Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Steffen Dereich

WS 06/07
2. Februar 2007

Klausur
Wirtschaftsmathematische Zusatzübungen für WiIngs

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Tutor: ....

Neben einem einseitig handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur ein nicht programmierbarer Taschenrechner erlaubt.

Von den 4 Aufgaben sind nur 3 Aufgaben zu bearbeiten. Die nicht bearbeitete Aufgabe ist durch Streichen der Aufgabe klar zu kennzeichnen. Die Klausur ist mit 15 (von 30) Punkten bestanden. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **100 Minuten**.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Frau K. hat eine Summe von 120.000 Euro angespart und möchte hiermit ihre Rente aufbessern. Hierzu geht sie am 2.2.07 zu einem Beratungsgespräch zu ihrer Bank.

i) Die Bank bietet ihr eine Anlage mit 2 Jahren Laufzeit an. Die Anlage verzinst das Geld im ersten Jahr mit $3,5\%$ und im zweiten Jahr mit 4%, wobei die jährlichen Zinseinnahmen direkt ausgezahlt werden. Berechnen Sie den effektiven Jahreszins der Anlage. (3 Punkte)

ii) Eine weitere Anlage hat eine Laufzeit von 3 Jahren mit jährlicher Verzinsung von $3,3\%$ (1. Jahr), 4% (2. Jahr) und $4,5\%$ (3. Jahr), wobei die Zinsen nicht ausgeschüttet werden. Berechnen Sie auch hier die effektive Zinsrate und vergleichen Sie sie mit dem Wert aus Teil i). (3 Punkte)

iii) Frau K. schildert nun dem Bankangestellten ihre Wunschanlage. Sie möchte die 120.000 Euro so anlegen, dass

- ihr in den Jahren 2007-2016 jährlich ein konstanter Betrag a zur Verfügung steht (der jeweils am 2.2. ausgezahlt wird), und
- am Ende der Laufzeit nach 10 Jahren (am 2.2.2017) nochmals 50.000 Euro ausgezahlt werden (inkl. Zinsen).

Welche jährliche Ausschüttung a kann der Bankangestellte Frau K. zusichern, wenn er mit einer Zinsrate von 4%p.a. rechnet? Zur Berechnung dürfen die Rentenformeln benutzt werden. (4 Punkte)

2. Aufgabe

10 Punkte

Betrachten Sie das erweiterte Cobweb-Modell, das die Preisentwicklung $(p_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eines Produkts durch die folgenden Gleichungen beshreibt:

- Angebotsmenge: $x_{t,a} = b_a + m_a(qp_{t-1} + (1-q)p_{t-2})$
- Nachfragemenge: $x_{t,n} = b_n - m_n p_t$
- $x_{t,n} = x_{t,a}$.

wobei wir als Parameter die folgenden Werte wählen: $m_a = \frac{19}{16}, b_a = -4, m_n = 1, b_n = 31, q = \frac{16}{19}$.

i) Geben Sie die Differenzengleichung für die Preisentwicklung (p_t) an und berechnen Sie den Gleichgewichtspreis des Modells. (4 Punkte)

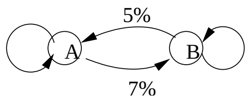
ii) Berechnen Sie die Lösungsgesamtheit der Differenzengleichung. (4 Punkte)

iii) Konvergiert das Modell für alle Anfangswerte gegen den Gleichgewichtspreis? Bitte begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

3. Aufgabe

10 Punkte

Firma A hat für eines ihrer Produkte als Hauptkonkurenten Firma B. Eine Markterhebung hat nun ergeben, dass das Kundenwechselverhalten durch folgende Markov-Kette beschrieben wird.



