Wirtschaftsmathematische Zusatzübung

11. April 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Differenzengleichungen (Theorie)

1.1 Einführung

Im Folgenden werden mathematische Wachstumsprozesse in diskreter Zeit untersucht. Als Indexmenge für die Zeit wählen wir hierbei die natürlichen Zahlen inklusive 0 ($\mathbb{N}_0$). Wir bezeichnen mit y_t eine zum Zeitpunkt t gemessene Größe (z.Bsp. den Wert auf einem Bankkonto). In vielen praktischen Anwendungen lässt sich nun der Wert y_t als Funktion der Vorgängerwerte $y_{t-k}, \dots, y_{t-1}$ und möglicherweise t schreiben. Formal schreibt man

$$y_t = \varphi(y_{t-k}, \dots, y_{t-1}, t).$$

Alle Funktionen die, diese Vorschrift erfüllen werden Lösungen der *Rekursionsgleichung* (oder auch *Differenzengleichung*) (beschrieben durch φ) genannt. Die Funktion φ heißt *Rekursionsvorschrift* und der minimale Wert für k heißt *Ordnung* der Rekursionsgleichung. Da die Rekursionsvorschrift auf die letzten k Zeitpunkte zurückgreift, kann sie erst für $t \geq k$ angewandt werden. Für die Variablen $y_0, \dots, y_{k-1}$ müssen *Startwerte* vorgegeben werden. Wenn dies getan wurde, lassen sich alle weiteren Werte nacheinader durch Anwenden der Rekursionsvorschrift berechnen.

Beispiel 1.1 (Fibonacci-Zahlen)**.** Ein beliebtes Modell für eine Hasenpopulation wird durch folgenden rekursiven Mechanismus beschrieben: Die Population zum Zeitpunkt t entspricht der Summe aus der Population zum Zeitpunkt t-1 und dem Zeitpunkt t-2, in Form einer *rekursiven Vorschrift* ergibt sich:

$$y_t = \varphi(y_{t-2}, y_{t-1}) := y_{t-1} + y_{t-2} \tag{1.1}$$

Gibt man nun die Werte y_0 und y_1 vor, kann man schrittweise alle weiteren Werte $y_2, y_3, \dots$ berechnen. Z.Bsp. erhält man für die Startwerte $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ die Folgeglieder

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

In diesem Beispiel ist die Ordnung $k = 2$ und φ gegeben als

$$\varphi(x_{-2}, x_{-1}) = x_{-2} + x_{-1}$$

Häufig wird eine Differenzengleichung nicht mithilfe der Rekursionsvorschrift sondern mithilfe einer impliziten Bedingung zwischen Vorgänger- und Folgewerten beschrieben; z.Bsp. kann man die Differenzengleichung der Fibonacci-Zahlen durch die Gleichung

$$y_{t+1} - y_t = y_{t-1}$$

beschreiben.

1.2 Klassifikation von Differenzengleichungen

Wir werden hauptsächlich *lineare* Differenzengleichungen betrachten. Diese lassen sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$y_{t+k} + a_{k-1}(t)y_{t+k-1} + \cdots + a_0(t)y_t = b(t),$$

wobei $a_{k-1}, \ldots, a_0$ reelle (oder komplexe) Funktionen sind.

Beispiel 1.2. Beispiele für *lineare* Rekursionsgeichungen:

- $y_{t+1} = y_t + y_{t-1}$
- $y_{t+1} = ry_t + b$

Nichtlineare Rekursionsgleichungen werden zum Beispiel durch die Gleichungen

- $y_t = y_{t-1}y_{t-2}$
- $y_t = y_{t-1}^2$

beschrieben.

Bei linearen Rekursionsgleichungen unterscheidet man ferner zwischen

- *homogenen*, d.h. $b(t) \equiv 0$ und
- *inhomogenen*, d.h. $b(t) \not\equiv 0$

Gleichungen.

Frage 1.3. Welche der folgenden Gleichungen beschreiben (lineare) Differenzengleichungen? Von welcher Ordnung sind sie? Wie sieht für sie die Rekursionsvorschrift aus?

- $y_{2t} = y_t$
- $y_{t+3} + ty_t = t^2$
- $ty_{t+1} = y_t - y_{t-1}$

1.3 Lösen von homogenen Differenzengleichungen

Die Lösungstheorie der linearen Differenzengleichungen ähnelt stark der Lösungstheorie linearer Differentialgleichungen.
Wir betrachten zuerst *homogene* lineare Gleichungen. Hier kann man schnell verifizieren, dass für zwei Lösungen (x_t) und (y_t) und für beliebige reelle Zahlen λ, μ der Prozess $(\lambda x_t + \mu y_t)$ wieder eine Lösung der Differenzengleichung ist. Der Lösungsraum der Gleichung ist *linear*! Weiterhin ist die Lösung der Rekursionsgleichung eindeutig durch die k Startwerte beschrieben und damit der Lösungsraum k-dimensional!

Theorem 1.4. *Der Lösungsmenge einer* linearen homogenen *Rekursionsgleichung der Ordnung k ist ein k-dimensionaler Vektrorraum!*

Der Satz besagt, dass man zum vollständigen Verständnis des Lösungsraum, k linear unabhängige Lösungen finden muss. Alle anderen Lösungen lassen sich dann als Linearkombination dieser Lösungen schreiben.
Betrachten wir nun *homogene lineare* Rekursionsgleichungen mit *konstanten* Koeffizienten, d.h.

$$y_{t+k} + a_{k-1}y_{t+k-1} + \cdots + a_0 y_t = 0.$$

Wir machen zur Lösungsbestimmung folgenden *Ansatz*

$$y_t = \lambda^t$$

Einsetzen liefert nun die Gleichung

$$\lambda^{t+k} + a_{k-1}\lambda^{t+k-1} + \cdots + a_0\lambda^t = 0.$$

D.h. wir erhalten gerade dann eine Lösung, wenn

$$\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Diese Gleichung wird *charakteristische Gleichung* genannt. Es sind die Nullstellen eines Polynoms k-ter Ordnung zu bestimmen. Hat dieses Polynom k verschiedene Nullstellen, so erhält man direkt k linear unabhängige Lösungen.

Beispiel 1.5. Für die Fibonacci-Rekursionsgleichung ist gerade $a_1 = a_0 = -1$ zu wählen. Dies liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

mit Lösungen $\lambda_{1/2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Also lassen sich alle Lösungen in der Form

$$y_t^{\text{hom}} = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t$$

mit A, B geeignet darstellen. Es stellt sich nun noch die Frage nach der expliziten Lösung mit Startwerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$. Zur Bestimmung von A und B ist noch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} A + B = y_0 = 0 \\ \lambda_1 A + \lambda_2 B = y_1 = 1 \end{cases}$$

zu lösen. Wir erhalten

$$y_t = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\lambda_1^t - \lambda_2^t\right].$$

Was macht man bei mehrfachen Nullstellen?

Hat die charakteristische Gleichung in λ eine n-fache Nullstelle so erhält man als linear unabhängige Lösungen gerade:

$$\begin{aligned} y_t^{(1)} &= \lambda^t \\ \vdots &= \vdots \\ y_t^{(n)} &= t^{n-1}\lambda^t \end{aligned}$$

Was macht man bei nicht reellen Nullstellen?

