

## 14. Übungsblatt „Stochastik für Informatiker“ Wiederholung

---

### Übungsaufgaben

#### 1. Übungsaufgabe:

Von 32 Karten werden jeweils 5 Karten an zwei Spieler verteilt.

- Geben Sie einen geeigneten W'keitsraum für dieses Experiment an.
- Wie groß ist die W'keit, dass der erste Spieler 4 Könige hat (Ereignis  $F$ )?
- Wie groß ist die W'keit, dass der zweite Spieler 4 Asse hat (Ereignisse  $G$ ), falls der erste Spieler 4 Könige hat?
- Sind die Ereignisse  $F$  und  $G$  unabhängig?

#### 2. Übungsaufgabe:

An einer mathematischen Übung sind 8 Studenten des ersten Semesters, 10 Studenten des 2. Semesters und 6 Studenten des 3. Semesters beteiligt. Die W'keit, dass eine abgegebene Arbeit fehlerfrei ist, sei 50% für die ersten, 70% für die zweiten und 90% für die dritten Semester. Wie groß ist die W'keit, dass eine vorliegende fehlerfreie Arbeit von einem Studenten des ersten Semesters stammt?

#### 3. Übungsaufgabe:

Eine Million Wähler müssen sich zwischen zwei Kandidaten  $A$  und  $B$  entscheiden. Angenommen 1000 Wähler haben sich bereits für den Kandidaten  $A$  entschieden, und die restlichen Wähler werfen eine faire Münze. Mit welcher W'keit wird Kandidat  $A$  gewinnen?

#### 4. Übungsaufgabe:

Es bezeichne  $N$  eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable.

- Wie kann man mithilfe von  $N$  eine  $\mathcal{N}(1, 4)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  definieren?
- Berechnen Sie  $P(X \geq 0)$ .

#### 5. Übungsaufgabe:

- Haben zwei identisch verteilte Zufallsvariablen die gleiche Varianz? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Berechnen Sie möglichst auf einfachem Wege die Varianz der Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

### 6. Übungsaufgabe:

Es sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie

$$E(X^3) \text{ und } E(X^4).$$

### 7. Übungsaufgabe:

Es sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie

$$E(X^3).$$

Hinweis: Der Erwartungswert lässt sich leicht aus den Berechnungen der letzten Übungsaufgabe ableiten.

### 8. Übungsaufgabe:

Berechnen Sie die Varianz einer Zufallsvariable  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F_X(t) = 1_{[0, \infty)}(t) \frac{1}{2} e^{-t}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

### 9. Übungsaufgabe:

Betrachten Sie die Funktion

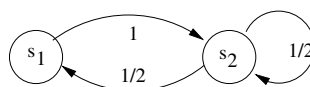
$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x - b| \geq a \\ c(a^2 - (x - b)^2), & |x - b| \leq a \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

wobei  $a$ ,  $b$  und  $c$  reelle Konstanten bezeichnen.

- Wie muss man  $c$  wählen, damit für gegebene Werte  $a > 0$  und  $b \in \mathbb{R}$ ,  $f$  die Dichte einer stetigen Zufallsvariable ist?
- Wie sind die Werte  $a$ ,  $b$  und  $c$  zu wählen, damit eine Zufallsvariable  $X$  mit Dichte  $f(x)$  gerade Erwartungswert 1 und Standardabweichung 1 hat?

### 10. Übungsaufgabe:

Angenommen ein Server befindet sich zufällig in zwei Zuständen  $s_1$  und  $s_2$ , wobei der Ablauf durch eine homogene Markov-Kette mit dem folgenden Diagramm beschrieben wird:



- Ist die Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch?

- Ist die Markov-Kette reversibel?
- Bestimmen Sie alle invarianten Verteilungen der Markov-Kette.
- Angenommen dem Betreiber des Servers entstehen 10 Cent Kosten, falls der Server im Zustand in einem Zeitschritt im Zustand  $s_2$  ist und 40 Cent Kosten, falls der Server im Zustand  $s_1$  ist. Mit welchen Kosten muss der Betreiber über einem Zweitintervall der Länge 1000 rechnen?

### 11. Übungsaufgabe:

Angenommen  $\mathbf{P}$  ist die symmetrische Übergangsmatrix einer homogenen irreduziblen Markov-Kette. Zeigen Sie, dass die Markov-Kette genau dann reversibel ist, wenn die Gleichverteilung auf den Zuständen eine invariante Verteilung ist.

### 12. Übungsaufgabe:

Es sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  verteilte Zufallsvariablen zu den unbekannt Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$ . Geben Sie einen Test an, der die Hypothese  $\mu = 0$  gegen die Alternative  $\mu \neq 0$  zum Niveau  $\alpha = 20\%$  testet. Verwirft der Test die Hypothese, falls in einer Stichprobe von 40 Messungen die Realisierungen  $\bar{X}_{40} = 3$  und  $\hat{s}_{40}^2 = 16$  gemessen wurden?