Heute (zum Zeitpunkt 0) hat Firma B doppelt soviele Kunden wie Firma A.

i) Geben Sie die Übergangsmatrix der Markov-Kette an. Was ist der relative Anteil der A Kundschaft im Folgejahr? (2 Punkte)

ii) Berechnen Sie eine explizite Formel für den relativen Anteil der A Kundschaft. (3 Punkte)

iii) Bestimmen Sie den Gleichgewichtszustand der Markov-Kette. (3 Punkte)

iv) Wie lange dauert es bis der Anteil der A Kundschaft das erste Mal über 37% steigt? (2 Punkte)

4. Aufgabe

10 Punkte

Firma A möchte die Auswirkungen des Geschäftsklimas und der Zinsrate auf die Nachfrage nach Ihren Produkten untersuchen. Hierzu hat Sie folgende Daten erhoben:

Datensatz	i	1	2	3	4
Geschäftsklima	k_i	7	4	5	8
Zinsrate (%)	r_i	5	1,5	2	6
Nachfrage	y_i	12	6,5	9,25	12,625

i) Approximieren Sie die y-Werte möglichst gut (mit kleinstem quadratischem Fehler) durch

$$\hat{y}_i = ak_i + b \qquad (a, b \in \mathbb{R} \text{ freie Parameter}).$$

Berechnen Sie die optimalen Parameter a und b. Welche Nachfrage-Prognose erhält man nun für das Geschäftsklima 6? (6 Punkte)

ii) Geben Sie die explizite Designmatrix (mit Zahlenwerten) für die Approximation

$$\hat{y}_i = ak_i + br_ik_i + c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ freie Parameter})$$

an. Geben Sie weiterhin eine Formel für die optimalen Parameter a, b und c an. (4 Punkte)

Musterlösung

Aufgabe 1:

i) Der Cash-Flow der Anlage bei einer Anlagesumme von 100 Euro ist (die Höhe der Anlagesumme hat keinen Einfluss auf die Berechnung der effektiven Zinsrate)

	0	1	2
Ausgaben	100		
Einnahmen		$3,50$	104

Also ist für $q = 1 + r$ (r Kalkulationszinsrate):

$$\begin{aligned} & \mathrm{KW} = -100 + 3,5\,q^{-1} + 104\,q^{-2} \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & q^2 - \frac{35}{1000}q - \frac{104}{100} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & q = q_{1/2} = \frac{35}{2000} \pm \sqrt{\left(\frac{35}{2000}\right)^2 + \frac{104}{100}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten als effektiven Jahreszins

$$r_i = q_1 - 1 \approx 3,7454\%.$$

ii) Bei einer Anlagesumme von 100 Euro hat die Anlage den Cash-Flow

	0	1	2	3
Ausgaben	100			
Einnahmen				a

wobei $a = 100 \cdot 1,033 \cdot 1,04 \cdot 1,045$ die Ausschüttung am Ende der Laufzeit bezeichnet. Also ist

$$\begin{aligned} & \mathrm{KW} = -100 + a\,q^{-3} \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & q^3 - 1,033 \cdot 1,04 \cdot 1,045 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & q = (1,033 \cdot 1,04 \cdot 1,045)^{1/3}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$r_i = q - 1 \approx 3,9322\%.$$

Die effektive Zinsrate ist höher als die der Anlage aus Teil i).

iii) Die vorchüssige Rentenformel liefert für eine jährliche Entnahme des Betrags a gerade das Guthaben

$$K_t = \left(K_0 - \frac{a(1+r)}{r}\right) \cdot (1+r)^t + \frac{a(1+r)}{r}$$

zum Zeitpunkt t. Zur Berechnung der Auszahlung a müssen wir also die Gleichung

$$50.000 = \left(120.000 - \frac{q}{r}a\right) \cdot q^{10} + \frac{q}{r}a$$

mit $q = 1 + r = 1,04$ lösen.

Wir erhalten
$$\frac{q}{r}(q^{10}-1)a = 120.000 \cdot q^{10} - 50.000$$
und damit ist
$$a \approx 10.221,51$$