Wenn die Koeffizienten $a_{k-1}, \dots, a_0$ reell sind, dann gehört zu jeder nicht reellen Nullstelle $\lambda_1 = a + ib$ eine Nullstelle in $\lambda_2 = a - ib$ mit gleicher Ordnung. Ist die Nullstelle von erster Ordnung so lassen sich die zwei komplexen Lösungen

$$y_t^{(1)} = {\lambda_1}^t \text{ und } y_t^{(2)} = {\lambda_2}^t$$

wie folgt in zwei linear unabhängigen reelle Lösungen umformen: sei $\lambda_1 = re^{i\psi}$ die Polarkoordinatendarstellung von λ^1; dann sind

$$\begin{aligned} \bar{y}_t^{(1)} &= \frac{1}{2i}[y_t^{(1)} - y_t^{(2)}] = r^t \frac{e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{2i} = r^t \sin(\psi t) \\ \bar{y}_t^{(2)} &= \frac{1}{2}[y_t^{(1)} + y_t^{(2)}] = r^t \frac{e^{i\psi} + e^{-i\psi}}{2} = r^t \cos(\psi t) \end{aligned}$$

zwei linear unabhängige reelle Lösungen. Für Nullstellen n-ter Ordnung erhält man analog die Lösungen

$$\begin{aligned} \bar{y}_t^{(2,1)} &= tr^t \sin(\psi t) \text{ und } \bar{y}_t^{(2,2)} = tr^t \cos(\psi t) \\ \vdots &= \vdots \\ \bar{y}_t^{(n,1)} &= t^{n-1}r^t \sin(\psi t) \text{ und } \bar{y}_t^{(n,2)} = t^{n-1}r^t \cos(\psi t). \end{aligned}$$

1.4 Lösen von inhomogenen Differenzengleichungen

Betrachten wir nun eine allgemeine *inhomogene* Differenzengleichung. Angenommen (y_t^{part}) bezeichne eine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung (*Partikulärlösung*). Betrachten wir nun für eine weitere Lösung (y_t) den Prozess $(\Delta y_t) = (y_t - y_t^{\text{part}})$ so sieht man leicht dass

$$\Delta y_{t+k} + a_{k-1}(t)\Delta y_{t+k-1} \cdots + a_0(t)\Delta y_t = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

und somit (Δy_t) die Lösung der zugehörigen *homogenen* Rekursionsgleichung ist.

Theorem 1.6. *Der Lösungsraum einer inhomogenen Rekursionsgleichung besteht gerade aus allen Folgen* (y_t^{inhom}) *der Form*

$$y_t^{\text{inhom}} = y_t^{\text{part}} + y_t^{\text{hom}},$$

wobei (y_t^{hom}) *eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung und* (y_t^{part}) *eine Partikulärlösung bezeichnet.*

Im inhomogenen Fall sind also

- der Lösungsraum der homogenen Gleichung und
- eine Partikulärlösung

zu bestimmen.

2 Differenzengleichungen (Anwendungen)

2.1 Verzinsung von Sparguthaben

Sparguthaben ohne Kontobewegungen

Bezeichne nun K_t den Wert eines Sparguthabens zum Zeitpunkt t. Wenn wir keinen Kontozugriff auf das Konto tätigen entwickelt sich der Wert gemäß der homogenen Gleichung

$$K_{t+1} = (1 + r(t))K_t$$

wobei $r(t)$ die *Zinsrate* zum Zeitpunkt t bezeichnet. Diese Gleichung hat als allgemeine Lösung

$$K_t = A \prod_{l=0}^{t-1} (1 + r(t)),$$

wobei A ein frei wählbarer Parameter ist. Insbesondere erhalten wir für eine konstante Zinsrate $r(t) \equiv r$:

$$K_t = A(1 + r)^t.$$

Wenn wir mit v den Anfangswert des Kontos bezeichnen ergibt sich $A = v$ und damit

$$\boxed{K_t = (1 + r)^t v.}$$

Sparguthaben mit konstanter Einzahlung (nachschüssige Rentenformel)

Betrachten wir nun ein Sparguthaben mit

- konstanter Einzahlung b (ab dem 1. Jahr)
- konstanter Zinsrate r
- Anfangswert v

Das entsprechende Kontoguthaben K_t löst die *inhomogene* Differenzengleichung

$$K_{t+1} = (1 + r)K_t + b. \tag{2.1}$$

Wir bestimmen zuerst eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $K_t \equiv Z$ für eine Konstante Z. Dann:

$$(2.1) \iff Z = (1+r)Z + b \iff Z = -b/r$$

und damit ist

$$K_t^{\text{part}} = -b/r$$

eine Partikulärlösung. Die zu (2.1) gehörende homogene Gleichung ist gerade $K_{t+1} = (1+r)K_t$. Sie wurde bereits oben gelöst und wir erhalten als allgemeine Lösung der Gleichung (2.1)

$$K_t^{\text{inhom}} = A(1+r)^t - b/r$$

Es verbleibt noch die allgemeine Lösung an den Startwert anzupassen:

$$A(1+r)^0 - b/r = K_0 = v \iff A = v + b/r.$$

Wir erhalten als Lösung

$$\boxed{K_t = (v + b/r)(1+r)^t - b/r.}$$

Diese Formel wird *nachschüssige Rentenformel* genannt.

Beispiel 2.1. Man berechne für folgende Anlage das Endvermögen im 10. Jahr

- Einzahlung: 1000€, jährlich in den Jahren 0-9
- Zinssatz: 4%

Wir wählen in der nachschüssigen Rentenformel $r = 0,04 = 4\%$, $b = 1000€$ und $v = 1000€$ und erhalten für das 10-te Jahr

$$K_{10} = \underbrace{(1000 + 1000/0,04)(1,04)^{10} - 1000/0,04}_{\text{nachsch. Rentenformel}} - 1000 = 12486,35$$

Bei der Berechnung ziehen wir 1000€ ab, da im 10. Jahr keine Einzahlung erfolgt.

Sparguthaben mit wachsenden Einzahlungsbeträgen

Betrachten wir nun die Entwicklung eines Sparguthabens mit

- konstanter Zinsrate r
- Einzahlung $b(1+q)^t$ zum Zeitpunkt $t+1$ (ab Zeitpunkt 1)
- Startvermögen v

Das Sparguthaben wird mittels der *inhomogenen* Differenzengleichung

$$K_{t+1} = (\underbrace{1+r}_{=:\tilde{r}})K_t + b(\underbrace{1+q}_{=:\tilde{q}})^t \tag{2.2}$$

beschrieben. Wir kennen bereits die Lösungen der homogenen Gleichung und es reicht eine Partikulärlösung zu finden. Wir machen den Ansatz $K_t = Z\tilde{q}^t$. Dann gilt:

$$(2.2) \iff Z\tilde{q}^{t+1} = Z\tilde{r}\tilde{q}^t + b\tilde{q}^t \iff Z\tilde{q} = Z\tilde{r} + b \iff Z = -\frac{b}{\tilde{r} - \tilde{q}}$$

(wenn wir annehmen, dass $q \neq r$). Dies liefert die allgemeine Lösung:

$$K_t^{\text{inhom}} = A(1+r)^t - \frac{b}{r-q}(1+q)^t,$$

wobei A wieder einen freien Parameter bezeichnet. Anpassen an den Startwert liefert nun:

$$K_0 = A - \frac{b}{r-q} = v \iff A = v + \frac{b}{r-q}$$

und wir erhalten

$$\boxed{K_t = \left(v + \tfrac{b}{r-q}\right)(1+r)^t - \tfrac{b}{r-q}(1+q)^t}$$

2.2 Tilgungsrechnung

Im Rahmen der wirtschaftsmathematischen Zusatzübungen für Wirtschaftsingenieure werden nur die Standardformen der Tilgungsrechnung betrachtet. Andere in der Finanzierungspraxis anzutreffende Formen wie beispielsweise Kredite mit tilgungsfreien Zeiten, Tilgung mit Aufgeld (Agio) oder Tilgung mit „glatten Zahlen“ sind nicht Gegenstand dieses Anhangs.

Standardformen der Tilgung

Die Rückzahlung eines Kredits erfolgt in periodischen Zeitabständen (z.B. jährlich) in Teilbeträgen, jeweils zum Ende (nachschüssig) einer Zahlungsperiode. Den jährlichen Zahlungsbetrag bezeichnet man als Annuität. Die Annuität setzt sich aus der periodischen Tilgung und der periodischen Zinszahlungen zusammen, es gilt also:

$$\text{Annuität} = \text{Zinszahlung} + \text{Tilgung} \ (A_t = Z_t + T_t)$$

Zwei Modelle sind in diesem Zusammenhang relevant (siehe unten Skizze).

Konstante Annuitäten:
Bei konstanten Annuitäten bleibt der periodische Zahlungsbetrag konstant und teilt sich in die Zins-und Tilgungzahlungen auf. Daraus ergibt sich, dass mit fortschreitender Zeit

der Anteil der Zinszahlungen sinkt und der Anteil der Tilgung steigt.

