \frac{a}{c},\\ 0 < (\partial_4 A^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = -a\cdot(\partial_4\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < \frac{a}{d}.\end{gathered}$$

`f)` $B^* \in \mathtt{C}^1(d_4:\mathbb{R})$ und $\mathsf{ran}\,B^* \subseteq \,]0|+\infty[$ und $\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in d_4$:

$$\begin{gathered}-\frac{b}{a} < (\partial_1 B^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = -b\cdot(\partial_1\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < 0,\\ 0 < (\partial_2 B^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = 1 - b\cdot(\partial_2\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < 1,\\ 0 < (\partial_3 B^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = -b\cdot(\partial_3\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < \frac{b}{c},\\ 0 < (\partial_4 B^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = -b\cdot(\partial_4\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < \frac{b}{d}.\end{gathered}$$

`g)` $C^* \in \mathtt{C}^1(d_4:\mathbb{R})$ und $\mathsf{ran}\,C^* \subseteq \,]0|+\infty[$ und $\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in d_4$:

$$\begin{gathered}0 < (\partial_1 C^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = c\cdot(\partial_1\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < \frac{c}{a},\\ 0 < (\partial_2 C^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = c\cdot(\partial_2\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < \frac{c}{b},\\ 0 < (\partial_3 C^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = 1 + c\cdot(\partial_3\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < 1,\\ -\frac{c}{d} < (\partial_4 C^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = c\cdot(\partial_4\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < 0.\end{gathered}$$

`h)` $D^* \in \mathtt{C}^1(d_4:\mathbb{R})$ und $\mathsf{ran}\,D^* \subseteq \,]0|+\infty[$ und $\forall(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in d_4$:

$$\begin{gathered}0 < (\partial_1 D^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = d\cdot(\partial_1\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < \frac{d}{a},\\ 0 < (\partial_2 D^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = d\cdot(\partial_2\Delta^*((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < \frac{d}{b},\\ -\frac{d}{c} < (\partial_3 D^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = d\cdot(\partial_3\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < 0,\\ 0 < (\partial_4 D^*)(((\alpha,\beta,\gamma,\delta))) = 1 + d\cdot(\partial_4\Delta^*)((\alpha,\beta,\gamma,\delta)) < 1.\end{gathered}$$

<u>Beweis</u> `a)` trivial.

<u>Beweis</u> `b)` Es gilt mit $\overline{\rho} = \min\left\{\dfrac{\alpha}{a}, \dfrac{\beta}{b}\right\}$,

$$\begin{aligned} Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))\left(\min\left\{\frac{\alpha}{a},\frac{\beta}{b}\right\}\right) &= 0 - \kappa_2\cdot(\gamma + c\cdot\overline{\rho})^c\cdot(\delta + d\cdot\overline{\rho})^d \\ &= -\kappa_2\cdot(\gamma + c\cdot\overline{\rho})^c\cdot(\delta + d\cdot\overline{\rho})^d, \end{aligned}$$

und falls $0 = \alpha\cdot\beta$, dann $\overline{\rho} = 0$, doch $0 < \gamma\cdot\delta$ und somit

$$Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))\left(\min\left\{\frac{\alpha}{a},\frac{\beta}{b}\right\}\right) = -\kappa_2\cdot\gamma^c\cdot\delta^d < 0,$$

und falls $0 < \alpha\cdot\delta$, dann $0 < \overline{\rho}$ und

$$\begin{aligned} Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))\left(\min\left\{\frac{\alpha}{a},\frac{\beta}{b}\right\}\right) &= -\kappa_2\cdot(\gamma + c\cdot\overline{\rho})^c\cdot(\delta + d\cdot\overline{\rho})^d \\ &\leq -\kappa_2\cdot(c\cdot\overline{\rho})^c\cdot(d\cdot\overline{\rho})^d < 0. \end{aligned}$$

