1. Übungsaufg.

1.) Modellierung. Ω_1: Menge der Karten

- Merkmalraum: $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \in \Omega_1^{10} : \forall i,j = 1, \dots, 10$ mit $i \neq j$ gilt $\omega_i \neq \omega_j\}$
- W'keitsverteilung: $\mathbb{P}$ Gleichverteilung auf Ω
- Interpretation der Ausgangs $\omega \in \Omega$:

$$\omega = (\underbrace{\omega_1, \dots, \omega_5}_{\text{Karten des 1. Spielers}}, \underbrace{\omega_6, \dots, \omega_{10}}_{\text{Karten des 2. Spielers}})$$

2.) Es gilt

$$\mathbb{P}(F) = \frac{|F|}{|\Omega|}$$

und

- $|\Omega| = 32 \cdot \ldots \cdot 23 = \dfrac{32!}{22!}$
- $$|F| = \underbrace{28 \cdot 5!}_{\substack{\text{für die 5te Karte}\\ \text{hat man 28 Möglicht.;}\\ \text{weiterhin kann man}\\ \text{die 5 Karten auf}\\ \text{5! versch. Arten}\\ \text{anordnen}}} \cdot \underbrace{27 \cdot \ldots \cdot 23}_{\substack{\text{verbleibende}\\ \text{Möglichk. für}\\ \text{die Karten des}\\ \text{2ten Spielers}}} = 5! \, \frac{28!}{22!}$$

Also gilt

$$\mathbb{P}(F) = \frac{5! \, 28!}{32!}$$

3.) Es gilt

$$|F \cap G| = \underbrace{24 \cdot 5!}_{\substack{\text{Möglichkeiten} \\ \text{der Karten} \\ \text{des 1ten Sp.}}} \cdot 23 \cdot 5! = 24 \cdot 23 \cdot (5!)^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(F \cap G) = \frac{(5!)^2 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{32!} = \frac{(5!)^2 \cdot 24!}{32!}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(G \mid F) = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{5!\, 24!}{28!} > \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(F)$$

Die Ereignisse F und G sind nicht unabh.

2. Übungsaufgabe:

Wähle Ereignisse

- A_i : vorliegende Arbeit ist von einem Studenten des i-ten Semest.
- F : vorlieg. Arbeit ist fehlerfrei

$$\overset{\text{Bayes}}{\underset{\text{Umkehr-Formel}}{\Rightarrow}} \mathbb{P}(A_1 \mid F) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(F \mid A_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(F \mid A_i)} = \frac{8/24 \cdot 1/2}{\frac{8}{24} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{24} \cdot \frac{7}{10} + \frac{6}{24} \frac{9}{10}}$$

$$= \frac{2/12}{82/120} = \frac{20}{82} = \frac{10}{41}$$

3. Übungsaufg.:

Modellierung: $X_1, \ldots, X_n$ unabh. $\overset{\text{ident. vert.}}{}$ ZV'en mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. $(n = 999000)$

Dann gilt

$$\mathbb{P}(\text{Kandidat A gewinnt}) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > -1000\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\overline{X}_n > -\frac{1000}{n}\right)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\underbrace{\sqrt{n}\,\overline{X}_n}_{= S_n, \text{ da}} > -\frac{1000}{\sqrt{n}}\Big) \approx \Phi\left(\frac{1000}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}8413$$

$E(X_1) = 0$ und $\operatorname{var}(X_1) = 1$

4. Übungsaufgabe:

Laut Übungsaufgabe ist

$X := 2N + 1$

$N(1,4)$-verteilt.

Also gilt

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(2N + 1 \geq 0) = \mathbb{P}(N \geq -1/2) \approx 0{,}6915$$

5. Übungsaufgabe:

1.) Ja, da für eine ZV X

$$\operatorname{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

und $E(X) = -\int_{-\infty}^{0} F_X(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(t))\,dt$

$$E(X^2) = \int_0^\infty (1 - \underbrace{F_{X^2}(t)}_{= \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) + \mathbb{P}(X = -\sqrt{t})})\,dt = \int_0^\infty \left(1 - \left(F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) + \mathbb{P}(X = -\sqrt{t})\right)\right) dt$$

nur von der Vert.fkt. abh.

6. Übungsaufg.:

$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{ungerade Fkt.}} dx = 0$$

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{x^3}_{f} \cdot \underbrace{x e^{-\frac{x^2}{2}}}_{g'} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^3 \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 3x^2 e^{-x^2/2} dx}_{= 3 \operatorname{var}(X)}$$

$$= 3$$

7. Übungsaufgabe:

Die ZV.

$$\tilde{X} = \mu + \sigma \underset{\uparrow}{N} \quad N(0,1)\text{-verteilte ZV.}$$

ist $N(\mu, \sigma^2)$ - vert.

$$\Rightarrow E(X^3) = E(\tilde{X}^3) = E((\mu + \sigma N)^3)$$

$$= E(\mu^3 + 3\mu^2 \sigma N + 3\mu \sigma^2 N^2 + \sigma^3 N^3)$$

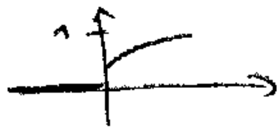
$$= \mu^3 + 3\mu^2 \sigma \underbrace{E(N)}_{=0} + 3\mu\sigma^2 \underbrace{E(N^2)}_{=1} + \sigma^3 \underbrace{E(N^3)}_{=0}$$

$$= \mu^3 + 3\mu\sigma^2.$$

8. Übungsaufgabe:

Fehler in der Aufgabenstellung: $F_X(t) = 1_{[0,\infty)}(t)\,\left(1 - \frac{1}{2} e^{-t}\right)$

Dann gilt



$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(t))\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty \underbrace{P(X^2 > t)}_{= 1 - F_{X^2}(t)}\,dt = \int_0^\infty P(X > \sqrt{t})\,dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\sqrt{t}}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subst. } u = \sqrt{t} \\ \Rightarrow \frac{dt}{du} = 2u}}{=} \int_0^\infty \underbrace{u}_{g}\,\underbrace{e^{-u}}_{h'}\,du$$

$$= \left[u\,(-e^{-u})\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3/4.$$

9. Übungsaufgabe:

1.) Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c \int_{b-a}^{b+a} (a^2 - (x-b)^2)\,dx$$

$$= c\left[2a^3 - \int_{-a}^{a} x^2\,dx\right]$$

$$= c\left[2a^3 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}\right] = c\left[2a^3 - \frac{2}{3}a^3\right]$$

$$= \frac{4}{3} c\,a^3$$

muss man $c = \frac{3}{4} a^{-3}$ wählen.

2.) Es gilt

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subst. } y = x-b}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (y+b)\, f(y+b)\, d$$

$$= \underbrace{b \int_{-\infty}^{\infty} f(y+b)\, dy}_{= 1 \text{, da } f \text{ W'keitsdichte ist}} + c \int_{-a}^{a} \underbrace{y(a^2-y^2)}_{\text{ungerade Fkt.}}\, dy = b$$

und

$$\operatorname{var}(X) = E((X-b)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y+b)\, dy = c \int_{-a}^{a} y^2 (a^2 - y^2)\, dy$$

$$= c \left[\frac{1}{3} a^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right]_{-a}^{a} = 2ca^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15} c a^5$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einsetzen} \\ \text{von } c}}{=} \frac{1}{5} a^2$$

Also sind die Konstanten wie folgt zu wählen

- $a = \sqrt{5}$
- $b = 1$
- $c = \frac{3}{4} 5^{-3/2}$.

10. Übungsaufgabe:

1) M-K ist irreduzibel, da (s_1, s_2, s_1) ein guter Pfad ist

— " — aperiodisch, da (s_2, s_2) ein guter Pfad der Länge 1 ist

2.) Die M-K ist reversibel:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.) Aus 2) folgt $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$

$\Rightarrow \pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ist die eindeutige invariante Vert. in Vektorschreibweise

4.) Sei für $i \in \mathbb{N}_0$

$$Y_i = \begin{cases} 40 \text{ Cent}, & \text{falls } X_i = s_1 \\ 10 \text{ Cent}, & \text{falls } X_i = s_2 \end{cases} = f(X_i) \quad \text{für} \quad f(s) := \begin{cases} 40, & s = s_1 \\ 10, & s = s_2 \end{cases}$$

Nun gilt nach Satz 6.21

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) = \frac{1}{3} \cdot 40 + \frac{2}{3} \cdot 10 = 20$$

fast sicher

Also entstehen dem Betreiber im Schnitt Kosten von 20 Cent pro Zeitintervall. Bei 1000 Zeitintervallen sind dies 200 €.

11. Übungsaufgabe:

Korrektur der Aufgabenstellung:

Angenommen $\mathbb{P}$ ist die symmetrische Übergangsmatrix einer homogenen M-K. Zeigen Sie, dass

- die M-K reversibel ist und
- die Gleichverteilung auf dem Zustandsraum eine invar. Verteilung ist.

1.) Setze $c_{i,j} = p(s_i, s_j)$ für $i,j = 1, \dots, n$.

Die Matrix C ist symmetrisch. Weiterhin ist

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} p(s_i, s_j) = 1$$

und damit gilt allgemein

$$p(s_i, s_j) = \frac{c_{i,j}}{c_i}$$

$\Rightarrow$ M-K ist reversibel für $C = \mathbb{P}$!

2.) Die durch

$$\mu(s_i) = \frac{c_i}{\sum_{j=1}^{n} c_j} = \frac{1}{n} \quad (i = 1, \dots, n)$$

geg. Fkt. definiert eine invar. Vert. (s. Ü-Blatt)

$\Rightarrow$ Gleichverteilung ist invariante Vert. !

12 Übungsaufgabe.

Laut Kapitel 8,3 ist

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\tau_\alpha}{\sqrt{n}}\hat{s}_n, \overline{X}_n + \frac{\tau_\alpha}{\sqrt{n}}\hat{s}_n\right] =: C$$

ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau α, wobei τ_α das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der t_{n-1}-Verteilung ist.

In unserem Fall:

- $n = 40$
- $\alpha = 20\% \leadsto \tau_\alpha = 1{,}3$

Laut Vorlesung hat der Test, der

- die Hypothese akzeptiert falls $C \ni 0$, und
- die — " — verwirft, — " — $C \not\ni 0$,

Niveau 20%.

Für unsere Stichprobe erhalten wir das Konfidenzinterv.

$$[2{,}178 ; 3{,}822]$$

Da die 0 nicht im Intervall enthalten ist, verwirft der Test die Hypothese.