Technische Universität Berlin **WS 2006/2007**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Dozent: Steffen Dereich Ausgabe: Do 21.12.2006
Betreuer: G. Gärtner, M. Spatz, Y. Xi keine Abgabe

Theor. Übungsblatt „Mathematische Zusatzübungen für WiIngs“
Theoretische Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Übungsaufgaben

1. Übungsaufgabe:
Man berechne die Lösung der folgenden Differenzengleichung

$$x_t = 3x_{t-1} - 2x_{t-2}$$

mit Anfangswerten $x_0 = 3$ und $x_1 = 1$. Was ist die Lösung der inhomogenen Differenzengleichung

$$x_t = 3x_{t-1} - 2x_{t-2} + 2$$

mit den obigen Anfangswerten.
Hinweis: Bestimmen Sie eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $(x_t) = (Zt)$ für einen freien Parameter Z.

2. Übungsaufgabe:

i) Welchen Betrag muss man heute anlegen, um bei 6% Zins (p.a.) nach 16 Jahren 20.000EUR zu erhalten?

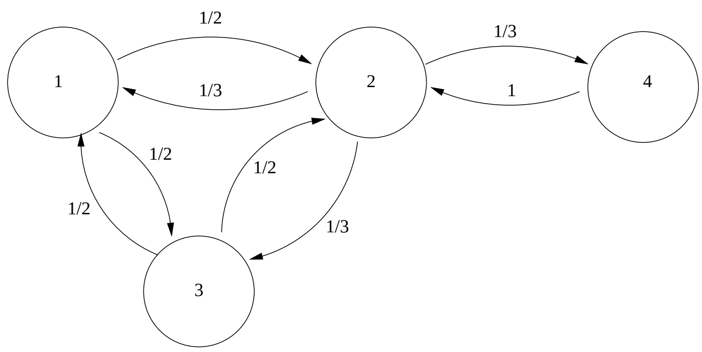
- Ein Konto wird monatlich mit $0,6\%$ verzinst. Wie hoch ist der effektive Jahreszins?
- Eine Anlage mit Laufzeit 3 Jahre wird wie folgt verzinst: Im ersten Jahr werden 3%, im zweiten Jahr $3,5\%$ und im dritten Jahr 4% Zinsen auf das Guthaben gezahlt.
  - Wie hoch ist der effektive Jahreszins, wenn die jährlichen Zinsen nicht ausgezahlt werden sondern dem Guthaben gutgeschrieben werden?
  - Ist der effektive Jahreszins höher oder niedriger, wenn die jährlichen Zinsen direkt ausgezahlt werden?

3. Übungsaufgabe:
Bei der Durchführung eines Projekts ergäbe sich der folgende Zahlungsstrom:

Jahr	0	1	2	3	4
Ausgaben	$200'$	$150'$	$30'$	$30'$	$50'$
Einnahmen		$100'$	$130'$	$130'$	$130' + 60'$

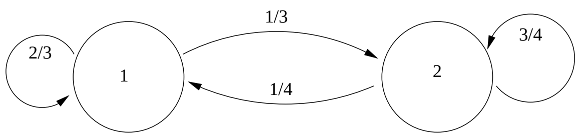
Treffen Sie die Investitionsentscheidung auf Grundlage der Kapitalwertmethode bei einem Kalkulationszins von 8%.

4. Übungsaufgabe:
Man betrachte folgende Markov-Kette:



- Man berechne für die Startkonfiguration $p(0) = (1, 0, 0, 0)$ die Konfiguration $p(2)$.
- Ist die Markov-Kette irreduzibel, ist sie aperiodisch?
- Konvergiert die Konfiguration $p(t) = p(0)P^t$ gegen ein Gleichgewicht?
- Existiert ein Gleichgewicht? Wenn ja, berechne man dieses.

5. Übungsaufgabe:
Angenommen wir starten folgende Markov-Kette in der Anfangskonfiguration $p(0) = (1/2, 1/2)$



- Man berechne die explizite Lösung von $p_1(t)$.
- Gegen welches Gleichgewicht konvergiert die Markov-Kette?

6. Übungsaufgabe:
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + 2x_3^2.$$

Man bestimme die lokalen Extremwerte von f unter den Nebenbedingungen

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

7. Übungsaufgabe:
Es sollen die Daten $(y_i)_{i=1,\ldots,4}$ möglichst gut mithilfe der Daten $x_1, \ldots, x_4$ und $z_1, \ldots, z_4$ durch

$$\hat{y}_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 z_i^2 \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

beschrieben werden. Erklären Sie wie man nun die optimalen Parameter a_1, a_2 und a_3 (die den quadratischen Fehler minimieren) bestimmen kann. Geben Sie insbesondere die Designmatrix explizit an.

8. Übungsaufgabe:
Man betrachte folgende Daten

x_i	0	1	2	3
y_i	12	19	31	38.

Für welche Parameter a_0, a_1 liefern die y_i-Approximationen

$$\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_i \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

den kleinsten quadratischen Fehler? Man berechne a_0 und a_1 explizit.