

Zirkel 9b

Aufgaben für den Sommer 2007

1. Berechne die Zahlen

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 10 \pmod{11},$$

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 12 \pmod{13}.$$

Kannst Du eine Vermutung formulieren, die Deine Ergebnisse als Spezialfälle einschließt?

2. Was ist besser: 100 % Gewinn im Jahr oder jeden Monat $\frac{100}{12}$ % Prozent oder jeden Tag $\frac{100}{365}$ %? Wird es sich vielleicht lohnen, jede Stunde die Zinsberechnung mit entsprechendem Anteil zu machen?
3. Sei K eine ebene Figur mit der folgenden Eigenschaft: Wenn a und b zwei parallele Tangenten zu K sind (K ist dann zwischen a und b eingeschlossen), dann ist der Abstand zwischen a und b gleich 1. Folgt daraus, dass K ein Kreis ist?
4. Man nimmt ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1, teilt jede Seite in 3 gleiche Teile und konstruiert über dem mittleren Drittel jeder Seite wieder ein gleichseitiges Dreieck, das außen anliegt. In der entstandenen Figur teilt man jede Strecke des Randes in drei gleiche und konstruiert gleichseitige Dreiecke über jeden mittleren Drittel. Nach "unendlich vielen" Schritten erhält man eine Figur mit stark gezacktem Rand, die die Koch'sche Schneeflocke heißt (Niels Fabian Helge von Koch (1870 - 1924), schwedischer Mathematiker).



Berechne die Fläche und den Umfang der Koch'schen Schneeflocke.

5. Fibonacci-Zahlen sind: $F_1 = F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$ (Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (1170 - 1250)). Zeige, dass

(a) die Zahl $F_{n-1}^2 + F_n^2$ auch eine Fibonacci-Zahl ist;

(b) die Zahl F_{2n} durch F_n teilbar ist.

Hinweis: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = 2F_{n-2} + F_{n-3} = 3F_{n-3} + 2F_{n-4} = \dots$

6. Man betrachte die Folge der Wörter

A
 AB
 ABA
 $ABAAB$
 $ABAABABA$
 \dots

Hier entsteht jedes nächste Wort aus dem vorherigen nach der folgenden Regel: jeder Buchstabe B wird durch A ersetzt, jeder Buchstabe A durch die Kombination AB .

(a) Wieviele Buchstaben A und wieviele Buchstaben B enthält das n -te Wort?

(b) Zeige, dass das n -te Wort mit dem $(n - 1)$ -ten beginnt. Somit entsteht ein unendliches Wort W :

$ABAABABAABAAB\dots$

(c) Was ist der relative Anteil an Buchstaben A im Wort W ?

(d) Zeige, dass das Wort W nicht periodisch ist.

(e) Trotzdem ist W ziemlich gleichförmig: Jedes endliche Stück kommt unendlich oft vor.