3. Übungsblatt
„Mathematische Zusatzübungen für WiIngs“
Regression, Extremwerte unter Nebenbedingungen

Hausaufgaben

Zur Bearbeitung der Hausaufgabe benutze man die auf der Homepage

`http://www.math.tu-berlin.de/~dereich/MaWi/`

bereitgestellten Daten!

1. Hausaufgabe: **15 Punkte**

Die in dem Datenfile bereitgestellten Datensätze beschreiben die logarithmierten Preise $(y_t)_{t=0,\dots,120}$ einer Aktie an 121 aufeinanderfolgenden Tagen. Angenommen die Preisentwicklung wird durch eine leicht gestörte Differenzengleichung

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \cdots + a_k y_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (t \in \mathbb{N} \cap [k, \infty))$$

der Ordnung $k \leq 4$ beschrieben. Hierbei bezeichne (ε_t) den Fehlerterm. Man möchte jeden Wert y_t ($t \in \{4, \dots, 100\}$) möglichst gut (d.h. mit minimalem quadratischen Fehler) durch

$$\hat{y}_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + \cdots + b_k y_{t-k}$$

approximieren, wobei $b_0, \dots, b_k$ freie Parameter sind.

- Man bestimme für beide Datensätze separat mit der Tabellenkalkulation die optimalen Parameter $b_0, \dots, b_k$ für jedes $k = 1, \dots, 4$ und berechne den mittleren quadratischen Approximationsfehler der Approximanden $(\hat{y}_t)_{t=4,\dots,100}$, d.h.

  $$\frac{1}{97} \sum_{t=4}^{100} |y_t - \hat{y}_t|^2.$$

  Welche Designmatrix muss zur Berechnung gewählt werden? Wie verändert sich der mittlere Fehler mit wachsender Ordnung k? Man stelle das Ergebnis in einem Plot dar.

- Man nutze nun die in Punkt 1 gewonnenen Parameter für $b_0, \dots, b_k$ zur Prognose von $(y_t)_{t=101,\dots,120}$. Wie groß ist nun hier der mittlere quadratischen Fehler in Abhängigkeit von $k \in \{1, \dots, 4\}$? Man erweitere den vorhergehenden Plot mit den neuen Fehlerwerten. Welcher Wert k liefert ein gutes Ergebnis?

2. Hausaufgabe: **13 Punkte**

Der Datensatz beschreibe 18 Messungen von zwei ökonomischen Kenngrößen. Es sollen nun die ersten 12 Messwerte $y_1, \dots, y_{12}$ möglichst gut mithilfe eines Polynoms f durch

$$\hat{y}_i = f(x_i)$$

beschrieben werden.

- Man finde die optimalen Parameter, wenn f ein Polynom vom Grade $n = 1, \dots, 5$ ist. Wie groß ist der mittlere quadratische Fehler in Abhängigkeit von n?
- Wie gut ist die Prognose für $y_{13}, \dots, y_{18}$, wenn man die in Teil 1 berechneten Parameter nutzt. Man berechne hierzu wieder den mittleren quadratischen Fehler. Welche Werte n liefern ein gutes Ergebnis?
- Man zeichne die Graphen der approximierenden Funktionen (Interpolationen) in einem Plot (möglichst inklusive der Messpunkte $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,18}$).

3. Hausaufgabe: (Theorie) **12 Punkte**

Betrachten wir die Cobb-Douglas-Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^{1/2} x_2 x_3^{3/4} \qquad (x_1, x_2, x_3 \in (0, \infty)).$$

Man berechne das Maximum von f unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 + x_3 = 2$. Ist das Ergebnis, das man mittels der Lagrangen Multiplikatoren erhält auch wirklich das Maximum?

Hinweis: Das Maximum lässt sich leichter berechnen, wenn man statt der Funktion f die Funktion $F = h \circ f$ für ein geeignetes wachsendes h analysiert.