Zirkel 12b, Hausaufgaben vom 02.06.2009

(zum 16.06.2009)

Algebraische Kurven

1. Beweise:

$$\cos\phi = \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}},$$
$$\sin\phi = \frac{2\tan\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}.$$

   Was haben diese Formeln mit rationalen Punkten auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ zu tun?

2. Zeige, dass unter einer geeigneten Rotation der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ die Kurve $x^2 - y^2 = 2$ in die Kurve $xy = 1$ übergeht.

3. Betrachten wir die Kurve $C = \{(x, y) \mid y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d\}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

   (a) Zeige: wenn p_1 und p_2 zwei Punkte auf C mit rationalen Koordinaten sind, dann schneidet die Gerade p_1p_2 die Kurve C in einem weiteren Punkt, der ebenfalls rationale Koordinaten hat (außer wenn diese Gerade senkrecht ist).

   (b) Zeige, dass die Kurve $y^2 = x(x+1)(x+7)$ unendlich viele rationale Punkte enthält.