Variable Annuitäten:
Bei der Rückzahlung mit variablen Annuitäten bleibt der periodische Tilgungsbetrag konstant, während die Zinszahlungen von Periode zu Periode geringer werden.

Konstante Annuitäten

Die Berechnung des konstanten Annuitätenbetrags kann aus der nachschüssigen Rentenformel abgeleitet werden:

$$K_t = (K_0 - A/r)(1+r)^t + A/r$$

Die Variablen werden folgendermaßen interpretiert:

- Zinssatz (dezimale Schreibweise): r
- Kreditbetrag K_0
- Restschuld zur Zeit t: K_t
- nachschüssige Annuität: A

Für den „normalen“ Fall, dass der gesamte Kreditbetrag über die Laufzeit t = n getilgt wird, gilt demzufolge

$$K_n = 0 = (K_0 - A/r)(1+r)^n + A/r$$

Die zu zahlende Annuität erhält man durch Auflösen der obigen Formel nach A:

$$A = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} K_0.$$

Bei konstanten Annuitäten sind sowohl die Zinsbeträge als auch die Tilgungsbeträge von Periode zu Periode verschieden. Es gilt:

$$A = Z_t + T_t = Z_{t-1} + T_{t-1}$$

Einsetzen von $Z_t = r * K_{t-1}$ liefert

$$r * K_{t-1} + T_t = r * K_{t-2} + T_{t-1}$$

Nach T_t aufgelöst:

$$\begin{aligned} T_t &= r * (K_{t-2} - K_{t-1}) + T_{t-1} \\ &= r * T_{t-1} + T_{t-1} \\ &= T_{t-1} * (1+r) \\ &= T_1 (1+r)^{t-1}. \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Formel zur Berechnung der Annuität lassen sich die Zinszahlungen berechnen nach:

$$Z_t = A - T_t$$

erhalten wir als Formel zur Berechnung des Zinsbetrages für eine beliebige Periode t:

$$Z_t = A - [T_1 * (1+r)^{t-1}]$$

Beispiel 2.2. Ein Kredit von 20.000, – € sei in 4 Jahren mit konstanten Annuitäten bei einem Zinssatz von 7% p.a. zu tilgen. Wie hoch ist die jährliche Belastung? Wie sieht der Tilgungsplan für die 4 Jahre aus?

Entsprechend der oben entwickelten Formel erhalten wir für

$$K_n = K_4 = 0, \ K_0 = 20.000, \ n = 4 \text{ und } r = 0,07$$

die Annuität $A = 5.904,56$ €.

Der Tilgungsplan sieht wie folgt aus (nachschüssige Zahlung):

Jahr t	Schuld K_t	Zinsen Z_t	Tilgung T_t	Annuität A_t
0	20.000, 00			
1	15.495, 44	1.400, 00	4504, 56	5.904, 56
2	10.675, 56	1.084, 68	4.819, 88	5.904, 56
3	5.518, 29	747, 29	5.157, 27	5.904, 56
4	0	386, 27	5.518, 29	5.904, 56

Variable Annuitäten

Im Fall variabler Annuitäten basiert die Berechnung auf folgender Überlegung. Bei der Tilgung mit variablen Annuitäten ist der Tilgungsbetrag von Periode zu Periode konstant, d.h. $T_t \equiv T$. Die verbleibende Restschuld im Jahr t ist also

$$K_t = K_{t-1} - T = K_0 - t * T$$

Der Zinsbetrag pro Periode entspricht der Restschuld, multipliziert mit dem Kreditzins:

$$Z_t = r * K_{t-1}.$$

Zur Berechnung des variablen Annuitätenbetrags werden Tilgungs- und Zinszahlung addiert. Da die Tigungszahlungen über den Tilgungszeitraum konstant bleiben, ergibt sich folgende Formel:

$$A_t = Z_t + T$$

Setzt man nun voraus, dass der Kredit in n Jahren abgezahlt werden soll so ergibt sich die Tilgungsrate $T = K_0/n$. Einsetzen in die obigen Formeln liefert in diesem Fall gerade:

$$K_t = K_0 - [t * (K_0/n)] \quad \text{und} \quad Z_t = r * [1 - (t-1)]/n * K_0.$$

Beispiel 2.3. Ein Kredit von 20.000,- € sei in 4 Jahren mit konstanter Tilgungsrate bei einem Zinssatz von 7% p.a. zu tilgen. Wie hoch ist die jährliche Belastung? Wie sieht der Tilgungsplan für die 4 Jahre aus?

Der Tilgungsplan sieht wie folgt aus (nachschüssige Zahlung):

Jahr t	Schuld K_t	Zinsen Z_t	Tilgung T_t	Annuität A_t
0	20.000,00			
1	15.000,00	1.400,00	5.000,00	6.400,00
2	10.000,00	1.050,00	5.000,00	6.050,00
3	5.000,00	700,00	5.000,00	5.700,00
4	0,00	350,00	5.000,00	5.350,00

2.3 Das Cobweb-Modell

Ein weiteres Anwendungsbeispiel für lineare, inhomogene Differenzengleichungen 1.Ordnung ist das Cobweb-Modell. Das Cobweb-Modell dient zur Erlärung von Preis- und Mengenschwankungen für ein auf dem Markt befindliches Gut (Kaffee , Schweinefleich etc).

HERLEITUNG:
Bei diesem volkswirtschaftlichen Modell werden folgende Annahmen getroffen:

1. Ein Produzent setzt seine Angebotsmenge $x_{t,a}$ aufgrund des Produktverkaufspreises der Vorperiode (p_{t-1}) fest:
$$x_{t,a} = A(p_{t-1}) = b_a + m_a p_{t-1} \qquad (b_a < 0, m_a > 0 \text{ Parameter}).$$
2. Der Konsument legt seine Nachfragemenge $x_{t,n}$ anhand des Preises in der Periode t fest:
$$x_{t,n} = N(p_t) = b_n - m_n p_t \qquad (b_n, m_n > 0 \text{ Parameter}).$$
3. Alle Waren werden am Markt verkauft, es besteht also ein Marktgleichgewicht: $x_{t,a} = x_{t,n}$.

Kombinieren der obigen drei Bedingungen liefert die Differenzengleichung

$$p_t = -\frac{m_a}{m_n} p_{t-1} + \frac{b_n - b_a}{m_n}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differenzengleichung 1. Ordnung mit konst. Koeffizienten. Als Lösung erhält man:

$$p_t = \Big(p_0 - \frac{b_n - b_a}{m_n + m_a}\Big)\Big(-\frac{m_a}{m_n}\Big)^t + \frac{b_n - b_a}{m_n + m_a}$$

Interessant für uns ist nun, wie sich der Preis langfristig entwickeln wird. Dafür wollen wir den Grenzwert von p_t für $t \to \infty$ betrachten:

$$\lim_{t\to\infty} p_t = \lim_{t\to\infty} (p_0 - \frac{b_n - b_a}{m_n + m_a})(-\frac{m_a}{m_n})^t + \frac{b_n - b_a}{m_n + m_a}$$

Möglich sind drei verschiedene Fälle der Preisentwicklung:

1. $m_a < m_n$

   $$\lim_{t\to\infty} p_t = \frac{b_n - b_a}{m_n + m_a}$$

   Der Preis nähert sich langfristig dem Gleichgewichtspreis an.

2. $m_a = m_n$

   für gerade t: $p_t = p_0$

   für ungerade t: $p_t = 2\frac{b_n - b_a}{m_n + m_a} - p_0 = \frac{b_n - b_a}{m_n} - p_0$

   Die Preisschwankungen bleiben konstant, der Preis oszilliert also.

3. $m_a > m_n$

   Es existiert kein Grenzwert und die Preise explodieren.

