1. Übungsaufgabe

a) Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 = 3\lambda - 2 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lösungsgesamtheit der homogenen DGL:

$$x_t^{\text{hom}} = A2^t + B \qquad (A, B \text{ freie Parameter})$$

Anpassen an die Anfangswerte:

$$\begin{cases} x_0 = A + B = 3 \\ x_1 = 2A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 5 \end{cases}$$

Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$\boxed{x_t = -2^{t+1} + 5}$$

b) Bestimmung einer Partikulärlösung
Ansatz: $x_t = Zt$
Dann

$$\begin{aligned} \text{DGL} \Leftrightarrow\ & Zt = 3(t-1)Z - 2(t-2)Z + 2 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = -3Z + 4Z + 2 \\ \Leftrightarrow\ & Z = -2 \end{aligned}$$

Dies entspricht der Partikulärlösung

$$x_t^{\text{part}} = -2t$$

und wir erhalten die Lösungsgesamtheit

$$x_t^{\text{inhom}} = A2^t + B - 2t$$

Anpassung an Anfangswerte

$$\begin{cases} x_0 = A + B = 3 \\ x_1 = 2A + B - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 3 \end{cases}$$

Lösung des AWP

$$\boxed{x_t = 3 - 2t}$$

2. Übungsaufgabe

- Betrag nach 10 Jahren:
$$K_{10} = (1+r)^{10}K_0 = (1,06)^{10}K_0$$
Also
$$K_{10} = 20000 \Leftrightarrow K_0 = \frac{20000}{(1,06)^{10}} \approx 11167,90$$
- Das auf dem Konto angelegte Geld K_0 führt zu einem Vermögen
$$K_1 = K_0(1,006)^{12}$$
nach einem Jahr. Der effektive Jahreszins ist gerade der Wert r_0 sodass
$$-K_0 + (1+r_0)^{-1}K_1 = 0,$$
d.h.
$$r_0 = (1,006)^{12} - 1 \approx 7,44\%.$$
- Nach 3 Jahren verfügt der Anleger über das Guthaben
$$K_3 = K_0(1,03)(1,035)(1,04).$$
Es ist nun r_0 zu bestimmen mit
$$-K_0 + K_3(1+r_0)^{-3} = 0,$$
d.h.
$$(1,03)(1,035)(1,04) = (1+r_0)^3 \Rightarrow r_0 \approx 3.499\%$$
- Wir bestimmen den Kapitalwert der Anlage mit jährlicher Ausschüttung für die im vorangehenden Teil berechneten effektiven Zinsrate. Ist der Kapitalwert negativ (bei positivem Anfangskapital), so ist die effektive Zinsrate bei jährlicher Auszahlung niedriger als bei Nichtausschüttung.

  Kapitalwert $= K_0[-1+0,03(1+r_0)^{-1}+0,035(1+r_0)^{-2}+1,04(1+r_0)^{-3}] \approx -0.0003K_0 < 0$

  Also ist die effektive Zinsrate bei jährlicher Ausschüttung niedriger.

3. Übungsaufgabe

$$\begin{aligned}\text{Kapitalwert in TEuro} &= -200 - 50(1,08)^{-1} + 100(1,08)^{-2} \\ &\quad + 100(1,08)^{-3} + 140(1,08)^{-4} \approx 21,725\end{aligned}$$

Die Investition ist also sinnvoll!

4. Übungsaufgabe

- Übergangsmatrix:
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Damit ist
$$p(1) = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)P = (0 \;\; 1/2 \;\; 1/2 \;\; 0)$$
und
$$p(2) = (5/12 \;\; 1/4 \;\; 1/6 \;\; 1/6)$$
- Die M-K ist irreduzibel wie man z.Bsp. am Pfad (1 2 4 2 3 1) sieht. Da
$$\text{ggT(Längen der alubten Pfade)} = \text{ggT}(\{2, 3, \dots\}) = 1$$
ist die M-K aperiodisch.
- Die Konfigurationen der Markov-Kette konvergieren gegen ein Gleichgewicht
- Das Gleichgewicht kann man durch Lösen der Matrixgleichung
$$(p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \;\; p_4) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \;\; p_4 \;\; 1)$$
berechnen. Die Lösung ist
$$p_1 = 1/4,\; p_2 = 3/8,\; p_3 = 1/4,\; p_4 = 1/8.$$

