Technische Universität Berlin **SS 2005**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Steffen Dereich Ausgabe: Di 7.06.2005
Abgabe in den Übungsgruppen: 15. - 17.06.05

9. Übungsblatt „Stochastik für Informatiker“
Markov-Ketten

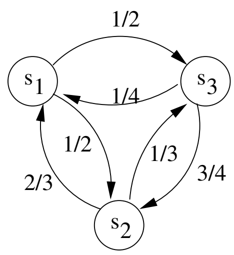
Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: **5 Punkte**
Betrachten Sie eine homogene Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ und Koppelung $p : S \times S \to [0,1]$ gegeben durch

$$p(i,j) = \begin{cases} 1/3 & \text{falls } j = i+1 \\ 2/3 & \text{falls } j = i-1 \text{ oder } i = j = 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie eine invariante Verteilungen der Markov-Kette. Gibt es weitere invariante Verteilungen? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Hausaufgabe: **7 Punkte**
Betrachten Sie die zu dem folgenden Graphen zugehörige (homogene) Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$:



- Geben Sie die Übergangsmatrix der Markov-Kette an.
- Ist die Markov-Kette irreduzibel? Ist sie aperiodisch?
- Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichgewichtsgleichung. Benutzen Sie hierzu die Vektor-Matrix Schreibweise.
- Berechnen Sie für die Startverteilung μ gegeben durch $\bar{\mu} = (1/2, 1/4, 1/4)$ die W'keiten $P(X_4 = s_i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

- Berechnen Sie die Anzahl der erwarteten Besuche in s_2 bis zum Zeitpunkt 3, wenn die Markov-Kette wie oben gestartet wird.
  Hinweis: Die Zufallsvariable der Anzahl der Besuche bis zum Zeitpunkt 3 kann man als Summe
  $$\sum_{j=0}^{3} 1_{\{X_j = s_2\}}$$
  darstellen.

3. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für homogene Markov-Ketten mit endlichem Zustandsraum wahr sind:

- Falls die Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch ist, existiert genau eine invariante Verteilung.
- Falls die Markov-Kette aperiodisch ist, existiert maximal eine invariante Verteilung.
- Falls die Markov-Kette nicht irreduzible ist, existieren mindestens zwei verschiedene invariante Verteilungen.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort und geben Sie ein Gegenbeispiel an, falls die Aussage nicht stimmt.

4. Hausaufgabe: **4 Punkte**

Es bezeichnen $(\pi^{(1)}(x))_{x\in S}$ und $(\pi^{(2)}(x))_{x\in S}$ zwei invariante Verteilungen einer Markov-Kette. Zeigen Sie, dass für $\alpha \in [0,1]$ die Gewichte

$$\pi(x) = \alpha\pi^{(1)}(x) + (1-\alpha)\pi^{(2)}(x) \qquad (x \in S)$$

wieder eine invariante Verteilung der Markov-Kette bilden.

Übungsaufgaben

1. Übungsaufgabe:

Entscheiden Sie für die im Tutorium angegebenen Markov-Koppelungen, ob die zugehörigen Markov-Ketten irreduzibel bzw. aperiodisch sind.

2. Übungsaufgabe:

Betrachten Sie die folgenden Fragestellungen für die im Tutorium angegebene Diagrammdarstellung einer Markov-Koppelung.

- Was ist die zugehörige Übergangsmatrix?
- Ist die Markov-Kette irreduzibel? Ist sie aperiodisch? Existieren invariante Verteilungen? Kann es mehrere verschiedene invariante Verteilungen geben?
- Berechnen Sie mit Hilfe der Vektor-Matrix Darstellung die W'keit $P(X_2 = s_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ für die Startverteilung $(\mu(x))_{x\in S}$ gegeben durch $\bar{\mu} = (1/3, 1/3, 1/3)$.
- Berechnen Sie alle invarianten Verteilungen der Markov-Kette.

3. Übungsaufgabe:

Zeigen Sie, dass für eine homogene Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ und Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$P^{s_i}(X_n = s_j) = (\mathbf{P}^n)_{i,j}$$

gilt.

4. Übungsaufgabe:

Es bezeichne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ und Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- Ist diese Markov-Kette irreduzibel bzw. aperiodisch?
- Wie kann man die W'keiten $P^{s_i}(X_8 = s_j)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ möglichst einfach berechnen?
- Berechnen Sie $P^{\mu}(X_8 = 2)$ für $(\mu(x))_{x\in S}$ gegeben durch $\bar{\mu} = (1/5, 1/5, 3/5)$?