BEISPIELE:

1.

$$x_{t,a} = \frac{3}{2}p_{t-1} - 10;\ x_{t,n} = 130 - 2p_t;\ p_0 = 20$$

$$x_{t,a} = x_{t,n} \Longrightarrow p_t = 70 - \frac{3}{4}p_{t-1}$$

$$p_1 = 55;\ p_2 = 28,75;\ p_3 = 48,4375$$

Gleichgewichtspreis ?

$$\Longrightarrow p_G = 40$$

2.

$$x_{t,a} = \frac{3}{2}p_{t-1} - 10;\ x_{t,n} = 130 - \frac{3}{2}p_t;\ p_0 = 20$$

$$x_{t,a} = x_{t,n} \Longrightarrow p_t = \frac{280}{3} - p_{t-1}$$

$$p_1 = \frac{220}{3};\ p_2 = \frac{60}{3} = 20;\ p_3 = \frac{220}{3}$$

Gleichgewichtspreis?

$$\Longrightarrow p_G = \frac{280}{6} = \frac{140}{3}$$ (wird jedoch **nicht** erreicht!)

3.

$$x_{t,a} = \frac{3}{2}p_{t-1} - 10;\ x_{t,n} = 130 - \frac{5}{4}p_t,\ p_0 = 20$$

$$x_{t,a} = x_{t,n} \Longrightarrow p_t = 112 - 1,2p_{t-1}$$

$$p_1 = 88;\ p_2 = 6,4;\ p_3 = 104,31$$

Gleichgewichtspreis?

$$\Longrightarrow p_G = 50,91 \text{ (wird auch } \underline{\textbf{nicht}} \text{ erreicht!)}$$

ANMERKUNG:
Oft ist es der Fall, dass Angebot und Nachfragefunktion nicht **linear** sind; somit auch nicht die Differenzengleichungen lösen. Dies führt in der Regel zu keiner geschlossenen Lösung. Man muss dann die Lösungsfolge iterativ bestimmen.

2.4 Eine erweiterte Version des Cobweb-Modells

Wir betrachten nun eine Erweiterung des Cobweb-Modells in dem die letzten zwei Preise ausschlaggebend für die Produktionsmenge sind:

Annahmen des Modells:

- Produzenten: Die produzierte Menge hängt von den Preisen der beiden Vorperioden ab:

$$x_{t,a} = b_a + m_a * (q * p_{t-1} + (1-q) * p_{t-2}) \quad (b_a < 0, m_a > 0, q \in (0,1))$$

- Käufer: Die aktuelle Verkaufszahl richtet sich nach dem aktuellen Preis:

$$x_{t,n} = b_n - m_n p_t \quad (b_n > 0, m_n > 0)$$

- Der aktuelle Preis ist gerade der Preis, so dass alle Waren am Markt verkauft werden, d.h.:

$$x_{t,n} = x_{t_a} \quad \text{(Produktionsmenge = Nachfrage)}$$

Frage: Welche Gleichgewichtspreise hat das erweiterte Modell im Vergleich zum Standardmodell?

Ansatz: $p_t \equiv Z$ (konstanter Preis: Gleichgewichtspreis)

- im Standardmodell:

$$b_n - m_n Z = b_a + m_a Z \Rightarrow Z = \frac{b_n - b_a}{m_n + m_a}$$

- im erweiterten Modell:

$$b_n - m_n Z = b_a + m_a \underbrace{(qZ + (q-1)Z)}_{Z} \Rightarrow Z = \frac{b_n - b_a}{m_n + m_a}$$

Im Standard- und im erweiterten Cobweb-Modell stimmen die Gleichgewichtspreise überein.

Aufgabe: Man bestimme die Lösungsgesamtheit im erweiterten Modell.

Im Modell gilt

$$\begin{aligned} x_{t,n} &= x_{t,a} \\ \Leftrightarrow b_n - m_n p_t &= b_a + m_a * (q * p_{t-1} + (1-q) * p_{t-2}) \end{aligned}$$

und wir erhalten die *Differenzengleichung*

$$m_n p_t + m_a q p_{t-1} + m_a(1-q)p_{t-2} = \underbrace{b_n - b_a}_{\text{Inhomogenität}} .$$

<u>Partikulärlösung: (Gleichgewichtspreis)</u>

$$p_t^{\text{part}} = \frac{b_n - b_a}{m_n + m_a}$$

<u>Bestimmung der Lösung der homogenen Differenzengleichung:</u>

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} & m_n \lambda^2 + m_n q \lambda + m_a(1-q) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_{1/2} = -\frac{q m_a}{2 m_n} \pm \frac{1}{2 m_n} \sqrt{m_a^2 q^2 - 4 m_a m_n (1-q)} \end{aligned}$$

<u>Lösung, falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$:</u>

$$p_t^{\text{inhom}} = \frac{b_n - b_a}{m_n + m_a} + A\lambda_1^t + B\lambda_2^t,$$

wobei A und B freie Parameter sind, die in Abhängigkeit von den Startwerten gewählt werden müssen.

Beispiel 2.4. Wir betrachten das Modell für die Parameter $m_n = 1, m_a = 2, b_a = -2, b_n = 10$.

Frage: Was ist der Gleichgewichtspreis?

$$\frac{b_n - b_a}{m_n + m_a} = \frac{12}{3} = 4$$

Frage: Für welche $q \in (0,1)$ konvergiert das erweiterte Cobweb-Modell gegen das Gleichgewicht?

An der allgemeinen inhomogene Lösung sieht man, dass im Allgemeinen Konvergenz gegen den Gleichgewichtspreis gerade dann vorliegt, wenn $|\lambda_1|$ und $|\lambda_2$ kleiner als 1 sind:

$$\text{Konvergenz gegen das Gleichgewicht} \Leftrightarrow \underbrace{\max(|\lambda_1|\,, |\lambda_2|)}_{=:k} < 1.$$

In unserem Beispiel:

$$\lambda_{1/2} = -q \pm \frac{1}{2}\sqrt{4q^2 - 8(1-q)} = q \pm \sqrt{q^2 + 2q - 2}$$

Hierbei ist der Wurzelterm gerade dann reell, wenn $q \geq -1 + \sqrt{3}$. Wir setzen die Analyse mit einer Fallunterscheidung fort.

<u>1.Fall:</u> $q \in [-1+\sqrt{3}, 1)$

$$\begin{aligned} & k = q + \sqrt{q^2 + 2q - 2} = 1 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{q^2 + 2q - 2} = 1 - q \\ & \Leftrightarrow q^2 + 2q - 2 = q^2 - 2q + 1 \\ & \Leftrightarrow 4q = 3 \Leftrightarrow q = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Das Modell konvergiert für $q \in [-1+\sqrt{3}, \frac{3}{4})$ gegen das Gleichgewicht. Für $q \geq \frac{3}{4}$ konvergiert das Modell nicht!

<u>2.Fall:</u> $q \in (0, -1+\sqrt{3}]$

$$\begin{aligned} & k = (q^2 - (q^2 + 2q - 2))^{1/2} = \sqrt{2 - 2q} = 1 \\ & \Leftrightarrow 2 - 2q = 1 \\ & \Leftrightarrow q = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Konvergenz auf $(\frac{1}{2}, -1+\sqrt{3}]$, sonst keine Konvergenz.

Insgesamt konvergiert die Preisentwicklung gerade für alle Werte q aus $(1/2, 3/4)$.

3 Investitionsrechnungsverfahren

Im Rahmen der Veranstaltung Wirtschaftsmathematische Zusatzübungen für Wirtschaftsingenieure wird nur auf zwei Verfahren (Internen Zinsfußmethode und Kapitalwertmethode) eingegangen. Weiterführende Kenntnisse werden in den Veranstaltungen des betrieblichen Rechnungswesens und der Investition und Finanzierung vermittelt.

3.1 Kapitalwertmethode

Eine Investition ist vorteilhaft, wenn der Kapitalwert größer als Null ist. Ist der Kapitalwert kleiner als Null, sollte nach einer alternativen Anlagemöglichkeit gesucht werden. Dabei ergibt sich der Kapitalwert einer Investition als Summe aller auf einen bestimmten Zeitpunkt ab- oder aufgezinsten positiven oder negativen Zahlung über den Betrachtungshorizont (betrachteten Zeitraum) der Investition. Als Bezugszeitpunkt wird im allgemeinen der Zeitpunkt unmittelbar vor der Investition (d.h. der Zeitpunkt des Abflusses der Zahlungsmittel für das Investitionsobjekt) gewählt. Dann werden alle Ein- und Auszahlungen auf diesen Bezugszeitpunkt abgezinst (diskontiert):

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} (E_t - A_t) * (1 + r_k)^{-t}.$$

Hierbei benutzen wir folgende Bezeichnungen

- Kapitalwert: K_0
- Perioden $t = 0, 1, 2, ..., n$
- Einzahlungen am Ende der Periode t: E_t
- Auszahlungen am Ende der Periode t: A_t
- Kalkulationszinsfuß: r_k
- Nutzungsdauer des Investitionsobjektes n

Als Kalkulationszinzfuß wählt man meist den am Kapitalmarkt erzielbaren Zins oder, wenn zur Finanzierung Kredite aufgenommen werden müssen, den Kreditzins.