Mit $\underline{\rho} = \min\left\{\dfrac{\gamma}{c}, \dfrac{\delta}{d}\right\}$ gilt

$$\begin{aligned} Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))\left(-\min\left\{\frac{\gamma}{c},\frac{\delta}{d}\right\}\right) &= \kappa_1\cdot(\alpha + a\cdot\underline{\rho})^a\cdot(\beta + b\cdot\underline{\rho})^b - 0 \\ &= \kappa_1\cdot(\alpha + a\cdot\underline{\rho})^a\cdot(\beta + b\cdot\underline{\rho})^b, \end{aligned}$$

und falls $0 = \gamma\cdot\delta$, dann $\underline{\rho} = 0$, doch $0 < \alpha\cdot\beta$ und somit

$$Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))\left(-\min\left\{\frac{\gamma}{c},\frac{\delta}{d}\right\}\right) = \kappa_1\cdot\alpha^a\cdot\beta^b > 0,$$

und falls $0 < \gamma\cdot\delta$, dann $0 < \underline{\rho}$ und

$$\begin{aligned} Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))\left(-\min\left\{\frac{\gamma}{c},\frac{\delta}{d}\right\}\right) &= \kappa_1\cdot(\alpha + a\cdot\underline{\rho})^a\cdot(\beta + b\cdot\underline{\rho})^b \\ &\geq \kappa_1\cdot\alpha^a\cdot\beta^b > 0. \end{aligned}$$

Für alle $x \in \left]-\min\left\{\frac{\gamma}{c},\frac{\delta}{d}\right\}\,\middle|\,+\infty\right[$ gilt

$$0 < (\gamma + c\cdot x)^{-1+c}\cdot(\delta + d\cdot x) \quad \text{und} \quad 0 < (\gamma + c\cdot x)^c\cdot(\delta + d\cdot x)^{-1+d},$$

und für alls $x \in \left]-\infty\,\middle|\min\left\{\frac{\alpha}{a},\frac{\beta}{b}\right\}\right[$ gilt

$$0 < (\alpha - a\cdot x)^{-1+a}\cdot(\beta - b\cdot x)^b \quad \text{und} \quad 0 < (\alpha - a\cdot x)^a\cdot(\beta - b\cdot x)^{-1+b},$$

so dass für alle $x \in \left]-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \mid \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}\right[$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))'(x) = &-\kappa_1 \cdot a^2 \cdot (\alpha - a\cdot x)^{-1+a} \cdot (\beta - b \cdot x)^b \\ &- \kappa_1 \cdot b^2 \cdot (\alpha - a \cdot x)^a \cdot (\beta - b\cdot x)^{-1+b} \\ &- \kappa_2 \cdot c^2 \cdot (\gamma + c\cdot x)^{-1+c} \cdot (\delta + d \cdot x)^d \\ &- \kappa_2 \cdot d^2 \cdot (\gamma + c \cdot x)^c \cdot (\delta + d\cdot x)^{-1+d} \\ &< 0, \end{aligned}$$

gilt. Offenbar gilt $-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \leq 0 \leq \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}$ und wegen

$$Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))\left(-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\}\right) < 0 < Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))\left(\min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}\right),$$

muss $-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \neq \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}$ gelten, so dass $\left]-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \mid \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}\right[$ ein echtes reelles Intervall ist, auf dem $Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))' < 0$ gilt. Via Stetigkeit ist $Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))$ somit auf $\left[-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \mid \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}\right]$ streng fallend. Da $Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))$ auf $\left[-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \mid \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}\right]$ überdies das Vorzeichen wechselt und stetig ist, hat $Q((\alpha,\beta,\gamma,\delta))$ in $\left]-\min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}\right\} \mid \min\left\{\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}\right\}\right[$ genau eine Nullstelle.

<u>Beweis</u> `c)` Via `b)` und den Voraussetzungen evident.

<u>Beweis</u> `d)` Im Inneren von d_4 via Hauptsatz implizite Funktionen und `a)`, `b)`, `c)` evident, am Rand von d_4 dann via Stetigkeit evident.

<u>Beweis</u> `e)`, `f)`, `g)`, `h)` Via `d)` und Voraussetzungen evident. □