

Zirkel 12b, Hausaufgaben vom 12.05.2009

(zum 19.05.2009)

Pellsche Gleichung I

1. In $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ gibt es auch Zahlen mit negativer Norm, z. B.

$$N(7 + 5\sqrt{2}) = 7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1.$$

Beschreibe alle Zahlen der Norm ± 1 , d. h. finde alle ganzzahlige Lösungen der Gleichung

$$|x^2 - 2y^2| = 1.$$

2. Sei $C < 2\sqrt{2}$ eine beliebige positive Zahl. Zeige, dass die Ungleichung

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{Cq^2}$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen Zahlen p, q besitzt.

(*Hinweis:* benutze die Tatsache, dass die Gleichung $|p^2 - 2q^2| = 1$ unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt.)

3. Beschreibe alle Lösungen der Pellschen Gleichung

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$