Beispiel 3.1. Eine Investition bestehe aus folgendem Kapitalfluß:

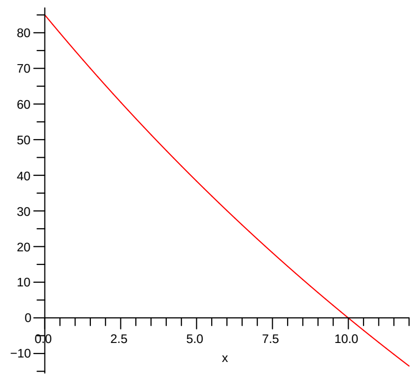


Abbildung 3.1: Kapitalwert bei gegebenem Kalkulationszins

Zeitpunkt	0	1	2	3	4
Ausgaben	300'000				
Einnahmen		70'000	100'000	100'000	115'000

Berechnung des Kapitalwerts mit einem Kalkulationszinsfuß von 9%:

$$K_0 = -300'000 + 70'000 * 1,09^{-1} + 100'000 * 1,09^{-2} + 100'000 * 1,09^{-3} + 115'000 * 1,09^{-4}$$

$$K_0 = 7'075,43 > 0 \implies \textbf{Investition sinnvoll}$$

Berechnung mit einem Kalkulationszinsfuß von 11%:

$$K_0 = -300'000 + 70'000 * 1,11^{-1} + 100'000 * 1,11^{-2} + 100'000 * 1,11^{-3} + 115'000 * 1,11^{-4}$$

$$K_0 = -6'901,49 < 0 \implies \textbf{Investition \textit{nicht sinnvoll}}$$

Die Abbildung 3.1 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen dem Kalkulationszinsfuß r_k und dem resultierenden Kapitalwert K_0.

3.2 Interne Zinsfußmethode

Bei der *Internen Zinsfußmethode* handelt es sich um einen Sonderfall der Kapitalwertmethode: es wird genau der Wert r_k bestimmt, bei dem der Kapitalwert K_0 gleich 0 ist. Diesen Wert bezeichnet man als internen Zinsfuß r_i.
Zur Berechnung des internen Zinsfußes r_i des vorangehenden Beispiels, ist die Gleichung

$$\begin{aligned} K_0 = &-300'000 + 70'000 * (1 + r_i)^{-1} + 100'000 * (1 + r_i)^{-2} \\ &+ 100'000 * (1 + r_i)^{-3} + 115'000 * (1 + r_i)^{-4} \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Zur Bestimmung der Nullstelle r_i eignet sich das Newton-Verfahren. Es liefert im vorangehenden Beispiel $r_i = 9,99\%$.

Effektive Zinsrate

Die effektive Zinsrate ist eine weitere Anwendung der internen Zinsfußmethode. Hierbei berechnet man den internen Zinsfuß des Cash-Flows der Anlage. Dieser heißt dann *effektive Zinsrate* der Anlage.

Beispiel 3.2. Eine Anlage mit einer Laufzeit von 3 Jahren wird wie folgt verzinst: Im ersten Jahr werden 3%, im zweiten Jahr $3,5\%$ und im dritten Jahr 4% Zinsen auf das Guthaben gezahlt. Es stellen sich nun folgende Fragen:

i) Wie hoch ist der effektive Jahreszins, wenn die jährlichen Zinsen nicht ausgezahlt werden sondern dem Guthaben gutgeschrieben werden?

ii) Ist der effektive Jahreszins höher oder niedriger, wenn die jährlichen Zinsen direkt ausgezahlt werden?

Zur Frage i): Die Einnahmen und Ausgaben lassen sich wie folgt darstellen, wenn wir mit einem Anlagebetrag von einem Euro rechnen:

Zeitpunkt	0	1	2	3
Ausgaben	1			
Einnahmen				a

wobei $a = 1,03 \cdot 1,035 \cdot 1,04$ die Ausschüttung am Ende der Laufzeit bezeichnet. Es ist nun r_i zu bestimmen mit

$$-1 + a(1 + r_i)^{-3} = 0,$$

d.h.

$$(1,03)(1,035)(1,04) = (1 + r_i)^3 \Rightarrow r_i \approx 3.499\%$$

Zur Frage ii): Wir bestimmen den Kapitalwert der Anlage mit jährlicher Ausschüttung für die im vorangehenden Teil berechneten effektiven Zinsrate r_i. Ist der Kapitalwert negativ, so ist die effektive Zinsrate bei jährlicher Auszahlung niedriger als bei Nichtausschüttung:

$$\text{Kapitalwert} = -1 + 0,03(1 + r_i)^{-1} + 0,035(1 + r_i)^{-2} + 1,04(1 + r_i)^{-3}] \approx -0.0003 < 0.$$

Also ist die effektive Zinsrate bei jährlicher Ausschüttung leicht niedriger.

BEISPIELE:

Beispiel 3.3. Die Unternehmensleitung erteilt Ihnen den Auftrag zu ermitteln, ob der Kauf der Maschine A eine rentable Investition für das Unternehmen darstellt. Bei einer Durchführung des Projektes ergäben sich aus Anschaffung und Betrieb der Anlage für die nächsten 4 Perioden folgende Zahlungsströme:

Zeitpunkt	0	1	2	3	4
Auszahlungen [€]	200	150	30	30	50
Einzahlungen [€]	0	100	130	130	130

Am Ende der vierten Periode kann die Maschine zu einem Preis von 60 € verkauft werden.

a) Treffen Sie die Investitionsentscheidung auf Grundlage der Kapitalwertmethode bei einem Kalkulationszinssatz von $r_k = 8\%$.

Sie erwägen ferner die Anschaffung von Maschine B, deren Kauf zu folgender Zahlungsreihe führen würde:

Zeitpunkt	0	1	2
Auszahlungen [€]	100	30	30
Einzahlungen [€]	0	90	100

Diese Maschine wird nur 2 Perioden lang genutzt; der Restwert am Ende der Nutzungsdauer beträgt 0 €. Die Anteilseigner des Unternehmens fordern für Sachinvestitionen eine Mindestrendite von 15%.

b) Entscheiden Sie mit Hilfe der Internen-Zinsfuß-Methode, ob diese Investition durchgeführt werden sollte. Da Ihr Budget begrenzt ist, können Sie nur eine der oben aufgeführten Investitionen realisieren.

c) Für welche Maschine entscheiden Sie sich gemäß der IZF-Methode (Hilfe: Der interne Zinsfuß von Projekt A beträgt $r_A = 11,23\%$)?

d) Bestimmen Sie nun die vorzuziehende Investition nach der Kapitalwertmethode bei $i_k = 8\%$.

e) Skizzieren Sie für beide Projekte die Kapitalwerte als Funktion des Kalkulationszinssatzes. Für welche Kalkulationszinssätze liefern Kapitalwertmethode und IZF-Methode hinsichtlich der Vorziehenswürdigkeit der beiden Projekte das gleiche Ergebnis?