5. Übungsaufgabe

Die Folgekonfiguration berechnet sich in der M-K durch
$$\begin{cases} p_1(t+1) = \frac{2}{3}p_1(t) + \frac{1}{4}p_2(t) \\ p_2(t+1) = \frac{1}{3}p_1(t) + \frac{3}{4}p_2(t) \end{cases}$$
Da für alle Konfigurationen $p_1(t) + p_2(t) = 1$ gilt, erhalten wir die Differenzengleichung
$$p_1(t+1) = \frac{2}{3}p_1(t) + \frac{1}{4}(1 - p_1(t)) = \frac{1}{4} + \frac{5}{12}p_1(t) \tag{1}$$
Bestimmung einer Partikulärlösung mit dem Ansatz $p_1(t) = Z$:
$$\text{DGL} \Leftrightarrow Z = \frac{1}{4} + \frac{5}{12}Z \Leftrightarrow Z = \frac{3}{7}$$
Also ist $p_1^{\text{part}}(t) = \frac{3}{7}$ eine Partikulärlösung und
$$p_1^{\text{inhom}}(t) = A\Big(\frac{5}{12}\Big)^t + \frac{3}{7}$$

ist die Lösungsges. der inhomogenen DGL (1). Anpassung an den Anfangswert:

$$p_1(0) = A + \frac{3}{7} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{1}{14}.$$

Also gilt

$$\boxed{p_1(t) = \tfrac{1}{14}\left(\tfrac{5}{12}\right)^t + \tfrac{3}{7}}$$

Die Markov-Kette konvergiert gegen das Gleichgewicht $(3/7, 4/7)$.

6. Übungsaufgabe

Wir betrachten die Funktionen $g_1(x_1, x_2, x_3) := x_1 + 2x_2$ und $g_2(x_1, x_2, x_3) = x_2 - x_3$. Zur Bestimmung der Extremwerte unter den gegebenen Nebenbedingungen sind x_1, x_2, x_3 und λ_1, λ_2 zu bestimmen mit

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, x_2, x_3) - \lambda_1 \nabla g_1(x_1, x_2, x_3) - \lambda_2 \nabla g_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ g_1(x_1, x_2, x_3) = 2, \; g_2(x_1, x_2, x_3) = 3 \end{cases} \tag{2}$$

Es gilt

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 2x_2 - 4 \\ 4x_3 \end{pmatrix}$$

Also sind die Gleichungen in (2) äquivalent zu

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda_1 = 2 \\ 2x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 4 \\ 4x_3 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 2, \\ x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Das lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = -6/7, \; x_2 = 10/7, \; x_3 = -11/7, \; \lambda_1 = -26/7, \; \lambda_2 = 44/7.$$

(Prinzipiell reicht es die Lösungen für x_1, x_2 und x_3 zu bestimmen.) Da f stetig ist und

$$\lim_{|(x_1,x_2,x_3)| \to \infty} f(x_1, x_1, x_3) = \infty,$$

besitzt f ein globales Minimum (unter der Nebenbedingung). Da ∇g_1 und ∇g_2 auf dem kompletten Definitionsbereich ungleich 0 sind, kann dieses globale Minimum nur im Punkt

$$(x_1, x_2, x_3) = (-6/7, 10/7, -11/7)$$

liegen.

7. Übungsaufgabe

Die entsprechende Designmatrix ist

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_4 & z_4^2 \end{pmatrix}$$

und man erhält die optimalen Parameter via

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (X^* X)^{-1} X^* \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

8. Übungsaufgabe

Man erhält

$$\bar{x} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i = 1,5 \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} y_i = 25.$$

Also sind die besten Parameter gerade gegeben durch

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=0}^{4} (x_i - \bar{x})^2} = 9 \text{ und } a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} = 11,5.$$

Die beste lineare Interpolation liefert die Gerade

$$x \mapsto 11,5 + 9x.$$