

Mathematisches Turnier

19. Dezember 2007

1. Auf dem G8-Gipfel wollen die acht Staatschefs möglichst viele dreiköpfige Gremien bilden. Dabei darf jeder von ihnen in mehreren Gremien arbeiten, aber keine zwei dürfen in zwei verschiedenen Gremien zusammen sein. Was ist die höchstmögliche Anzahl der Gremien?
2. Wieviele Quadrate gibt es auf dem Schachbrett? Gemeint sind alle Quadrate, die aus ganzen Feldern bestehen.
3. In einem 7×7 Quadrat sind die Zahlen $1, 2, \dots, 49$ platziert. Es wird die Summe der Zahlen in jeder Zeile und jeder Spalte gebildet. Einige dieser 14 Summen sind ungerade, die anderen gerade. Es sei A die Summe aller ungeraden Summen und B die Summe aller geraden Summen. Ist es möglich, dass die Zahlen derart in das Quadrat platziert wurden, dass $A = B$ gilt?
4. Jeder von 2^n Freunden hat ein Gerücht erfahren (alle Gerüchte seien unterschiedlich). Die Freunde fangen an, zu telefonieren. Jedes Telefongespräch dauert 1 Stunde, und bei ihm werden alle Gerüchte, die die zwei Gesprächsteilnehmer zur Zeit wissen, mitgeteilt. Es können mehrere Gespräche zur gleichen Zeit stattfinden, aber keiner kann gleichzeitig mehrere Gespräche führen. Wie lange wird es mindestens dauern, bis jeder jedes Gerücht erfahren hat?
5. Zeige, dass für alle positive ganze Zahlen n gilt:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. Im November gab es genau 15 Regentage. Am 1. und am 30. November hat es geregnet. Zeige, dass es vor dem 30. November einen Tag gab, bis zu dem die Anzahl der Regentage und der trockenen Tage gleich war.
7. Finde alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, so dass $a - b$ eine Primzahl und ab eine Quadratzahl ist.

8. Sei ABC ein Dreieck, dessen Winkel alle kleiner als 120° sind. An seinen Seiten befinden sich außen gleichseitige Dreiecke ABC_1 , A_1BC und AB_1C . Zeige, dass sich die Geraden AA_1 , BB_1 und CC_1 in einem Punkt M schneiden, und dass $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$ gilt.

Bei Fragen zu den Aufgaben und zu den Regeln des Turniers kontaktiert bitte Ivan Izmetiev: 0176-63236-132.