Beispiel 3.4. Das Cobweb-Modell dient zur Erklärung oszillatorischer Preis- und Mengenbewegungen für ein auf dem Markt befindliches Gut, beruhend auf verzögerten Angebotsanpassungen. Aufgrund theoretischer Überlegungen wird für ein bestimmtes Gut folgende Nachfrage- und Angebotsfunktion angenommen:

$$x_{t,n} = 50 - 6p_t; \; x_{t,a} = 3p_{t-1} - 4$$

Demnach kann der Preis als unabhängige Größe interpretiert werden, wobei das Angebot durch den Preis der Vorperiode und die Nachfrage durch den Preis der aktuellen Periode determiniert werden. Zudem gilt zu jedem Zeitpunkt des Modells die Bedingung der Markträumung, d.h.: $x_{t,n} = x_{t,a}$

a) Geben Sie für das zu betrachtende Modell den Definitionsbereich für die unabhängige

Variabe an, so dass sich ein wirtschaftlich sinnvoller Bereich der abhängigen Variablen ergibt.

b) Geben Sie die Preisentwicklung für das Gut als Funktion von t an und ermitteln Sie für $p_0 = 8$ die Werte der ersten vier Perioden.

c) Wie lautet der Gleichgewichtspreis im zu betrachtenden Modell?

d) Geben Sie für das zu betrachtende Modell den Umsatz für $t \to \infty$ an.

e) Unter welcher Bedingung ergibt sich im Cobweb-Modell ein Gleichgewichtspreis?

Beispiel 3.5 (Berliner Bankskandal Eine Kapitalanlage am Alexanderplatz)**.** Herr K. aus B. ärgert sich, dass ein beträchtlicher Teil seines Jahreseinkommens in Höhe von 200.000,- €dem Fiskus zum Opfer fällt. Doch kurz bevor er sich dazu entschließt, einen Teil seines Geldes mithilfe eines luxemburgischen Kreditinstituts vor dem Zugriff deutscher Behörden zu sichern, flattert ihm ein Prospekt über einen Immobilienfonds der A-Bank ins Haus. Hier die wichtigsten Daten:

Beteiligungshöhe 100.000,- €

Ausschüttung während der ersten 15 Jahre 5,5%

Ausschüttung 16. bis 20. Jahr 6,0%

Ausschüttung ab 20. Jahr 6,5%

Andienungsrecht (Verkaufsrecht) nach 25 Jahren zum Nominalwert

optionale Finanzierung von bis zu 55% des Beteiligungsbetrages zu 8,75% p.a., fest auf 10 Jahre als Annuitätendarlehen

Folgende Vorteile nennt die A-Bank (da keine Sponsorengelder von der A-Bank an uns gezaht wurden, bleibt es in dieser Real-Life-Aufgabe bei A):

- Einkommensteuerersparnis durch Senkung des zu versteuernden Einkommens. Verlustzuweisung im ersten Jahr 86%, im zweiten Jahr 14%.

zu versteuerndes Einkommen	Einkommensteuer
200.000,00 €	83.137,00 €
(200.000-86.000=) 114.000,00 €	37.629,00 €
Steuerersparnis	**45.506,00 €**

- K. errechnet für sich im ersten Jahr eine Steuerersparnis von etwa 45.000,00 €, wodurch sein effektiver Kapitaleinsatz von 100.000,00 €auf 55.000,00 €sinkt.

- Weitere Senkung des Eigenkapitaleinsatzes durch Finanzierung möglich

- steuerliche Vorteile bei Erbschaft oder Schenkung
- geringes Risiko durch Andienungsrecht

K., der nun großes Interesse an dem Angebot hat, stellt folgende Kakulation auf. Die Zahlungen in der Tabelle erfolgen immer zum Jahresende (als Zahlungstermin legt er den 15.12.1995 zugrunde. Zinsen für 55.000 €bis Ende 95 - 200,52. Im Jahr 1996 keine Fondsausschüttung aber 14% Verlustzuweisung. Diese 14% wurden in der folgenden Berechnung nicht berücksichtigt, da sie in Champus steuerneutral angelegt wurden):

Jahr	Fondsaus-ausschüttung	Sollzins	Tilgung	zusammen	Rest-darlehen	Zuschüsse(-) Ausschüttung(+)
1995	-	200,52 €	-	200,52 €	55.000,00 €	-200,52 €
1996	-	4.812,50 €	3.663,53 €	8.476,03 €	51.336,47 €	-8.476,03 €
1997	5.500,00 €	4.491,94 €	3.984,09 €	8.476,03 €	47.352,38 €	-2.976,03 €
1998	5.500,00 €	4.143,33 €	4.332,70 €	8.476,03 €	43.019,68 €	-2.976,03 €
1999	5.500,00 €	3.764,22 €	4.711,81 €	8.476,03 €	38.307,87 €	-2.976,03 €
2000	5.500,00 €	3.351,94 €	5.124,09 €	8.476,03 €	33.183,78 €	-2.976,03 €
2001	5.500,00 €	2.903,58 €	5.572,45 €	8.476,03 €	27.611,33 €	-2.976,03 €
2002	5.500,00 €	2.415,99 €	6.060,04 €	8.476,03 €	21.551,29 €	-2.976,03 €
2003	5.500,00 €	1.885,74 €	6.590,29 €	8.476,03 €	14.961,00 €	-2.976,03 €
2004	5.500,00 €	1.309,09 €	7.166,94 €	8.476,03 €	7.794,05 €	-2.976,03 €
2005	5.500,00 €	681,98 €	7.794,05 €	8.476,03 €	-0,00 €	-2.976,03 €
						-35.460,8 €
ab 2006	5.500,00 €					22.000,00 €
ab 2010	6.000,00 €					30.000,00 €
ab 2015	6.500,00 €					39.000,00 €
						55.539,2 €
2020	Verkaufsrecht					100.000,00 €
						155.539,2 €
		Annuität	8.476,03 €			

K. kommt aufgrund dieser Kalkulation zu dem Schluss, dass der Standort Deutschland einen schlechteren Ruf genießt, als er verdient und macht sich auf zur A-Bank.

4 Markov-Ketten

4.1 Einführung

Beispiel 4.1. Ein Hersteller eines Produkts beobachtet folgendes Käuferverhalten:

	Käufer des Produkts zum ZP $t+1$	kein Käufer zum ZP $t+1$
Käufer zum ZP t	80%	20%
kein Käufer zum ZP t	10%	90%

D.h. 80% der Käufer bleiben während einer Zeitperiode der Marke treu und 20% der Käufer werden in der Folgeperiode das Produkt nicht mehr nutzen. Entsprechend kann man das Verhalten der Leute, die keine Kunden sind aus der obigen Tabelle ablesen.
Es bezeichnen nun

- $p_1(t)$ den Anteil der Käufer zum ZP t und
- $p_2(t)$ den Anteil der Nichtkäufer zum ZP t.

Das Käuferverhalten wird also durch folgendes System von Differenzengleichungen beschrieben:

$$\begin{cases} p_1(t+1) = 0,8\ p_1(t) + 0,1\ p_2(t) \\ p_2(t+1) = 0,2\ p_1(t) + 0.9\ p_2(t) \end{cases}$$

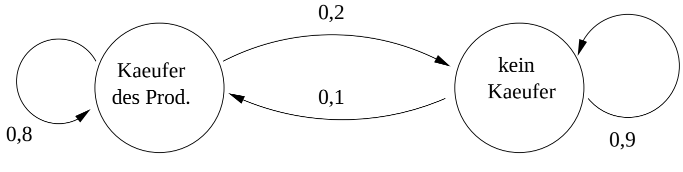
In Matrixform können wir die Gleichung wie folgt darstellen:

$$\big(p_1(t+1), p_2(t+1)\big) = \big(p_1(t), p_2(t)\big) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$P := \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

wird *Übergangsmatrix* genannt. Weiterhin lässt sich das Käuferverhalten mittels dem folgenden Graphen beschreiben:



Aufgabe: Man bestimme die explizite Lösung von $p_1(t)$.

Wir nehmen an, dass $p_1(0)+p_2(0) = 1$, d.h. alle Leute können einem bestimmten Zustand zugeordnet werden. Da nun

$$p_1(t+1) + p_2(t+1) = 0,8\ p_1(t) + 0,1\ p_2(t) + 0,2\ p_1(t) + 0.9\ p_2(t) = p_1(t) + p_2(t),$$

gilt induktiv $p_1(t) + p_2(t) = 1$ für alle Zeiten $t \in \mathbb{N}_0$.
Ersetzen wir nun $p_2(t)$ durch $1 - p_1(t)$ in der Differenzengleichung so erhalten wir:

$$p_1(t+1) = 0,8\ p_1(t) + 0,1 - 0,1\ p_1(t) = 0,1 + 0,7\ p_1(t).$$

Die allgemeine Lösung hiervon ist

$$p_1(t) = \frac{1}{3} + A\Big(\frac{7}{10}\Big)^t,$$

wobei A ein freier Parameter ist, der vom Anfangswert abhängt. Unabhängig vom Startwert erhalten wir

$$\lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{1}{3}.$$

Nach einer Einpendelungsphase werden $\frac{1}{3}$ der Leute das Produkt nutzen.

