Zirkel 12b, Hausaufgaben vom 19.05.2010

(zum 26.05.2010)

Pellsche Gleichung II

1. Die ganzzahligen Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ entsprechen durch $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$ den Punkten mit rationalen Koordinaten auf dem Einheitskreis
$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1}$$
Man kann jetzt die Strategie anwenden, die wir zum Lösen der Pellschen Gleichung benutzt haben.
   (a) Eine rationale Lösung von (1) entspricht einer komplexen Zahl vom Absolutbetrag 1.
   (b) Wenn (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei rationale Lösungen von (1) sind, dann ist $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ auch eine.
   (c) Finde die Lösungen von (1), die den Zahlen $(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i)^2$ und $(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i)^3$ entsprechen, sowie die zugehörigen Pythagoreischen Tripel.

2. Sei $(p_{\min}, q_{\min})$ die minimale Lösung der Pellschen Gleichung $x^2-dy^2 = 1$. Es wird jetzt eine obere Abschätzung für $q_{\min}$ bewiesen:
$$q_{\min} < e^{Cd^{\frac{3}{2}} \log d}, \tag{2}$$
wobei C eine von d unabhängige Konstante ist (auf jeden Fall, $C < 100$).
   (a) Sei
$$|p - q\sqrt{d}| \leq \frac{1}{Q}. \tag{3}$$
   Zeige: wenn $q \leq \frac{Q}{\sqrt{d}} - 1$, dann $|p^2 - dq^2| = 1$
   (b) Betrachte die Folge
$$Q_1 = 2, \quad Q_{k+1} = \sqrt{d} \cdot Q_k.$$
   Zu jedem Q_k wähle ein Paar (p_k, q_k) mit $q_k < Q_k$, sodass die Ungleichung (3) erfüllt wird. (So ein Paar gibt es immer, nach dem Approximationssatz von Dirichlet.)
   Zeige: es gibt $k, l < Cd^{\frac{3}{2}}$, sodass entweder $(p_k, q_k) = (p_l, q_l)$, oder $(p_k, q_k) \neq (p_l, q_l)$ aber $p_k^2 - dq_k^2 = p_l^2 - dq_l^2 = N$ für ein N und
$$\begin{aligned} p_k &\equiv p_l (\mathrm{mod} N), \\ p_k &\equiv p_l (\mathrm{mod} N). \end{aligned}$$
   Leite daraus die Abschätzung (2) her.