Technische Universität Berlin **SS 2005**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Steffen Dereich

Ausgabe: Di 12.04.2005
Abgabe in den Übungsgruppen: 20. - 22.04.05

1. Übungsblatt „Stochastik für Informatiker“
Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Hausaufgaben

1. Hausaufgabe: **6 Punkte**
Geben Sie ein stochastisches Modell für 3 züfällige Münzwürfe an.

i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt jeder Münzwurf “Kopf”?

ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Münzwürfe “Kopf” liefern?

iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Münzwurf “Kopf” zeigt und bei den weiteren beiden Münzwürfen mindestens einmal “Zahl” auftritt?

Geben Sie auch jeweils das zugehörige Ereignis explizit an.

2. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Es treffen sich 20 Personen auf gut Glück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben? Geben Sie ein geeignetes stochastisches Modell zur Modellierung der Geburtstage an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des entsprechenden Ereignisses. Ignorieren Sie hierbei Schaltjahre.

3. Hausaufgabe: **6 Punkte**
Es sei P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeigen Sie, dass für zwei Ereignisse A und B die folgenden Aussagen gelten:

i) $P(A^c) = 1 - P(A)$,

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

iii) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

4. Hausaufgabe: **4 Punkte**
Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von monoton fallenden Ereignissen, d.h. $A_i \supset A_j$ $(i \leq j)$. Zeigen Sie die folgende Stetigkeitsaussage

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n).$$

Übungsaufgaben

1. Übungsaufgabe:
Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen für beliebige Ereignisse A, B, C gelten:

i) $(A \backslash B) \cup (A \backslash C) = A \backslash (B \cap C)$

ii) $(A \cup B) \backslash C = A \cup (B \backslash C)$

iii) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.

2. Übungsaufgabe:
Beim Brennen von 50 Stücken empfindlicher Keramik gebe es vier Qualitätsstufen $0, 1, 2, 3$. Geben Sie einen geeigneten Merkmalraum Ω an und bestimmen Sie die Mengen, welche die folgenden Ereignisse repräsentieren:

$A_n =$ "das n-te Stück hat Qualitäts-Stufe 3",
$B_n =$ "das n-te Stück ergibt das erste Mal Stufe 3",
$C_n =$ "das n-te und $n+1$-te Stück sind die ersten beiden mit Stufe 3",
$D =$ "es tritt genau einmal die Stufe 3 auf".

Lassen sich B_n, C_n und D durch die Mengen A_i $(i = 1, \ldots, 50)$ ausdrücken?
Man stelle $E_m := \bigcup_{n=1}^{m} A_n$ $(1 < m \leq 50)$ mit Hilfe der Ereignisse B_i dar.

3. Übungsaufgabe:
Jemand möchte seinen Gebrauchtwagen verkaufen und erhält 5 Angebote. Jedes der Angebote liegt in der Menge $\Omega_1 = \{5000, 6000, 7000, 8000, 9000\}$. Geben Sie die folgenden Ereignisse in $\Omega = \Omega_1^5$ möglichst explizit an:

- $A =$ "kein Angebot liegt über 6000 Euro",
- $B =$ "alle Angebote liegen über 7000 Euro",
- $C =$ "alle 5 Angebote sind unterschiedlich",
- $D =$ "das beste Angebot beträgt 8000 Euro".

Berechnen Sie weiterhin, die Anzahl der Elemente der Mengen A, B, C und D. Angenommen die 5 Angebote werden zufällig Laplace-verteilt gewählt. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse $A, \ldots, D$?

4. Übungsaufgabe:
Es sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass

$$P(\infty\text{-viele der Ereignisse } A_n \text{ treten ein}) = 0.$$