Im Beispiel haben wir eine erste Markov-Kette kennengelernt. Allgemein besteht eine Markov-Kette aus

- einem *Zustandsraum* S (meist werden wir die Zustände durchnummerieren und mit S die Menge $\{1, \dots, n\}$ bezeichnen) und
- einer *Übergangsmatrix* P, d.h.
  - P ist eine $n \times n$-Matrix mit
  - nicht negativen Einträgen und
  - Zeilensummen gleich 1 (dies stellt sicher, dass zu jedem ZP der Gesamtanteil in den Zuständen 1 beträgt)

Eine *Startkonfiguration* $p(0) = (p_1(0), \dots, p_n(0))$ besteht nun aus n nicht-negativen Einträgen deren Summe gleich 1 ist. Sie beschreibt die Anteile an den jeweiligen Zuständen zum Zeitpunkt 0. Die Übergangsmatrix $P = (P_{i,j})_{i,j}$ besteht aus den Einträgen $P_{i,j}$, die den Anteil beschreiben der pro Zeitschritt vom Zustand i in den Zustand j wechselt.
Wir beschreiben nun die Folgekonfiguration $p(t+1) = (p_1(t+1), \dots, p_n(t+1))$ von $p(t)$ durch das folgende System

$$\begin{cases} p_1(t+1) = p_1(t)P_{1,1} + \dots + p_n(t)P_{n,1} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ p_n(t+1) = p_1(t)P_{1,n} + \dots + p_n(t)P_{n,n} \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich auch als Matrimultiplikation mit P darstellen:

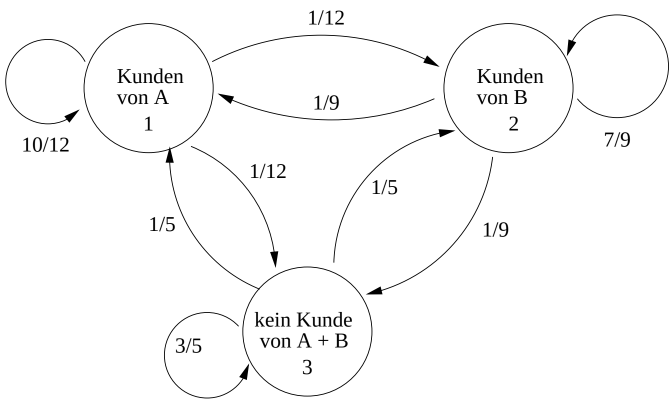
$$p(t+1) = p(t)P$$

Für eine gegebene Startkonfiguration lässt sich also $p(t)$ in der folgenden Form darstellen:

$$p(t) = p(t-1)P = p(t-2)PP = \cdots = p(0)\underbrace{P\dots P}_{t\text{-mal}} = p(0)P^t.$$

Betrachten wir ein weiteres Beispiel.

Beispiel 4.2. Eine Firma untersucht die Akzeptanz des eigenen Produktes A und eines Konkurrenzproduktes B. Eine Marktanalyse hat ergeben, dass sich die Zielgruppe wie folgt verhält:



In dem Diagramm haben wir bereits den einzelnen Zuständen die Nummern $1, 2, 3$ zugeordnet (Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$). Die entsprechende Übergangsmatrix lautet

$$P = \begin{pmatrix} 10/12 & 1/12 & 1/12 \\ 1/9 & 7/9 & 1/9 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Für eine Konfiguration $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ zum ZP t erhält man nun die Folgekonfiguration durch Multiplikation mit P:

$$p(t+1) = p(t)P.$$

Es stellt sich nun folgende allgemeine Frage.

<u>Frage:</u> Existiert ein Gleichgewicht?

Formal ist ein *Gleichgewicht* eine Konfiguration $p = (p_1, \dots, p_n)$, sodass

(i) $pP = p$ (die Folgekonfiguration ist gleich der Ausgangskonfiguration),

(ii) $p_1 + \cdots + p_n = 1$ und alle Einträge von p nicht negativ sind.

Wir formen die Bedingung (i) äquivalent um (hierbei bezeichnen wir mir I die $n \times n$-Einheitsmatrix) :

$$\text{(i)} \Leftrightarrow P^* p^* = p^* \Leftrightarrow (P^* - I)p^* = 0 \Leftrightarrow p^* \in \operatorname{Kern}(P^* - I)$$

Betrachten wir nun wieder das vorhergehende Beispiel.

Beispiel 4.3. Wir erhalten als Matrix $P^* - I$ gerade

$$\begin{pmatrix} -2/12 & 1/9 & 1/5 \\ 1/12 & -2/9 & 1/5 \\ 1/12 & 1/9 & -2/5 \end{pmatrix}$$

und der Gauß-Algorithmus liefert

$$\operatorname{Kern}(P^* - I) = \left\{ \mu \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Nun muss noch die allgemeine Lösung $p = \mu(12, 9, 5)$ ($\mu \in \mathbb{R}$) von (i) bestimmt werden, die auch der Bedingung (ii) genügt:

$$p_1 + p_2 + p_3 = \mu(12 + 9 + 5) = 26\mu \stackrel{!}{=} 1.$$

Wir erhalten als eindeutiges Gleichgewicht

$$\boxed{p = \tfrac{1}{26}(12, 9, 5)}$$

4.2 Kovergenz gegen das Gleichgewicht (Theorie)

Wir haben bereits am Beispiel ein Gleichgewicht einer Markov-Kette berechnet. Nun stellt sich die Frage nach der *Eindeutigkeit* des Gleichgewichtes und nach der *Konvergenz* von $p(t)$ gegen das Gleichgewicht. In den meisten Fällen kann man diese Fragen mithilfe des folgenden Theorems beantworten.

Theorem 4.4 (Ergodensatz)**.** *Wenn die Markov-Kette*

- irreduzibel *und*
- aperiodisch

ist, existiert genau ein Gleichgewicht p und für jede Anfangskonfiguration $p(0)$ gilt

$$\lim_{t \to \infty} \underbrace{p(0)P^t}_{p(t)} = p.$$

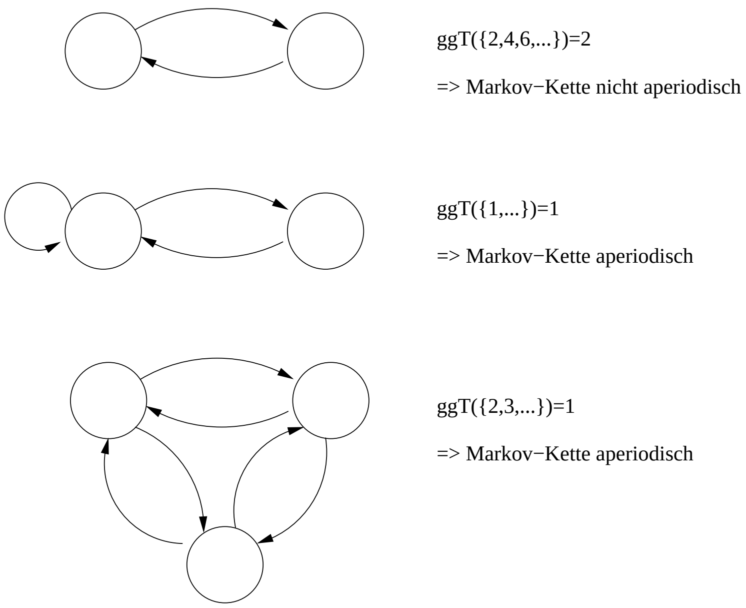
Weiterhin sind alle Einträge in p strikt positiv.

Wir müssen noch erklären, wann eine Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch ist.