Aufgabe 2:

i) Es gilt
$$b_a + m_a(qp_{t-1} + (1-q)p_{t-2}) = b_n - m_n p_t$$
Dies liefert die inhomogene Rekursionsgleichung (RGL)
$$m_n p_t + m_a q p_{t-1} + m_a(1-q)p_{t-2} = b_n - b_a$$
bzw. mit eingesetzten Parametern
$$p_t + p_{t-1} + \frac{3}{16}p_{t-2} = 35. \tag{1}$$
<u>Bestimmung des leichgewichtspreises:</u>
Ansatz: $p_t \equiv Z$ (Z Konstante)
Dann:
$$\begin{aligned}(1) \quad &\Leftrightarrow \quad Z + Z + \frac{3}{16}Z = 35\\ &\Leftrightarrow \quad Z = 16.\end{aligned}$$
Also ist 16 der Gleichgewichtspreis.

ii) Wegen Teil i) ist $p_t^{\text{part}} = 16$ einer Partikulärlösung der Differenzengleichung
<u>Bestimmung der Lösungsgesamtheit der homogenen RGL:</u>
Lösen der charakteristischen Gleichung:
$$\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{16} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}.$$
Insgesamt erhält man die Lösungsgesamtheit:
$$p_t^{\text{inhom}} = 16 + A(-3/4)^t + B(-1/4)^t \qquad (A, B \text{ freie Parameter})$$

iii) Da $|-3/3|$ und $|-1/4|$ kleiner als 1 sind, gilt für alle möglichen Anfangswerte:
$$\lim_{t\to\infty} p_t = 16.$$
Damit stabilisiert sich der Preis um den Gleichgewichtspreis.

Aufgabe 3:

i) Die Übergangsmatrix der Markov-Kette ist

$$P = \begin{pmatrix} 0.93 & 0.07 \\ 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$$

und die Startkonfiguration ist $p(0) = (1/3, 2/3)$. Also ist

$$p(1) = p(0) \cdot P \approx (34.33\%, 65.67\%).$$

ii) Einsetzen von $p_1(t) + p_2(t) = 1$ in

$$p_1(t+1) = 0,93p_1(t) + 0,05p_2(t)$$

liefert die RGL

$$p_1(t+1) = 0,88p_1(t) + 0,05.$$

<u>Bestimmung einer Partikulärlösung:</u>

Ansatz: $p_1(t) \equiv Z$

Einsetzen liefert

$$Z = 0,88\, Z + 0,05 \Leftrightarrow 0,12\, Z = 0,05 \Leftrightarrow Z = \frac{5}{12}.$$

Also ist die Lösungsgesamtheit:

$$p_1^{\text{inhom}}(t) = \frac{5}{12} + A(0,88)^t$$

Anpassung an den Startwert:

$$p_1(0) = \frac{5}{12} + A = 1/3 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{12}.$$

D.h.

$$\boxed{p_1(t) = \tfrac{5}{12} - \tfrac{1}{12}(0,88)^t}$$

iii) Aus Teil ii) folgt bereits, dass $\lim_{t\to\infty} p_1(t) = 5/12$. De shalb ist der Gleichgewichtszustand

$$(5/12, 7/12).$$

iv) Wir lösen

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{12}(0,88)^t \overset{!}{=} 0,37 \Leftrightarrow (0,88)^t = 5 - 0,37 \cdot 12$$

Die liefert einen Wert $t \approx 4,54$. Damit ist der A-Anteil zum Zeitpunkt 5 das erste Mal über 37%.

Aufgabe 4:

i) Man berechnet

$$\bar{k} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} k_i = 6 \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i = 10,09375.$$

Also sind die besten Parameter gerade gegeben durch

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{4}(k_i - \bar{k})y_i}{\sum_{i=0}^{4}(k_i - \bar{k})^2} = 1,5 \text{ und } b = \bar{y} - a\bar{k} = 1,09375.$$

Die beste lineare Interpolation ist also durch die Gerade

$$\zeta \mapsto 1,5 \cdot \zeta + 1,09375.$$

gegeben. Insbesondere, liefert dies die Nachfrage-Prognose 10,09375 für das Geschäftsklima 6.

ii) Die Designmatrix ist

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 35 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 5 & 10 & 1 \\ 8 & 48 & 1 \end{pmatrix}$$

und man kann die optimalen Parameter a, b und c durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (X^*X)^{-1}X^* \begin{pmatrix} 12 \\ 6,5 \\ 9,25 \\ 12,625 \end{pmatrix}$$

berechnen.