Definition 4.5.
- Ein Tupel $(x_0, \dots, x_l)$ mit Einträgen aus S heißt *erlaubter Pfad* der Länge l, wenn alle Einträge $P_{x_i, x_{i+1}}$ größer als 0 sind, d.h. wenn in der Graphendarstellung für jedes $i = 0, \dots, l-1$ ein Pfeil von x_i nach x_{i+1} führt.
- Eine Markov-Kette heißt *irreduzibel*, wenn alle Zustände über erlaubte Pfade verbunden sind. Bem.: Irreduzibilität überprüft man am einfachsten durch Angabe eines geschlossenen Pfades, der alle Zustände mindestens 1-mal durchläuft.
- Eine Markov-Kette heißt *aperiodisch*, wenn

$$\mathrm{ggT}(\{l \in \mathbb{N} : (x_0, \dots, x_l) \text{ erlaubter geschlossener Pfad}\}) = 1.$$

Beispiel 4.6. (Beispiele für periodische (nicht aperiodische) und aperiodische Markov-Ketten)



4.3 Berechnug des Gleichgewichts mithilfe des Computers

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass die Markov-Kette ein *eindeutiges* Gleichgewicht besitzt.
Betrachten wir nochmals Bedingung (i) und (ii) des Gleichgewichts. Die Bedingungen sind äquivalent zu

- $(P^* - I)p^* = 0$ und
- $(1, \dots, 1)p^* = 1$.

Wir fassen nun die beiden Gleichungen in einer Matrixgleichung zusammen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P^* - I \\ 1 \ \ldots 1 \end{pmatrix}}_{=:A} p^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A ist eine $(n+1) \times n$-Matrix. Sie ist also *nicht* invertierbar! Zur berechnung der Lösung p hat man nun zwei Möglichkeiten:

1. Man berechnet p mittels
$$p^* = (A^* A)^{-1} A^* \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Man bildet eine neue Matrix $\tilde{A}$ indem man aus A eine der Zeilen 1 bis n (aber nicht die unterste) entfernt, und berechnet p mittels
$$p^* = \tilde{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5 Ausgleichsrechnung

Beispiel 5.1. Ein Verkäufer von Mobiltelefonen stellt die folgende Kundenentwicklung fest:

Datensatz (i)	1	2	3	4
Monat (x_i)	1	3	4	5
Anz. der Kunden (y_i)	20	30	38	60

Er möchte nun die einzelnen Werte y_i ($i = 1, \ldots, 4$) möglichst gut durch

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1\, x_i$$

beschreiben, wobei die Parameter b_0 und b_1 so gewählt werden sollen, dass die Beschreibung so exakt wie möglich ist, d.h, einen möglichst kleinen Fehler aufweist.
Ziel: Wähle b_0,$b_1 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \to min!$$

5.1 Eine allgemeine Betrachtung der Ausgleichsrechnung

Das (lineare) Ausgleichsproblem basiert auf einer Reihe von Datensätzen (sagen wir n), wobei jeder Datensatz aus

einem zu beschreibenden Wert:	y_i	und
m beschreibenden Werten:	$x_{i,1}$,...,$x_{i,m}$	

besteht. Ziel ist es nun freie Parameter $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ so zu wählen, dass der quadratische Fehler

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i|^2$$

für

$$\hat{y}_i = x_{i,1}\, b_1 + \cdots + x_{i,m}\, b_m$$

minimal ist. Bezeichnen wir nun mit $\mathrm{err}(b_1, \ldots, b_m)$ die Fehlerfunktion

$$\mathrm{err}(b_1, \ldots, b_m) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (x_{i,1}\, b_1 + \ldots + x_{i,m}\, b_m))^2.$$

Ziel ist es nun die Fehlerfunktion zu minimieren. Suchen wir zuerst die Werte $b_1, \ldots, b_m$ für die $\nabla \mathrm{err}(b_1, \ldots, b_m) = 0$. Hierzu setzen wir

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{1,1} & \ldots & x_{1,m} \\ x_{2,1} & \ldots & x_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \ldots & x_{n,m} \end{pmatrix}}_{\text{Designmatrix}}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_j} \mathrm{err}(b_1, \ldots, b_m) &= -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \underbrace{(x_{i,1} b_1 + \ldots + x_{i,m} b_m)}_{(Xb)_i})\, x_{i,j} \\ &= -2 \left[X^* y - X^* X b \right]_j \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall j \quad (= 0 \text{ wegen Minimierung}). \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$X^* X b = X^* y$$

und falls $X^* X$ invertierbar ist, erhalten wir

$$\boxed{b = (X^* X)^{-1} X^* y}$$

Betrachten wir nun wieder das vorhergehende Beispiel:

Beispiel 5.2. Betrachten wir wieder die Approximation

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i = b_0 \, 1 + b_1 x_i. \tag{5.1}$$

Für jedes i haben wir zwei beschreibende Werte: 1 und x_i. Dies liefert die Designmatrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

und den y-Vektor

$$y = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 38 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Nun kann man die optimalen Parameter mittels

$$b = (X^* X)^{-1} X^* y$$

berechnen. Für Ausgleichsprobleme der Form (5.1) gibt es eine allgemeine Formel zur Berechnung von b_0 und b_1, die im folgenden benutzt werden darf:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

und

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

wobei

- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

Praktische Anwendung am Computer:

- Berechnung der optimalen Parameter am Computer
- Berechnung des quadratischen Fehlers
- Erzeugen von Plots
- Berechnung von Prognosen (z.B. Anzahl der Kunden im 5. Monat)

Man beachte:

- Man hat die beste Anpassung in Bereichen mit vielen Datenpunkten.
- Weit entfernt liegende Punkte können das Ergebnis stark beeinflussen (outliers).
- Die Hinzunahme von Parametern führt zu einer Verkleinerung des quadratischen Fehlers. Aber diese liefert möglicherweise eine schlechtere Prognose.

5.2 Approximation durch Polynome

Im vorangehenden Beispiel sollte der Wert y_i mithilfe eines Wertes x_i durch

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$$

möglichst gut beschrieben werden, d.h. $\hat{y}_i = f_{b_0,b_1}(x_i)$, wobei die Funktion f_{b_0,b_1} eine affin lineare Abbildung ist. Allgemeiner kann man sich nun Fragen inwiefern sich die Werte y_i gut mittels

$$\hat{y}_i = f(x_i) \qquad (f \text{ Polynom vom Grad } \leq p)$$

beschreiben lassen.

Beispiel 5.3. Wir approximieren nun die einzelnen Werte y_i $(i = 1, \ldots, n)$ durch

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2.$$

Dies entspricht der obigen Polynomapproximation für den Fall $p = 2$. Die entsprechende Designmatrix ist

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$$

Es lassen sich nun leicht mithilfe des Computers für gegebenen Daten die optimalen Parameter bestimmen:

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (X^* X)^{-1} X^* y.$$

Voraussetzung hierzu ist die Invertierbarkeit von $X^* X$.

Für die allgemeine Polynomapproximation der Ordnung p erhält man als beschreibende Parameter von y_i: $1, x_i, x_i^2, \ldots, x_i^p$. Die entsprechende Designmatrix ist

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_i^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^p \end{pmatrix}}_{n \times (p+1)\text{-Matrix}}$$

5.3 Leicht gestörte Differenzengleichungen

Angenommen eine Reihe von Daten $y_{-k}, \ldots, y_n$ lässt sich wie folgt als "leicht gestörte Differenzengleichung" darstellen

$$y_i = a_0 + a_1 y_{i-1} + \ldots + a_k y_{i-k} + \underbrace{\varepsilon_i}_{\text{kleine Störung nahe bei 0}} \qquad (i = 0, \ldots, n).$$

Idee: Prognostiziere den Wert y_i mithilfe der Vorgängerwerte durch

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 y_{i-1} + \ldots + b_k y_{i-k},$$

wobei $b_0, \ldots, b_k$ so gewählt werden sollen, sodass sich auf den bereits bekannten Daten ein möglichst kleiner Fehler ergibt.
Als Fehlerfunktion betrachten wir wieder $\mathrm{err}(b_0, \ldots, b_k) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$. Dies führt zur Designmatrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & y_{-1} & \ldots & y_{-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{n-1} & \ldots & y_{n-k} \end{pmatrix}$$

und die optimalen Parameter sind gegeben durch

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = (X^* X)^{-1} X^* \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$